

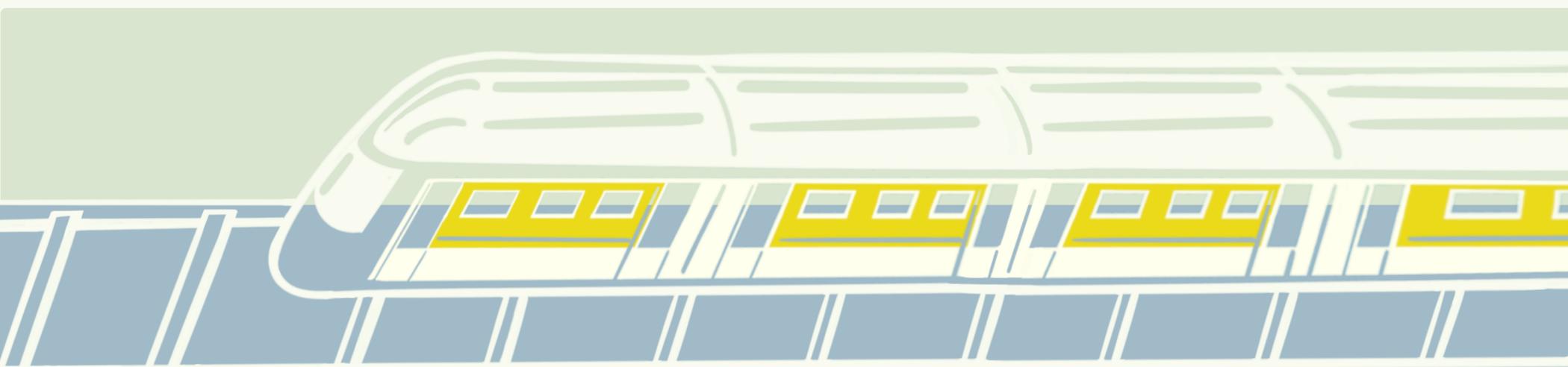
2023 15th ICTME

2023年台灣數學教育學會年會 暨
第十五屆
科技與數學教育國際學術研討會
研討主題
數學教育的研究與實踐

論文全集

2023.04.29 SAT
2023.04.30 SUN

國立臺北教育大學至善樓B1國際會議廳



國小在職教師關於兒童文學融入數學教學與學習之信念的 研究與實踐之初探

楊德清¹ 莊程屹²

¹ 嘉義大學教育系數理教育碩士班 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

² 嘉義大學教育系數理教育碩士班 cspcshine@gmail.com

摘要

本研究目的是針對國內在職教師進行大規模之問卷調查，以探究國小在職教師在不同之背景下有關於兒童文學融入數學教學和學習中所可能遭遇之主要障礙和推動因素。研究結果顯示台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要障礙有 64.85% 以(3)繪本內容與教學單元的合適性最多人選擇，而(1)使用繪本融入教學很耗時和(4)教學資源不足、(5)教師對數學繪本不熟這三個選項，比例為 42.12%、42.73% 和 42.12%，其次是(2)需要花更多時間備課選填比例為 35.76%，其中以(6)教師對數學概念不熟 19.70% 選比例最低。主要推動因素有 89.09% 教師認為以兒童數學繪本來作為引起動機藉以提升學生學習興趣是最主要想要將數學繪本融入課程的因素，並且有 82.42% 的教師希望以數學繪本融入數學課的上課方式會讓數學課能更有趣，如果繪本內容與教學單元連結或有相關，則有 64.55% 的教師會將繪本融入數學課程中。

關鍵字：障礙、促成因素、兒童文學、教師信念

壹、緒論

一、研究動機與背景

Beswick (2012) 的研究指出教師的信念取決於所考慮的數學類型。雖然一些研究探討了教師關於將兒童文學融入數學教學的信念 (例如 Frykholm & Glasson, 2005; Ward, 2005)，但是目前少有針對台灣教師關於兒童文學融入數學教學之相關研究。此外，儘管有關教師信念的重要性已被許多研究所強調，但目前並未有正式強調將兒童文學納入台灣小學數學課程。因此，本研究旨在探究台灣小學教師有關於將兒童文學融入數學教學與學習中的信念之相關研究，本研究之推動有其必要性，亦勢在必行。

美國數學教師學會 (NCTM) 在其所出版之學校數學的原則與標準一書中強調兒童數學的學習應該與生活情境相結合，同時亦應透過廣泛的閱讀、持續的寫作以及共同的討論與分享中學習 (NCTM, 2000)。許多研究指出兒童文學或繪本融入數學教學，不但可以提升兒童的數學學習興趣與動機，同時可以幫助孩子在有意義的生活情境中發展數學概念，進而學習如何運用所學得的數學知識於情境中 (Clarke, 2002; Jenner & Anderson, 2000)。Gailey (1993) 亦指出將繪本或圖畫書融入兒童數學的教學中，可以提供兒童傾聽故事情境發展、寫作學習心得以及討論與分享數學概念的機。由此可見，將兒童文學融入數學教學與學習實有其必要性。

二、研究目的

本研究目的為針對國內在職教師進行大規模之問卷調查，以探究台灣在職教師認為兒童文學融入數學教學中的主要障礙與推動因素。相關研究問題說明

如下：

1. 台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要障礙有哪些？
2. 台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要推動因素是什麼？
3. 不同的教師年齡層、不同的教師學歷背景以及不同的教師學科背景對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性為何？

貳、文獻探討

一、兒童數學繪本與數學教學與學習

圖畫書是一本“故事取決於書面文字和圖像之間的互動以及兩者都是以有意識的美學注意力所創造出來的書” (Arizpe & Styles, 2003, p. 22)。後來，Flevaris 和 Schiff (2014) 將該定義修改為包括無字圖畫書。圖畫書基本上提供了有意義的背景和數學的視覺插圖 (Elia et al., 2010; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013, 2016)。在數學教學和學習中使用圖畫書，可以為學生提供了在解決問題的同時能夠知道如何運用他們在數學課室所學得知識的機會，從而協助學生發展批判性思維的技能 (Goldstein, 2007; van den Heuvel-Panhuizen et al., 2016)。Whitin 和 Wilde (1992) 的研究證實，將圖畫書融入數學教學，透過與書中所呈現的故事的自然聯繫，可以激發學生的學習動機。Tucker 等人 (2010) 認為在數學教學中使用圖畫書有助於學生達到數學熟練程度。儘管圖畫書在數學教學中產生了積極的正面影響，然而相關的研究並不多 (van den Heuvel-Panhuizen et al., 2016; Flevaris & Schiff, 2014)。基於上述論點，Flevaris 和 Schiff (2014) 認為圖畫書在數學教學中的使用仍處於假設的狀態，而不是其實現的現狀。因此，需要更多的研究來呈現在數學教學中使用圖畫書的潛在優勢。鍾靜 (2012) 指出，將圖畫書作為數學教學的一種材料已成為小學課堂的一種新趨勢，特別是當前新課綱強調數學素養與閱讀能力；同時，若教師傾向於透過數學繪本教學或指導學生學習，這可以提供不同的學習觀點，以增強對數學的學習興趣。

二、教師對兒童文學融入數學教學之信念的相關研究

依據相關研究文獻的搜尋與檢視，目前只有三篇文章關注教師對兒童文學融入數學教學與學習的信念之相關研究 (Alazzi, 2006; Prendergast et al., 2019; Ward, 2005)。Ward (2005) 的研究透過使用兒童繪本“如果世界是一個村莊 (Smith, 2002)”展示活動和想法以激發 30 名 K-8 年級職前教師對未來將兒童文學融入數學教學的想法。研究發現職前教師驚奇地發現了圖畫書它不僅是教學中的工具，同時也是將數學與其他領域聯繫起來的主要促進因素。Alazzi (2006) 研究美國中西部大學就讀的 85 名職前小學教師對使用三本兒童圖畫書與幾何內容的反思。研究結果顯示這些職前教師對與幾何內容有關之兒童文學融入教學之想法產生了六個不同的議題，包括個人化與文學的聯繫，為兒童閱讀，成為教師，尋找數學，發現教學想法，以及關注道德議題等六項。Prendergast 等人 (2019) 的研究探討了愛爾蘭 154 名職前和在職教師對兒童文學融入數學教學與學習的看法，進而分析教師對兒童文學融入數學教學之可能促進推動的因素以及推動過程中可能之障礙的主要因素為何。研究結果發現可能促成教師對兒童文學融入數學教學之推動因素包括可察覺的教學益處、社會規範的促成、以及對兒童文學的熱愛等三項。

上述針對職前教師與在職教師對兒童文學融入數學教學之想法的研究結果

顯示，兒童文學融入數學教學的確有其益處與多元的優勢，當然也有其推動之可能障礙。那麼，台灣的小學教師對兒童文學融入數學教學之想法為何？推動時所可能有之障礙又為何呢？這些都值得我們做進一步的調查、分析與研究。

參、研究法

本研究透過開放式問卷調查工具之使用，以深入探討台灣教師認為將兒童文學融入數學教學中可能有之主要障礙與推動因素有哪些。因此，將透過質性方法深入分析在職國小教師所回答之開放式問卷調查內容，以達研究目的。

一、研究樣本

為使樣本更具代表性，樣本之選取包含不同縣市，以及不同規模學校之國小現職教師參與本開放式問卷之填答，共有 330 為教師參與研究，如表 1。

表 1 教師填答問卷基本資料統計

1. 您的性別	男	77
	女	253
2. 您的年齡	23-30 歲	93
	31-40 歲	66
	41-50 歲	135
	51 歲以上	36
3. 您的教學年資	未滿 10 年	137
	11~20 年	99
	21-30 年	82
4. 您的最高學歷為	31 年以上	12
	學士	137
	碩士	180
5. 您最高學歷畢業系所為	博士	12
	非理工背景	208
	理工背景	115
	其他(含無法判斷)	7

二、研究工具

研究工具將以研究者之前所開發之兒童文學與數學教學開放式問卷調查表作為研究工具。本正式開放式問卷調查工具將採線上回答的方式，邀請國內小學老師上網填答以蒐集資料；若教師無法上網填答則可以採用紙本填答的方式進行。

本研究工具之效度的檢驗方式採內容效度法，亦即邀請兩位數學教育專家以及 3 位國小教師協助內容之審閱與檢驗，並針對題目與選填答案多次修改與重複確認，以確認題目與選項都是符合文句，確認工具具有內容效度。

三、資料分析

資料分析善用 NVivo12，對於所蒐集之資料持續進行搜尋比較分析、產生暫時主張、找尋證據檢驗、以及陳述主要發現，以達成本研究之目的。有關不同的教師年齡層、不同的教師學歷背景、與不同的教師學科背景和教師對於將

兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性的分析，亦將透過量化統計的方式呈現，以了解不同的教師年齡層、不同的教師學歷背景、與不同的教師學科背景和教師對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之看法的差異。

肆、研究結果

一、台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要障礙因素

根據研究發現，多數教師認為在兒童文學融入數學教學與學習時，最常遇到的障礙，包含(1)使用繪本融入教學很耗時、(2)需要花更多時間備課、(3)繪本內容與教學單元的合適性、(4)教學資源不足、(5)教師對數學繪本不熟、以及(6)教師對數學概念不熟等六項教師認為較為常見的阻礙類型。而在可以複選的調查中，其中以(3)繪本內容與教學單元的合適性最多人選擇，64.85%幾乎每位老師都會有選到這個選項，而(1)使用繪本融入教學很耗時和(4)教學資源不足、(5)教師對數學繪本不熟這三個選項，比例為 42.12%、42.73%和 42.12%，其次是(2)需要花更多時間備課選填比例為 35.76%，其中以(6)教師對數學概念不熟 19.70%選填比例最低。

二、台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要推動因素

目前問卷顯示，43.3%的教師曾經有使用過數學繪本融入數學課程中，而有 56.7%的教師表示並沒有使用過數學繪本在數學課程中。而有 89.09%教師認為以兒童數學繪本來作為引起動機藉以提升學生學習興趣是最主要想要將數學繪本融入課程的因素，並且有 82.42%的教師希望以數學繪本融入數學課的上課方式會讓數學課能更有趣，如果繪本內容與教學單元連結或有相關，則有 64.55%的教師會將繪本融入數學課程中。有 50.91%的教師認為目前教育趨勢是提升閱讀能力能有助於數學學習，會因為這個趨勢來將繪本融入數學課程中，而會目前政策推動的跨領域結合為目前政策所推動之方向來讓兒童數學繪本融入教學的教師則有 21.52%。顯示國小教師在教學數學時，會積極地想要讓學生更能理解數學概念或是讓學生在數學課程上得到認同感。教師在使用數學繪本融數教學時，最先考慮(2)繪本主題清楚明確和(3)繪本內容簡單易懂這兩個因素，分別有 83.94%和 81.52%的選答率，而繪本容易取得(76.36%)的程度也是教師考慮的因素之一，而只有 35.45%是會考慮透過其他老師推薦分享來使用繪本。從問卷調查也得知，教師在近五年內有參加過有關將兒童數學繪本融入數學教學的相關研習或是課程的比例很少，僅有 17%的老師曾經參加過而已，高達 76.7%的教師則是都沒有參與過相關的研習或是課程。

三、不同的教師年齡層、不同的教師學歷背景以及不同的教師學科背景對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性為何？

(一) 不同的教師年齡層與教師對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性

在填答問卷的教師中年齡介於 23-30 歲有 93 位，介於 31-40 歲有 66 位，介於 41-50 歲有 135 位，51 歲以上有 36 位。表 2 顯示不同教師年齡層的教師中，他們著重選填皆是以作為引起動機藉以提升學生學習興趣為最多選答，顯示不管哪個年齡層的教師，都希望透過不同的方式來增加學生學習數學的意

願。而希望有繪本的融入來讓數學課程更為有趣，是第二多教師選填的因素。第三多是(5)繪本內容與教學單元連結或有相關，除了 31-40 歲排序第四。

表 2 依年齡區分教師融入課程的原因填答率

為什麼您會 想要將兒童 數學繪本融 入課程中呢 (可複選)	(1)作為引 起動機藉 以提升學 生學習興 趣	(2)因跨領 域結合為 目前政策 所推動之 方向	(3)提升閱 讀能力能 有助於數 學學習	(4)希望數 學課能更 有趣	(5)繪本內 容與教學 單元連結 或有相關
23-30 歲	94.62%	25.81%	41.94%	87.10%	73.12%
31-40 歲	89.39%	24.24%	62.12%	84.85%	59.09%
41-50 歲	85.19%	13.33%	49.63%	77.04%	60.74%
51 歲以上	88.89%	36.11%	58.33%	86.11%	66.67%

表 3 顯示在不同年齡層的教師會在使用數學繪本融入數學課程時會考慮的因素，而在這些因素中，不同年齡層的教師認為繪本內容簡單易懂與繪本主題清楚明確是吸引他們使用的最主要因素，而如果該繪本容易取得也會增加融入數學課程的意願。多數教師也有提及到如果該繪本是有電子化或是有電子書的方式，則會大幅增加使用意願。

表 3 依年齡區分教師數學繪本融入課程考慮因素

您在考慮兒童數學繪本 融入課程中時，會考慮 哪些因素呢？(可複選)	(1)該繪本 容易取得	(2)繪本主 題清楚明 確	(3)繪本 內容簡單 易懂	(4)其他老師 推薦分享
23-30 歲	70.97%	86.02%	87.10%	38.71%
31-40 歲	75.76%	83.33%	86.36%	39.39%
41-50 歲	77.78%	82.22%	74.07%	30.37%
51 歲以上	86.11%	86.11%	86.11%	38.89%

在表 4 中顯示不同年齡層的教師在使用數學繪本融入數學教學時所遇到的阻礙，其中以繪本內容與教學單元的合適性為四個年齡層的教師都是最多的選答，23-30 歲有 70.97%，介於 31-40 歲有 63.64%，介於 41-50 歲有 62.96%，介於 51 歲以上有 58.33%，顯示這個阻礙在數學繪本融入數學課程中是很重要的因素。教師們也提到目前市面上的繪本主題與教科書的主題較少完全合適，而教師必須花費時間尋找符合數學單元主題的繪本。

表 4 依年齡區分教師認為數學繪本融入教學的阻礙

根據您的經驗， 您認為會有哪些 因素阻礙兒童數 學繪本融入教學 的課程中呢？(可 複選)	(1)使用 繪本融 入教學 很耗時	(2)需要 花更多 時間備 課	(3)繪本 內容與 教學單 元的合 適性	(4)教學 資源不 足	(5)教師 對數學 繪本不 熟	(6)教師 對數學 概念不 熟
23-30 歲	48.39%	37.63%	70.97%	45.16%	38.71%	16.13%

31-40 歲	45.45%	31.82%	63.64%	40.91%	43.94%	18.18%
41-50 歲	38.52%	39.26%	62.96%	37.78%	42.22%	19.26%
51 歲以上	33.33%	25.00%	58.33%	58.33%	47.22%	33.33%

(二) 不同的教師學歷背景(學士學位、碩士學位)與教師對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性

目前問卷填答教師最高學歷為學士的有 137 位，碩士有 180 位，博士有 12 位。在表 5 在學士與碩士學歷的教師中以作為引起動機藉以提升學生學習興趣為多填答，分別是 92.70%與 87.78%，其次一樣希望數學課能夠有趣，選填率為 86.13%和 79.44%。而在博士學歷的老師則是認為希望數學課能更為有趣(91.67%)為最多選填，其次為繪本內容與教學單元連結或有相關選填率有 83.33%，顯示不同學歷背景的教師在考慮繪本融入數學課程中，所考慮的因素不同。

表 5 依學歷區分教師融入課程的原因填答率

為什麼您會想要將兒童數學繪本融入課程中呢	(1)作為引起動機藉以提升學生學習興趣	(2)因跨領域結合為目前政策所推動之方向	(3)提升閱讀能力能有助於數學學習	(4)希望數學課能更有趣	(5)繪本內容與教學單元連結或有相關
學士	92.70%	23.36%	47.45%	86.13%	70.07%
碩士	87.78%	19.44%	53.33%	79.44%	59.44%
博士	75.00%	33.33%	58.33%	91.67%	83.33%

而表 6 顯示在教師考慮繪本融入課程時，不同的學歷背景都是考慮以繪本主題清楚明確為最多教師考慮因素。而表 7 學士學歷與碩士學歷教師皆認為數學繪本融入教學的阻礙是繪本內容與教學單元的合適性，博士學歷的教師則是教學資源不足為最大因素。在問卷中請教師試著舉例如果使用數學繪本融入數學課程的話，會使用哪些繪本時，41.86%的教師沒有任何想法，也沒有舉例書籍，而在有推薦書籍的教師中，其中以“魔數小子”最多教師推薦，這套書籍佔有推薦書籍教師的 28.65%的高比例，而這套書籍有多冊且每冊主題明確，並有搭配生活情境，符合教師們選擇繪本時最多人考慮的因素。

表 6 依學歷區分教師數學繪本融入課程考慮因素

5.6 您在考慮兒童數學繪本融入課程中時，會考慮哪些因素呢？(可複選)	(1)該繪本容易取得	(2)繪本主題清楚明確	(3)繪本內容簡單易懂	(4)其他老師推薦分享
學士	72.26%	86.13%	86.13%	35.77%
碩士	79.44%	82.22%	79.44%	35.56%
博士	83.33%	91.67%	66.67%	33.33%

而在阻礙方面，學士與碩士背景的教師以繪本內容與教學單元的合適性為做多教師選填，而博士背景教師則是認為教學資源不足為最多選填。

表 7 依學歷區分教師認為數學繪本融入教學的阻礙

5.7 根據您的經驗，您認為會有 哪些因素阻礙兒童 數學繪本融入 教學的課程中 呢？(可複選)	(1)使用 繪本融 入教學 很耗時	(2)需要 花更多 時間備 課	(3)繪本 內容與 教學單 元的合 適性	(4)教學 資源不 足	(5)教師 對數學 繪本不 熟	(6)教師 對數學 概念不 熟
學士	50.36%	41.61%	62.77%	43.80%	42.34%	16.79%
碩士	36.67%	32.22%	67.78%	40.56%	42.22%	20.56%
博士	33.33%	25.00%	50.00%	66.67%	41.67%	41.67%

(三) 不同的教師學科背景(文科與理科)與教師對於將兒童文學融入數學教學與學習中所可能有之主要障礙與推動因素之相關性

在整體填答教師中，非理工背景的教師為 208 人，理工背景教師為 115 人，另外還有 7 人填答不完整無法辨別。在學科背景不同下，表 8 中顯示教師們還是先以作為引起動機來做考慮將數學繪本融入課程中。表 9 顯示教師的學科背景不同，在考慮數學繪本融入課程最主要考慮的因素是以繪本主題清楚明確最多人優先考慮，而繪本內容簡單易懂和該繪本容易取得也是考慮前提。

表 8 依學科背景區分教師融入課程的原因填答率

為什麼您會 想要將兒童 數學繪本融 入課程中 呢？(可複選)	(1)作為引 起動機藉 以提升學 生學習興 趣	(2)因跨領 域結合為 目前政策 所推動之 方向	(3)提升閱 讀能力能 有助於數 學學習	(4)希望數 學課能更 有趣	(5)繪本內 容與教學 單元連結 或有相關
非理工背景	91.35%	23.56%	47.12%	79.81%	62.50%
理工背景	86.96%	18.26%	58.26%	86.96%	66.96%

表 9. 依學科背景區分教師數學繪本融入課程考慮因素

您在考慮兒童數學繪本融 入課程中時，會考慮哪些 因素呢？(可複選)	(1)該繪本 容易取得	(2)繪本主 題清楚明 確	(3)繪本內 容簡單易 懂	(4)其他老 師推薦分 享
非理工背景	79.81%	83.65%	82.21%	32.21%
理工背景	72.17%	84.35%	80.87%	40.00%

在非理工背景的教師中，有 16 位(7.69%)教師表示在修習師資培育課程階段時，曾有將兒童數學繪本融入數學課程中的相關課程，這 16 位教師年齡層皆在 23-50 歲以內。但是這 16 位教師中，僅有 5 位五年內曾有參加過有關將兒童數學繪本融入數學教學的相關研習或是課程，而有 8 位教師在數學課程中曾經使用數學繪本來搭配教學。在這 16 位教師中有教師沒有參加過數學繪本相關研習，也未曾將數學繪本融入課程中的有 4 位，這 4 位教師皆認為，在以繪本融入數學課程並不會比融入其他課程或是議題難，如果將數學繪本應用在數學課程中，能提升學生的學習興趣與動機。

在理工背景的教師中，有 18 位(15.65%)表示在修習師資培育課程階段時，曾有將兒童數學繪本融入數學課程中的相關課程。而 18 位教師中皆有國小教師證，在五年內曾有參加過兒童數學繪本融入數學教學相關研習或課程的僅有 4 位，而有 15 位教師在課程中使用數學繪本來教學數學概念。有 8 位教師覺得將繪本融入數學課程，會比繪本融入其他學習領域或議題還要難，有 10 位教師認為不會，教師們皆認為以繪本搭配數學課程可以提升學習興趣，增加數學課程的趣味性，而教師們會皆會在教學時的引起動機時候使用繪本，藉以提升學生的學習動機。

表 10 顯示不同背景的教師認為繪本融入教學最大的阻礙是繪本內容與教學單元的合適性，而非理工教師認為在繪本較多是在低年級的學生，而高年級數學課程計算單元較多並不適合使用，而市面上的繪本很少是針對數學科目單元來繪製，且數學概念較為抽象，很難用繪本來呈現。在理工背景的教師也是認為繪本在低年級數學教學時會是很好的引起動機，但是在高年級數學比較強調計算的熟練度，因此是否使用繪本就沒有這麼需要了。而教師也常常認為，目前市售繪本中，很少是數學相關，也因為如此，教師如果想要用數學繪本融入數學，就需要花很多時間來找尋適合的繪本。

表 10 依學科背景區分教師認為數學繪本融入教學的阻礙

根據您的經驗，您認為會有哪些因素阻礙兒童數學繪本融入教學的課程中呢?(可複選)	(1)使用繪本融入教學很耗時	(2)需要花更多時間備課	(3)繪本內容與教學單元的合適性	(4)教學資源不足	(5)教師對數學繪本不熟	(6)教師對數學概念不熟
非理工背景	45.19%	34.13%	62.98%	42.31%	40.38%	18.75%
理工背景	39.13%	39.13%	66.96%	45.22%	45.22%	20.00%

伍、結論

初步結果顯示台灣教師認為兒童文學融入數學教學與學習中的主要前四大障礙是(3)繪本內容與教學單元的合適性，其次是(1)使用繪本融入教學很耗時和(4)教學資源不足、(5)教師對數學繪本不熟這三個選項。主要前四大推動因素是教師認為以兒童數學繪本來作為引起動機藉以提升學生學習興趣是最主要想要將數學繪本融入課程的因素，其次是教師希望以數學繪本融入數學課的上課方式會讓數學課能更有趣，第三是如果繪本內容與教學單元連結或有相關，教師認為目前教育趨勢是提升閱讀能力能有助於數學學習。

不同年齡層的教師中，皆認為作為引起動機藉以提升學生學習興趣為最多選答。而希望有繪本的融入來讓數學課程更為有趣，是第二多教師選填的因素。不同年齡層的教師在使用數學繪本融入數學教學時所遇到的阻礙，其中以繪本內容與教學單元的合適性為四個年齡層的教師都是最多的選答。學士與碩士學歷的教師中以作為引起動機藉以提升學生學習興趣為多填答，而在博士學歷的老師則是認為希望數學課能更為有趣為最多選填，其次為繪本內容與教學單元連結或有相關，顯示不同學歷背景的教師在考慮繪本融入數學課程中，所考慮的因素不同。

參考文獻

- 鍾靜 (2012)。數學繪本的閱讀與教學。《國民教育》，52(3)，39-48。
- Alazzi, K. F. (2006). Perceptions of preservice teachers' toward children's literature. *Essays in Education, 18*, 1–16.
- Arizpe, E., & Styles, M. (2004). *Children reading pictures. Interpreting visual texts*. London: Routledge.
- Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 127–147.
- Clarke, D. (2002). Making measurement come alive with a children's storybook. *Australian Primary Mathematics Classroom, 7*(3), 9–13.
- Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Georgiou, A. (2010). The role of pictures in picture books on children's cognitive engagement with mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal, 18*(3), 275–297.
- Flevaris, L.M. & Schiff, J.R. (2014). Learning mathematics in two dimensions: A review and look ahead at teaching and learning early childhood mathematics with children's literature. *Frontiers in Psychology, 4*(5), 1–12.
- Frykholm, J., & Glasson, G. (2005). Connecting science and mathematics instruction: Pedagogical context knowledge for teachers. *School Science and Mathematics, 105*(3), 127–141.
- Gailey, S. (1993). The mathematics-children's literature connection. *Arithmetic Teacher, 40*, 258-261.
- Goldstein, J. E. (2007). *The Integration of Children's Literature into Mathematics* (Master's Thesis). Regis University, Denver.
- Jenner, D. M., & Anderson, A. G. (2000). Experiencing mathematics through literature: the story of Neil. *Teaching Children Mathematics, 6*(9), 544-547.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Prendergast, M., Harbison, L., Miller, S. and Trakulphadetkrai, N. V. (2019). *Pre-service and in-service teachers' perceptions on the integration of children's literature in mathematics teaching and learning in Ireland*. *Irish Educational Studies, 38*(2), 157–175.
- Smith, D. J. (2002). *If the world were a village: A book about the world's people*. Tonawanda, NY: Kids Can Press.
- Tucker, C., Boggan, M., & Harper, S. (2010). Using children's literature to teach measurement. *Reading Improvement, 47*(3), 154–161.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. & Elia, I. (2013). *The role of picture books in young children's mathematics learning*. In L. D. English, & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 227–251). Berlin: Springer.
- van den Heuvel-Panhuizen, M., Elia, I., & Robitzsch, A. (2016). Effects of reading picture books on kindergartners' mathematics performance. *Educational Psychology, 36*(2), 323–346.
- Ward, R. A. (2005). Using literature to inspire K–8 preservice teachers' future mathematics pedagogy. *The Reading Teacher, 59*(2), 132–143.
- Whitin, D. J., & Wilde, S. (1992). *Read any good math lately?: Children's books for mathematical learning, K-6* (Vol. 6). Portsmouth, NH: Heinemann.

Primary School In-service Teachers' Beliefs and Teaching Practice Concerning the Integration of Children's Literature into Mathematics Teaching and Learning

Der-Ching Yang¹ Cheng-Yi Chuang²

^{1,2}Graduate Institute of Mathematics and Science Education Department
of Education National Chiayi University

Abstract

The purpose of this study was to use the survey tool to conduct a large-scale questionnaire survey on domestic in-service teachers to explore the possible problems encountered by in-service teachers in primary schools regarding the integration of children's literature into mathematics teaching and learning. 330 elementary school teachers responded the questionnaire. The preliminary results showed that 64.85% of Taiwanese teachers believe that the main obstacle to integrating children's literature into mathematics teaching and learning is (3) the content of picture books and the suitability of teaching units are most chosen; (1) Using picture books to integrate into teaching is time-consuming and (4) Insufficient teaching resources and (5) Teachers are unfamiliar with mathematical picture books. The proportion of multi-time course preparation is 35.76%, of which (6) teachers who are not familiar with mathematical concepts have the lowest proportion of 19.70%. The main enablers were that 89.09% of teachers believe that using children's math picture books as motivation to enhance students' interest in learning is the most important factor for integrating math picture books into the curriculum, and 82.42% of teachers want to integrate math picture books into the teaching of mathematics class. It will make the math class more interesting. If the content of the picture book is linked or related to the teaching unit, 64.55% of teachers will integrate the picture book into the math course.

Key words: barriers; enablers; children's literature; teachers' belief.

日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」探討與教學研究

蘇意雯

臺北市立大學數學系 yiw@uTaipei.edu.tw

摘要

「遺題繼承」的傳統是促使日本傳統數學(和算)發展的一大因素，和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者，他的弟子、門人、或其他讀者在經過努力研究，解決了難題之後，一般要著難題解答之書，並在卷末更加深入的揭示問題，提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的研究。在本研究中，研究者分析相關和算文獻，整理「蟲蛀算」素材，並展示適合國小低年級教學現場運用的「蟲蛀算」教學實作。經由國小一年級兩個班級學生共 44 人參與的實作分析，本主題的實驗教學，獲得學生和家長之正向回饋，希望這些素材能為有心將數學史融入國小低年級數學教學的教師們，提供參考使用。

關鍵字：和算、數學史、遺題繼承、蟲蛀算

壹、緒論

在過去 40 年左右的時間裡，將數學史融入數學教育已經成為全世界新的教學實踐和具體研究活動的集中研究領域(Barbin, Guillemette, & Tzanakis, 2014)。學者們支持把歷史維度融入數學課程的看法，例如激發學生在數學上的興趣、讓我們對於概念和理論有更好的瞭解、多元文化的珍視、幫助數學學習等(Barbin, 2000；Fauvel, 1991；Furinghetti & Paola, 2003；Gulikers & Blom, 2001；Tzanakis & Arcavi, 2000；洪萬生，1984；蕭文強，1992)，時至今日，這些理由仍歷久彌新(Lim, & Chapman, 2015)。

Kline 認為一個時代的特徵在很大程度上與該時代的數學密切相關，通過把數學作為現代文明的一個有機組成部分，將能使我們對數學與現代文化之間的關係有全新的認識(Kline, 1953/1995)。日本鄰近臺灣，是國人旅遊勝地，青少年學子對於日本的影劇、動漫及電玩也不陌生。日本早期汲取中國文化，在江戶時代發展出屬於自己獨特的數學風貌，明治維新之後，積極學習及引進西方科學和數學知識，至今也在國際數學界佔有一席之地，獲得媲美諾貝爾獎的數學界大獎費爾茲獎 (Fields medals)的日本學者就有小平邦彥(1954 年)、廣中平祐(1970 年)、森重文(1990 年)三人(康明昌，1991)。在深入檢視日本建立數學教育現代化制度之前，不可避免地必須面對其算學傳統，也就是利用數學史的研究來探討一個文明的特色(洪萬生，2018)。

江戶時代的平民教育主要是在寺廟中的初等教育機構，也就是寺子屋、私塾以及鄉校等教育機構中進行(黃俊瑋，2018)。與同一時代的世界各地相比，江戶時代的日本數學普及是獨佔鰲頭的，通過寺子屋，基本算術普及到全國各地(城地茂，2009)。18 世紀中期至江戶末期這一百年間，許多重要和算家因自身的算學才能，受聘擔任算學師範，或仰賴開私塾教授算學謀求生計，顯現出江戶末期數學教育普及化，也反應出數學作為一種專門之學的專業化取向(黃俊瑋，2019)。從日本的社會脈絡中有系統地探查其數學發展，發掘其中蘊含之數學文化特色，從中搜尋可用之數學史料編製課程，相信所得之成果也應能對數學教育工作者有所啟發。

承上所述，本研究經由「蟲蛀算」問題的文獻分析，整理製作數學史學習工作單進行教學。研究問題如下所示：

- 一、「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題的相關文本是如何呈現？
- 二、國小低年級學生對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應為何？
- 三、國小低年級學生家長對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應為何？

貳、文獻探討

在以下篇幅中，研究者將對於江戶時代日本和算特色—「遺題繼承」的傳統，以及數學史融入數學教學加以探討。

「遺題繼承」的傳統，是促使日本傳統數學(和算)發展的一大因素，所謂的「遺題繼承」是指和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者，他的弟子、門人、或其他讀者在經過努力研究，解決了難題之後，一般要著難題解答之書，並在卷末更加深入的揭示問題，提出難度更高的問題，讓有心人士去研究解決，從而進一步更深入的研究(蘇意雯，2009)。日本數學家吉田光由在 1627 年出版《塵劫記》廣獲好評，由於盜版書猖獗，到了 1641 年新版的《塵劫記》，書末提出 12 個問題對有心向學的讀者挑戰，引發了和算家遺題繼承的風氣，使得遺題繼承就成為此時期重要的和算文化與數學知識活動(城地茂，2009)。例如澤口一之在 1671 年出版目前已知第一本正確了解和操作中國天元術的日文書籍《古今算法記》，書末就留下 15 題無法以天元術求解的問題。關孝和在 1675 年初出版《發微算法》，解決了《古今算法記》所有遺題，但只提供簡要解答，之後其弟子建部賢弘在 1685 年出版《發微算法演段諺解》，提供詳細註解，關孝和的改良代數才廣為人知(蘇意雯，2009)。有了「遺題繼承」的傳統，再加上算學私塾林立，一方面吸引更多算學人才，同時也發展出各種新問題，在社會

動因以及問題本身的內在困難度驅使之下，和算家開始學習、消納中算天元術，並研究新的方法、包含設立方程、消元與解複雜方程，用以解決各類難題(黃俊璋，2013)。在「遺題繼承」的傳統下，「蟲蛀算」問題也出現其中，正是本研究想要探討的文本。

蟲蛀算問題的題型，其實早於國內的考題出現，例如 91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題出現了數字被水漬弄髒的題型(如圖 1 所示)，無獨有偶到了 95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題也出現了收據汙損無法辨識數據的問題(如圖 2 所示)。諸如此類問題，在日本稱為蟲蛀算。由於日本古代的紙易於被蟲蛀食，也因此應運而生了這類的題型(平山諦，1956/2005)。

24. 小薰想在花園中，圍出一塊土地種玫瑰花，他以自己的位置為中心找出與他等距的甲、乙、丙三點，並測量此三點間的距離，紀錄如表(三)。表中有部分為水漬所弄髒，使得丙到甲的距離無法辨識。已知弄髒的部分為一整數，則此數字可能是下列哪一個？

- (A) 3
- (B) 5
- (C) 6
- (D) 8

表(三)

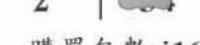
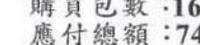
	甲到乙	乙到丙	丙到甲
距離 (公尺)	1.5	7.5	

圖 1 91 學年度第一次國中基測數學科第 24 題
 (<https://cap.rcpet.edu.tw/exam/9101/9101m.pdf>)

22. 表(一)為小美採買火鍋料的收據，但因汙損導致幾個重要數據無法辨識。根據表(一)判斷粉絲與茼蒿的數量差異為何？

- (A) 粉絲比茼蒿多 2 包
- (B) 茼蒿比粉絲多 2 包
- (C) 粉絲比茼蒿多 4 包
- (D) 茼蒿比粉絲多 4 包

表(一)

品名	售價(元/包)	數量(包)	金額(元)
綜合火鍋料	89	2	178
粉絲	39		
火鍋肉片		3	264
金針菇	25	3	75
茼蒿	30		
雞蛋	17	2	

購買包數：16
 應付總額：740

圖 2 95 學年度第二次國中基測數學科第 22 題
 (<https://cap.rcpet.edu.tw/exam/9502/9502Math.pdf>)

之前的九年一貫數學領域課綱中曾強調「教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化」(教育部，2008)，現今的十二年國教數學課綱也提到「數學史能夠幫助我們理解

數學發展在不同文化的差異」(教育部, 2018)。國際上, 早在 1976 年附屬於國際數學教育委員會 (International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]) 的數學史與數學教學的關聯之國際研究群 (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics [HPM]) 就已正式成立, 每四年固定召開一次全球性的會議, 利用數學史的研究成果, 以及數學史與數學教育的互動, 提升數學教師的教學品質與學生的學習成效(洪萬生, 1998)。

當初 HPM 小組關注和以之為目標的八點, 迄今為止在某種程度上已有所實現, 也仍然適用於今日, 此八點如後所列(Barbin, Guillemette, & Tzanakis, 2014): 一、促進該領域的國際聯繫和訊息交流; 二、促進和刺激跨領域探究; 三、更深入地了解數學的演變; 四、通過將數學教學及數學發展的歷史聯繫起來, 協助改進教學和課程; 五、為教師的利益製作相關素材; 六、方便獲取這些素材和歷史資料; 七、提高人們對數學史與數學教學的相關性的認識; 八、促進數學的文化通路。

承上所述, 毋庸置疑, 數學本身也是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化(劉柏宏, 2021)。藉由將科學放回到思想、社會和科技史中, 科學史可以在保持科學教學的一致性和提供有益的跨學科教學進路方面發揮重要作用, 也揭示了與眾多學科連結的可能(Karam, 2015)。對於教師來說, 在課堂上介紹歷史是比較不同科學方法的一種方式, 特別是實驗工作的意義和實現。通過這種方式, 他們可以將學生視為跨領域學習者(Barbin, Guillemette, & Tzanakis, 2014)。至於歷史的跨領域作用與教師培訓也很相關, 因為數學史提供了不那麼狹隘的數學觀點, 也提供材料與學校其他學科的教師一起工作。通過這種方式, 學生可以對數學有另一種看法, 因為他們看到了數學與其他領域的連結可能(Barbin, Guillemette, & Tzanakis, 2014)。在本研究中, 研究者除了分析在日本「遺題繼承」傳統下「蟲蛀算」問題的發展, 也展示學生及家長對於數學史融入於低年級數學課程的編排之反應。

參、研究方法

在本研究中, 研究者採取內容分析的方式進行日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文獻相關研究。內容分析也稱為文獻分析, 在許多領域的研究, 常需要透過文獻獲得資料, 因此內容分析法便具有研究價值與採用的必要, 主要是在解釋某特定時間某現象的狀態, 或在某段時間內該現象的發展情形(王文科和王智弘, 2006)。研究者從日本數學史相關文獻中, 分析「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」問題, 進行整理。

本研究的第二部份所展示的是將「蟲蛀算」素材編製成國小一年級學習工作單進行的實作成果。參與此教學實驗的兩班國小一年級學生分屬於不同學校, 共有 44 人, 分別由兩位教師進行一節課的教學。研究者將經由學生及家長之回饋, 檢視此份學習工作單之適用性。

肆、研究結果

一、「蟲蛀算」相關問題解析

「蟲蛀算」的問題首次被印刷出版正是因為前文所提及的「遺題繼承」之傳統。和算家中根彥循為了解答青山利永於 1719 年出版的《中學算法》的 12 條提問，於 1738 年出版了《竿頭算法》一書，並於解答之後又附上了 25 條問題，其中的第一問就是有關紙條被蟲蠹蝕的問題。

此題的文意是敘述偶然在方箱中得到一張陳舊的紙，打開閱覽只知道是分銀給 37 人，銀的總量上下被蠹蝕了只看到 23 匁(もんめ)，而且每個人所分到的銀量也被蠹蝕了，只看到最後是二分三釐(0.23 匁)，問總銀及每人所分銀各是多少。匁為日本以前的重量單位，1 匁為 3.75 克。這個問題的答案「總銀三貫五百二十三匁五分一厘，每人銀九十五匁二分三厘。」，在後來神谷保貞於 1745 年出版的《開承算法》中被解答出來。

隨著和算的蓬勃發展，很多流派也風起雲湧。1808 年宅間流五世松岡能一的《算學稽古大全》中，將題目設計成一張以賣米換取銀兩的字據，但此字據被蟲蛀了一個大洞，如圖 3 所示。字據的意思是「二百七十三石的米可換取銀□□□四十五匁，每石米要付銀□□匁。」。依照此題目所列出之算式為 $\square\square\square 45 \div \square\square = 273$ ，我們也可以改以乘法列式為 $273 \times \square\square = \square\square\square 45$ 。只要經過簡單的推算，就可以得出答案為代銀十七貫七百四十五匁，一石米需付銀六十五匁。

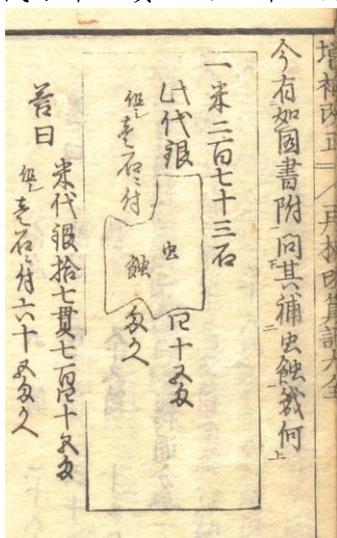


圖 3 《算學稽古大全》(1808)中的蟲蛀算問題

(<http://codh.rois.ac.jp/iiif/iiif-curation-viewer/index.html?pages=200021598&pos=124&lang=en>)

「蟲蛀算」引起人們感興趣的原因在於肯定是能夠解答的問題，而且問題的解有一個或兩個，即使有若干個也不會失去它的意義。此外就是「蟲蛀算」的問題比一目了然的問題更加吸引人(平山諦，1956/2005)。設計日本「蟲蛀算」之學習工作單，讓學生知曉江戶時代將每筆買賣記錄在帳簿中的商人，可以利用「蟲蛀算」計算出原本被賒帳的金額，除了體會異國文化的數學趣味，並進而探究解題，這正是課堂上可供運用的數學史素材。

二、教學實作流程及討論

(一) 「蟲蛀算」學習工作單的編制及教學實作

「蟲蛀算」學習工作單主要設計於二位數的加減單元，範圍集中在二位加一位或一位加二位或二位減一位，其中加法的和以及被減數是在 50 以內。設計理念主要是透過「蟲蛀算」讓學生學習解決二位數加減中部分量未知的問題。教學實作流程是學生每人一份學習工作單，教師先導讀介紹「蟲蛀算」的由來(如圖 4 所示)，接著請學生解決「蟲蛀算」問題中未知的部分(如圖 5 所示)，希望能透過蟲蛀的氛圍提升解題的樂趣。

兩位實驗教師利用一節課的時間讓學生完成學習工作單，並請他們填寫回饋單，由於實驗對象為一年級學生，因此回饋單除了勾選回答問題，也請他們寫一寫或畫一畫故事中印象最深刻的部分。實驗教師並請學生回去與家人分享故事，也請家長提供回饋。

蟲蛀算

日本江戶時代(大約 300 多年前)，商人們在做生意時，會將每筆買賣記錄在帳本中，稱為流水帳。過一段時間再依流水帳的記錄去收錢，但是，帳本放置一段時間後，有些會被子蟲吃掉，就可能會看不清原本記下的數字了，於是得動腦筋算出來，這就叫做「蟲蛀算」的由來。

有一位賣書的商人想查看一月三日下午賣出多少本書，可是帳本被子蟲吃了許多洞，數字看不太清楚了，請你幫忙想辦法算出來？



圖 4 「蟲蛀算」學習工作單的故事布置

消失的數字

年 班 姓名：

下面的算式，有些數字被蟲蛀了。聰明的朋友，請你動動腦，把它找回來吧！請在右邊的格子中寫出原來的算式和想法。

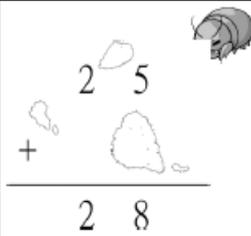
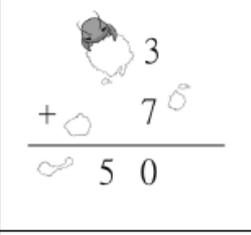
	原來的算式：	寫出你的做法或想法：
	原來的算式：	寫出你的做法或想法：

圖 5 「蟲蛀算」解題舉隅

(二) 學生及家長對於「蟲蛀算」數學史學習工作單之回應

在學生回饋中，針對「你覺得『蟲蛀算』的故事有趣嗎？」的問題，勾選「很有趣」的學生有 32 人，百分比為 73%；勾選「普通」的學生有 8 人，百分比為 18%；勾選「我不喜歡」的學生有 4 人，百分比為 9%。針對「你想再聽一些和數學有關的故事嗎？」的問題，勾選「很想聽」的學生有 28 人，百分比為 64%；勾選「都可以」的學生有 12 人，百分比為 27%；勾選「不想聽了」的學生有 4 人，百分比為 9%。

在家長回饋中，針對「您覺得這份學習單對孩子的數學學習有幫助嗎？」的問題，勾選「有的」之家長有 36 人，百分比為 82%；勾選「還好」的家長有 4 人，百分比為 9%；無家長勾選「沒有」選項，但未作答的家長有 4 人，占百分比為 9%。針對「對於老師所補充的故事系列，您覺得：」的問題，勾選「很棒」之家長有 40 人，百分比為 91%；無家長勾選「還可以」及「不需要」選項；未作答的家長有 4 人，占百分比為 9%。

伍、研究結論與建議

本研究為探討在「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本，以及展示於國小低年級的「蟲蛀算」問題教學實作。關於如何編製數學史教案包含學習工作單等問題，我們可以先經由普及讀物著手，對主題發展脈絡先有通盤概略的認識，接著再進一步搜尋原典資料，增添數學史文本，讓素材更為精緻豐富(蘇意雯，2021)。在本研究中，研究者先藉由平山諦(1956/2005)在《東西數學物語》一書中對於日本「蟲蛀算」的介紹，以及佐藤健一在《数の謎解きと算塾》對於「蟲蛀算」問題的探討，進而尋找和算書中的相關文本素材，進行文獻分析。

相對於針對國小一年級學生的 HPM 學位論文付諸闕如(蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏，2019)，從本研究所展示的「蟲蛀算」教學實作，我們發現此數學史文本對於一年級學生及家長都有正向的回饋，從中顯示數學史融入一年級數學教學也是可以努力的一個方向。

本研究分析日本「遺題繼承」傳統下的「蟲蛀算」文本相關史料，研究者希望能展現數學多樣豐富的面貌。另外從學生及家長的回應，我們也可得知「蟲蛀算」作為國小低年級數學素材的可能。

致謝

本文之得以完成，主要來自國科會專題研究計畫之部分研究成果，在此感謝國科會之補助。

參考文獻

- 王文科和王智弘 (2006)。教育研究法。台北：五南圖書公司。
- 洪萬生(1984)。數學史與數學教育。科學月刊，15(5)，371-375。
- 洪萬生(1998)。HPM 隨筆。HPM 通訊，1(2)，1-4。
- 洪萬生主編 (2018)。數學的東亞穿越。臺北市：開學文化。
- 康明昌(1991)。數學界的諾貝爾獎。數學傳播，15(1)，33-38。
- 黃俊瑋 (2013)。江戶時期和算發展之分期。中華科技史學會學刊，18，24-33。
- 黃俊瑋 (2018)。江戶時期的算學道場、和算教科書與數學專業化。收錄於洪萬生(主編)，數學的東亞穿越 (pp. 45-59)。臺北市：開學文化。
- 黃俊瑋 (2019)。十九世紀初期和算問題的發展與特色—以齋藤宜義的《算法圓理鑑》為例。中華科技史學會學刊，24，11-20。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：教育部。
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。臺北市：教育部。
- 蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏 (2019)。臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。臺灣數學教育期刊，6(1)，27-51。

doi:10.6278/tjme.201904_6(1).003

- 劉柏宏 (2021)。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。 **臺灣數學教育期刊**，**8** (1)，1-25。doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001
- 蕭文強(1992)。數學史和數學教育：個人經驗和看法。 **數學傳播**，**16** (3)，23-29。
- 蘇意雯(2021)。中小學數學史教案開發與實作研究。 **臺灣數學教育期刊**，**8** (1)，27-53。doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).002 (MOST 105-2511-S-845 -008 -MY3)
- 蘇意雯 (2009)。遺題承繼，串起中日代數史。 **當數學遇見文化** (頁 172-183)。臺北：三民書局。
- 平山諦(2005)。 **東西數學物語(東西数学物語)** (代欽譯)。上海：上海教育出版社。(原著出版於 1956)
- 佐藤健一(2016)。 **数の謎解き和算塾**。東京：研成社。
- 城地茂(2009)。 **日本數理文化交流史**。臺北：致良出版社。
- Kline, M. (1995)。 **西方文化中的數學** (張祖貴譯)。臺北：九章出版社。(原作出版於 1953 年)
- Barbin, É., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2014). History of Mathematics and Education. In S. Lerman(Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.333-342) Dordrecht: Springer. DOI <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Barbin, E. (2000). Integrating history: Research perspectives. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 63-90). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 3-6.
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, *32* (1), 37-41.
- Gulikers, I., & Blom, K. A. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 223-258.
- Karam, R. (2015). Thematic issue: the interplay of physics and mathematics: historical, philosophical and pedagogical considerations. *Sci Educ*, *24*(5-6), 487-805. DOI 10.1007/s11191-015-9763-9
- Lim, S. Y., & Chapman, E. (2015). Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *90*, 189-212.
- Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Document Analysis and Teaching Research on “Worm-Eaten Calculation” under the Japanese Tradition of “Inheriting Mathematics Problems”

Yi-Wen Su

Department of Mathematics, University of Taipei

Abstract

The tradition of "inheriting mathematics problems" is a major factor that promotes the development of Japanese traditional mathematics (Wasan). At the end of Japanese mathematicians' books, they put forward some unsolved mathematics problems. After other readers had worked hard to solve the problem, they generally wrote the book of solution to the problems, and at the end of the book, they will ask more difficult questions, and let those who are willing to study and solve them, so as to further and in-depth research. In this study, the researcher analyzed the relevant Wasan texts, sorted out the "worm-eaten calculation" materials, and demonstrated the "worm-eaten calculation" teaching practice suitable for elementary school lower grade students. Through the analysis of 44 first-grade students in two classes of elementary schools, the experimental teaching of this topic has received positive feedback from students and parents. The researcher hopes that these materials can be useful for teachers who are interested in integrating the history of mathematics into mathematics teaching in elementary school lower grades.

Key words: Wasan, history of mathematics, inheriting mathematics problems,
Worm-eaten calculation

臺灣、新加坡與芬蘭國中數學教科書函數單元教材之比較

鎖鳳琴¹ 楊德清²

¹ 南投縣鳳鳴國中 joycesuo0423@gmail.com

² 嘉義大學教育系數理教育碩士班 dcyang@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究採內容分析法，探討臺灣「A 版」、新加坡「新課綱」和芬蘭 WSOY「Laskutaito 版」之國中數學教科書函數教材在「單元數與佈題數」、「單元順序關係」與內容特色之差異。研究發現：函數單元數 Laskutaito 版最多，NSM 次之，A 版最少；總題數以 NSM 版最多，Laskutaito 版次之，A 版最少。函數單元順序上均為先線型再非線型函數。內容編排上以 A 版最為活潑，教材內容則三者各有特色。

關鍵字：比較研究、數學教科書、教科書分析、特色

壹、緒論

一、研究動機與背景

研究發現教科書內容的良窳與編排之脈絡情形，將會直接影響教師的教學以及學生的學習成效 (Fan et al., 2013; Stein et al., 2007; Tarr et al., 2008; Törnroos, 2005)。此外，教科書所提供的數學內容將直接影響學生的學習機會，進而影響學生的數學成就 (Cai et al., 2011; Ding & Li, 2010; Grouws et al., 2018; Stein et al., 2007; Tarr et al., 2008)。由此可知，教科書在學生的學習過程中扮演重要之角色。

函數在代數單元中扮演一個非常關鍵的地位，同時函數亦被視為學習數學以及未來學習進階數學的關鍵主題 (Brenner et al., 1997; Llinares, 2000; Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008)。然而相關研究指出函數的學習相對於其他數學主題而言是比較抽象且較不易理解的 (NCTM, 2000; Sfard, 1995; Stacey & MacGregor, 1997)。教育部 (2018) 數學課綱指出函數的教學應透過多種生活實例的呈現以讓學生了解函數的語言與函數的概念。由此可見教科書內函數內容的呈現方式將影響學生的學習；然而在過去教科書的相關研究中，針對「函數」這個主題進行教科書內容的比較分析是很少的，因此引發本研究選擇芬蘭、新加坡與臺灣的教科書進行比較。本研究之研究問題如下：

1. 比較三個國家七~九年級數學教科書代數主題中「函數」單元數與佈題數以及與其他代數單元順序關係有何異同？
2. 比較三個國家七~九年級數學教科書代數主題中「函數」內容編排的特色為何？

貳、文獻探討

一、台灣、新加坡、芬蘭函數課程綱要分析

台灣「函數」單元歸類第四階段七和九年級 (教育部, 2018)。導入函數概念之前，在七年級的教材中先介紹一元一次方程式、二元一次方程式及圖形，而後導入線型函數的概念與圖形，將其與二元一次方程式的圖形做連結；

而後連結八年級一元二次方程式的概念及圖形。在九年級時進入二次函數的概念並搭配繪製圖形讓學生將函數與圖形做連結以便瞭解最大值及最小值的概念，最後帶入生活實例使其能運用在日常生活中。新加坡是在七年級時進入函數和圖形的主題，由座標平面圖形切入，將平面上座標以數對的形式形成集合的概念再導入變數的線性關係並討論圖形呈現與斜率的關係；接著八年級時由圖形延續這個主題，討論二次項係數與開口方向、大小的關係以及函數的極值和圖形的對稱性 (Ministry of Singapore, 2007)。芬蘭的課程綱要中由七年級開始編排函數單元，由觀察變數之間的相關性連結函數的概念形成數對集合；在九年級將函數與直角座標平面連結並探討圖形中無用的數對、極值、呈現遞增或是遞減以及變數間正反比的關係 (Finnish National Board of Education, 2004)。

三個國家介紹函數概念的切入點不同，台灣從生活連結函數、新加坡由座標連結函數；而芬蘭則是藉由觀察兩個變數之間的關係連結函數的觀念。三個國家均有結合函數與座標平面圖形，並觀察圖形與函數之間的關係。新加坡連著兩個年級編排函數的課程，台灣與芬蘭均將函數的課程分佈在七年級及九年級。新加坡在線型函數有探討斜率與圖形的關係，台灣與芬蘭在課程綱要中並無要求「斜率」觀念建立。僅有芬蘭先建立函數的概念，再進行函數的探討。台灣在函數的應用部分有特別列出，其他兩國雖無列出但教材中亦有編排應用問題。台灣與新加坡有標示授課年級，芬蘭則為範圍，可視為給予教師較大的授課彈性。台灣詳列各年級應該學習的目標及能力，讓教師在編排授課內容時有清楚依循的規則。

二、函數教科書相關研究

Senk、Thompson 與 Wernet (2014) 在研究中選取五個美國高中，從中挑選十個配對的班級就代數二的預設課程、實際課程以及學習成就來進行研究，探討教科書提供的學習機會與學生成就之間的關係。研究中發現預設課程中代數課程覆蓋率由 58%~77%，實際課程覆蓋率則為 29%~86%，可看出預設課程與實際課程差異頗大，另由後測結果中發現雖預設課程覆蓋率與學習成就呈現微負相關，但實際課程內容與學習成就間發現有明顯正面的影響。Vilma mesa (2004) 對 15 個國家中 24 套教科書的函數單元進行探討，其研究中發現幾乎所有的教科書中的題目旁或多或少都附有與內容相關的圖片或照片，但僅做為插圖或是豐富內容之用並沒有提供解題的資訊；學者將佈題分為六大類：符號規則、數對、社會資料、物理現象、設計圖像以及其他，其中比例最高 (20%) 的是運用符號規則。其中有 25% 的教科書中僅有一種類型，超過一半 (54%) 有 2 或 3 種，有 20% 含有 4 種以上的類型。

參、研究法

本研究採內容分析法，在量化分析包括了函數單元數、佈題數、函數主題在各年級中的分佈情況；在質性分析則比較各國特色之差異。

一、研究對象

(一) 台灣 A 版數學教科書

「A 版數學教科書」七至九年級教材中，七年級有 8 個單元、八年級有 8 個單元、九年級有 6 個單元，總計 22 個單元。本研究將以「A 版數學」教科書中的兩個函數單元作為研究對象。

(二) 新加坡「新課綱數學」NSM

「新課綱數學」共四冊，其中一~三冊與臺灣七至九年級相對應，第一冊（七年級）有 16 個單元、第二冊（八年級）有 12 個單元、第三冊（九年級）有 13 個單元總計 41 個單元。本研究將以「新課綱數學」教科書一~三冊中的三個函數單元作為研究對象。

(三) 芬蘭「Laskutaito」數學教科書

「Laskutaito」數學教科書七至九年級教材中，七年級有 13 個單元、八年級有 84 個單元、九年級有 13 個單元，總計 110 個單元。本研究將以「Laskutaito」數學教科書中的六個函數單元作為研究對象。

二、內容分析架構

(一) 分析單位

本研究之分析單位與類目是參考國內外相關研究(Yang & Sianturi, 2022; Zhu & Fan, 2006)，以「題」作為最小分析單位。本研究「題」的定義如下：

1. 題目的敘述只包含一問題則計數為一題。如圖 1，

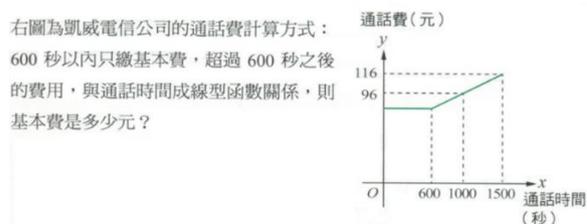


圖 1. 計數為一題之題目

資料來源：A 版數學國中七年級下冊 (2015)。臺北：A 出版事業股份有限公司。頁 174。

2. 題組式題目，每小題計數為一題。如圖 2，問題中共有 3 小題，因此計數為 3 題。

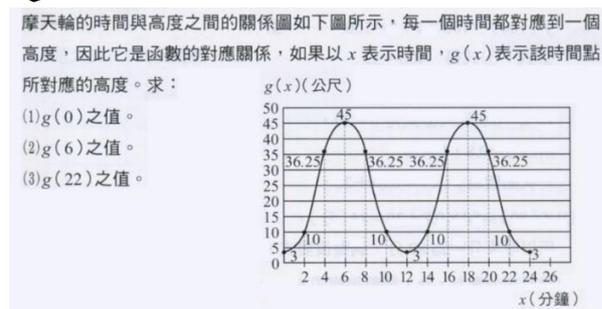


圖 2. 計數為 3 題之題組

資料來源：A 版數學國中七年級下冊 (2015)。臺北：A 出版事業股份有限公司。頁 172。

在「單元數與佈題數」方面則依據各套教科書在內文之呈現分別計數，在「單元順序關係」以及特色部分採質性分析法以深入探討各教科書之差異。特色之定義則依據 Yang (2018) 之說明，某些特殊內容出現在某一國家之教科書內，但是未出現於其他教科書之內容內，則定義為該教科書之特色。

三、信效度

信度檢驗：本研究採用「評分者信度」，信度值為 0.94。效度檢驗：本研究在分析架構之發展過程中，參考三國數學課程綱要與國內外相關研究（楊德

清，陳仁輝，2011；1996；Yang, 2018；Zhu & Fan, 2006）所使用之分析工具，以確立本研究之分析架構；並與數學教育專家討論修正，分類編碼前，亦與評分員做充分的討論與溝通，以建立本研究之效度。

研究工具將以研究者之前所開發之兒童文學與數學教學開放式問卷調查表作為研究工具。本正式開放式問卷調查工具將採線上回答的方式，邀請國內小學老師上網填答以蒐集資料；若教師無法上網填答則可以採用紙本填答的方式進行。

肆、研究結果

一、函數與其他代數單元順序與函數佈題數之比較

函數單元在代數單元中所佔的比例。A 版的函數單元比例為 20%，NSM 版的函數單元比例為 25%，Laskutaito 版本的函數單元比例為 50%。其 A 版的函數單元比例雖然最低但也佔了五分之一，Laskutaito 版的函數單元比例更佔了代數單元的一半，就比例上來看，三個國家均相當重視函數。

在函數單元分佈狀況，A 版 2 個單元分別分佈在七、九兩個年級、NSM 版 3 個單元分別分佈在七、八兩個年級、Laskutaito 版 6 個單元分別分佈在七、九兩個年級。三個版本在七年級時均只有一個函數單元，NSM 版在八年級有 2 個單元，於九年級並無編排函數單元；A 版與 Laskutaito 版其餘單元均分佈於九年級，於八年級並無編排函數單元，與 NSM 版恰好相反。其中 NSM 版中所有的函數單元編排均結合圖形，但較特別的是 NSM 版九年級中有一單元名稱為「線型圖形與應用」與八年級「二元一次線型方程圖形」單元名稱雖然相似，但根據新加坡課綱可知並不屬於函數單元，學者們於討論函數單元時需稍加注意。雖然三版本均分佈於兩個年級，就寬廣度而言，以 Laskutaito 版本為最高，共有 6 個單元，其中有兩個單元並不是所有主題均討論函數，各僅有一主題存在其中；就集中程度而言，亦是 Laskutaito 版本最高，6 個單元中有 5 個單元集中分佈在九年級，並不是均勻分配，或許 Laskutaito 的編者們認為九年級學生之心智發育較為成熟，較適合於此年級學習函數，因此將函數單元大量集中於此年級。

藉由觀察單元編排的脈絡可以了解各國數學概念編排順序，且概念編排順序又會影響學生數學概念的發展，下面就各版本函數單元編排的脈絡進行分析探討。

三版本中唯有芬蘭是在方程式的單元前先介紹函數概念，臺灣 A 版與新加坡 NSM 版均是先介紹方程式再進入函數單元，研究者認為這或許是因東西方文化上的差異所造成，先建立函數的概念再引進方程式比較容易讓學生聯想方程式只是表現函數的一種方式，但不是唯一的方式，而且函數並不一定僅是一個方程式所能表現的；NSM 版及 A 版在代數單元中的編排將方程式與函數單元排得如此緊密，讓學生在學習函數時容易直接套入方程式概念，雖然在學習時會感覺很順利，但是卻容易造成讓學生感覺方程式等同函數的印象，再加上 NSM 版及 A 版兩者在函數單元使用的圖形均是直線，更容易讓學生有這樣的聯想，對於日後高中甚或大學的學習影響甚大。

NSM 版及 A 版在進入「函數」前均先教授「直角坐標平面」，A 版由單元名稱便可看出，NSM 版則是將其編至「函數及其圖形」單元中，而 Laskutaito 版在介紹函數概念後亦在七年級也同樣介紹直角坐標平面系統，NSM 版中各函數單元更是跟圖形密切相關，可見諸版本之編者們均認同圖形可增進函數概念之理

解與發展，此與丁斌悅（2002）研究中發現圖形可幫助函數概念發展的觀點一致。

就線型函數與非線型函數順序而言，三個版本均先介紹線型函數（一次函數）再非線型函數（二次函數）。在線型函數部分，Laskutaito 版雖說有一主題先於方程式單元，但僅有一主題且為函數概念之鋪陳；在九年級亦另有一線型函數單元。A 版與 NSM 版在單元編排上則可明顯看出也是先介紹方程式並再進入線型函數單元，Laskutaito 版方程式單元與線型函數單元順序為：代數表達式、方程式（七年級、含二元一次方程式）、方程式（八年級、含二元一次方程式）、函數、線型函數、比例。NSM 版方程式單元與線型函數單元順序為：代數方程式以及簡單不等式、函數及其圖形。A 版方程式單元與線型函數單元順序為：二元一次方程式的圖形、線型函數。由此看來，在線型函數部分，方程式與線型函數的編排上頗有一致性。

在非線型函數部分，Laskutaito 版聚焦在非線型函數單元，其順序為：非線型函數、函數應用。NSM 版方程式單元與非線型函數單元順序為：二次函數的圖形、二次方程式的解。A 版方程式單元與非線型函數單元順序為：一元二次方程式、二次函數。Laskutaito 版試圖將焦點全部放在觀察非線型函數圖形，藉由觀察圖形得到題目要求的未知數解、函數值、極值、開口方向…等。NSM 版先讓學生觀察非線型函數的圖形，讓學生藉由觀察圖形得到該題需要的未知數解、函數值、極值、開口方向…等，九年級時再藉由「二次方程式的解」讓學生學會如何使用算式求得答案。A 版則是在八年級的「一元二次方程式」單元中先讓學生學習如何藉由計算的方式求得未知數的解，九年級時在「二次函數」單元再結合圖形讓學生了解函數值、極值、開口方向…等概念，雖然 A 版在「一元二次方程式」單元中已經教計算的方式，在「二次函數」單元中仍然使用非常多篇幅介紹圖形，可見其還是非常重視圖形的功能。

由表 1 中可看到總題數以 NSM 版為最多（1005 題），Laskutaito 版次之（807 題），A 版最少（510 題）；雖然由表中我們知道 A 版及 Laskutaito 版的函數單元並無包含直角坐標系統，但經由粗步估算若將 NSM 版中如何繪製直角坐標系統的題目刪除，其題數仍超過 Laskutaito 版的 807 題，近乎 A 版的二倍。

在題數分配的比例上，相較於 A 版將函數概念直接編入線型與非線型函數單元，Laskutaito 版及 NSM 版在函數概念理解部分均編有獨立的單元。Laskutaito 版在函數概念理解（代數表達式、函數）有 167 題（20.7%），線型函數（線型函數、比例與線型函數）有 411 題（50.9%），非線型函數（非線型函數、函數應用）219 題（27.1%）。NSM 版在函數概念理解（函數及其圖形）有 343 題（34.1%），線型函數（二元一次線型方程圖形）有 361 題（35.9%），非線型函數（二次函數的圖形）有 301 題（30%）。A 版僅分為線型與非線型函數兩部分，其函數概念及定義均於各單元中各自闡述，其中線型函數（線型函數）有 108 題（21.2%），非線型函數（二次函數）有 402 題（78.8%）。

三版本中函數單元題數分配得最為均衡的是 NSM 版，但其題型仍多集中在線型函數（包括函數及其圖形及二元一次線型方程圖形）共有 704 題，比例更高達了 70%。Laskutaito 版在函數概念的理解以及函數應用部分特別使用不規則的圖形（如圖 3），讓學生對函數中對應的概念能夠更清晰，而不是只能接受直線或二次函數的平滑曲線，線型函數部分的題數及比例（411 題、50.9%）大幅領先非線型函數（219 題、27.1%），這情形與 NSM 版呈現共同的趨勢。與前兩者相反的，A 版將大量的題目設計於二次函數，其題數更為線型函數的三倍以上。

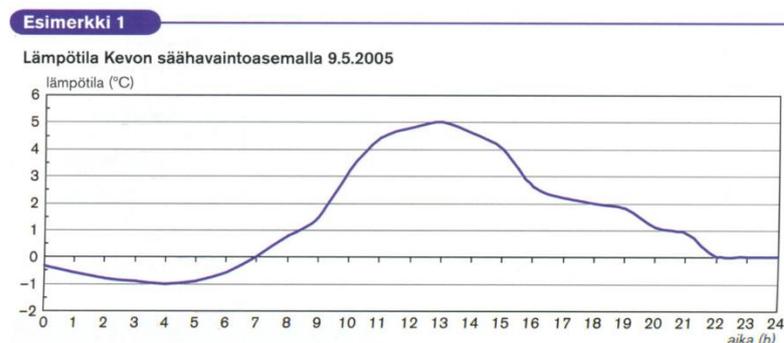
研究者猜測 Laskutaito 版及 NSM 版的線型函數題數較多可能是因為生活中學生們接觸線型函數的機會較多，希望藉由學生較熟悉的部分建立並穩固函數的概念及應用；而 A 版在二次函數部分著墨較多可能因為學生在日常生活中較少看到二次函數的圖形，以目前的年齡層也較少有機會運用二次函數，因此希望藉由大量的類似題開闊學生的視野，讓他們體會生活與數學是真實連結在一起的。

表 1 三版本數學教科書函數各單元題數

版本 年級	A 版 (n=510 ^a) n ^b (%)	NSM (n=1005 ^a) n ^b (%)	Laskutaito (n=804 ^a) n ^b (%)
七年級	線型函數 108 (21.2%)	函數及其圖形 343 (34.1%)	代數表達式 36 (4.5%)
八年級		二元一次線型方程圖形 361 (35.9%) 二次函數的圖形 301 (30.0%)	
九年級	二次函數 402 (78.8%)		函數 131 (16.2%) 線型函數 377 (46.7%) 比例與線型函數 34 (4.2%) 非線型函數 137 (17.0%) 函數應用 92 (11.4%)
總題數	510	1005	807

註：^a該版本總題數。^b各單元題數。*百分比=(該版本各單元題數)÷(該版本總題數)並以四捨五入法取至小數第一位。

圖 3. Laskutaito 9 函數概念題目中圖形



資料來源：Laskutaito 9 (2009). Finland: WSOY. p. 68.

二、各國內容編排與特色之分析比較

三套教科書所包含的主體中，Laskutaito 版除課本外亦包含習作中的深度

練習和家庭作業，而 NSM 版及 A 版則是將兩者分開。目錄編排的上 Laskutaito 版及 NSM 版在層次上有差異，但在目錄的呈現均列出每一個主題及對應的頁數，讓學生可以很清楚的了解整個單元包含哪些主題，複習時也能夠容易地找到要查詢的主題；A 版的目錄呈現上較為整潔，僅有單元、子單元及頁碼，雖然課文內有列出主題，但學生必須翻查尋找，在複習時較為不便。在單元一開始，NSM 版及 A 版均明確寫出該單元名稱，並使用一頁設計情境題作為單元開始的鋪陳，引起學生的學習動機；而 Laskutaito 版則是直接進入主題，Laskutaito 版在部分主題中會提供須具備的先備知識以利學生的學習，NSM 版在部分主題中會有一些先備知識的提醒，A 版則是每個單元都有提供「溫故知新」在單元首頁，協助學生先稍作複習。

Laskutaito 版每個主題都會搭配多題的練習題，NSM 版是 1~3 個主題會搭配 1~2 頁練習題，A 版則是每個例題會搭配 1~2 題的隨堂練習；在子單元最後 Laskutaito 版及 A 版有設計整合的練習題，NSM 版的整合練習題則是位於單元最後；除了基本題與整合題外三個版本也都相當注重學生的邏輯與解題能力，Laskutaito 版每個主題都會搭配「運用題」還有一主題為「靈活應用」，NSM 版於課文中有「思考時間」，A 版是在課文中搭配「探索活動」並在單元後設計一頁「自我挑戰」，這部分的題目都是比較具有挑戰性，讓學生藉由較深入的思考釐清教材中具有數學概念並幫助奠定堅實的基礎。Laskutaito 版及 NSM 版在函數教材中均有「斜率」主題，並在題目中運用估算的概念，更結合了不等式、時事、天文…等領域；A 版與 Laskutaito 版於題目中也結合了比例的概念與自然的現象；另外 NSM 版與科技結合，鼓勵學生使用計算器或是電腦軟體繪圖；A 版則在題型中放入離散的概念。整體而言，Laskutaito 版的版面編排設計最為單純、一致，A 版的版面編排設計最為活潑。

在問題種類部分，三版本的問題均可分為例題與練習題兩大類，Laskutaito 版的例題數遠少於 NSM 版及 A 版，相對的，練習題的數量則遠高於另兩版本。教師的教學活動中均始於例題終於練習題，例題通常具有示範及建立概念的效果，練習題則讓學生有更多的機會加深概念。Laskutaito 版及 A 版在例題設計的方式較為相近，均會提供詳細的解說及圖表輔助，A 版更是在重要的概念上用「Note」加以提醒，讓學生在學習時有正確的概念；NSM 版例題中的「範例」與另兩個版本相同，亦有「Note」的設計，不過在「探勘活動」中的部分例題並沒有提供解答；雖然完整的解題過程與解說能讓學生縮短學習摸索的時間或是在複習時能夠較為清楚或是自學時也較為容易，但是也限制了老師在教學上的自主性，或是學生對於問題的不同想法，也容易讓學生只重視解答卻忽略思考過程的重要性，且例題是在建立新數學概念的初期，若學生習慣單向的吸收而不思考，對於未來更加艱深的知識學習上並無助益。

肆、結論

一、函數教材單元數、佈題數及其與代數單元順序關係有差異

Laskutaito 版代數單元比例較高，是將函數以主題的方式放到代數表達式、比例這些單元中，而在主題上僅有一主題在七年級，函數教材配置重心在九年級，研究者認為此舉可能因為九年級學生之腦部發育較為成熟，較容易理解抽象性的概念。NSM 版則是將教材分別配置於七、八兩年級，而代數主題與函數概念理解都是佈題數是三版最高。Laskutaito 版及 NSM 版希望藉由學生由生活中較常接觸的線型函數建立函數的概念及應用。A 版在代數單元是三個國家中比較低，而函數單元在七年級與九年級，很明確的在兩個年級分別配置線

型與非線型函數，也同樣將較抽象性的概念設計在九年級，而佈題數是三版最少，不過在非線型函數是已近總題數八成，該版很重視非線型函數單元，是藉由大量的例題與練習題讓學生能夠盡量理解較抽象的非線型函數概念。

三版本在單元順序函數教材編排上有一致性，均先介紹線型函數再非線型函數，但 NSM 版及 A 版在函數單元前均先建立方程式以及直角坐標平面的概念，僅有 Laskutaito 版是直接進入函數的單元。研究者認為先建立函數的概念再引進方程式比較容易讓學生聯想方程式只是表現函數的一種方式，但不是唯一的方式；方程式單元在前雖然可以讓學生在學習時可直接套用其概念，但是卻容易造成讓學生感覺方程式等同函數的印象；非線型函數部分，Laskutaito 版與 NSM 版則是直接進入函數單元，僅有 A 版一樣是先進方程式再接函數單元；可見就方程式及函數兩個大單元的順序上 Laskutaito 版及 A 版分別有一致的想法，但 NSM 版卻是相反的。

二、內容編排與特色：Laskutaito 版的版面編排設計最為簡約，A 版的版面編排設計最為活潑，三者各具特色。

Laskutaito 版在目錄的編排上較為詳細，可以清楚的知道單元中包含哪些主題，複習時也較容易查詢所要的主題，而在單元開始時直接進入主題，只有部分主題有設計應具備之先備知識，並有明確顯示學習目標，且在課文中有明確標示與內文連結的習作頁數方便學生練習及複習，並在題目中結合了不等式、時事、天文…等領域。NSM 版在目錄編排也能清楚顯示單元與主題，而在單元開始都會有情境題作為鋪陳來引學生學習動機，並與科技結合，鼓勵學生使用計算器或是電腦軟體繪圖。A 版在目錄編排比較簡約，每個單元均會有「溫故知新」協助學生先複習，並在課文內穿插「小燈泡」作為補充。

參考文獻

- A 出版事業 (2015)。國民中學數學課本第一、五冊。A 出版事業股份有限公司。
- 丁斌悅 (2002)。國二學生學習線型函數時的概念表徵發展研究〔未出版之碩士論文〕。國立臺灣師範大學。
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要。教育部。
- 楊德清、陳仁輝 (2011)。臺灣、美國和新加坡三個七年級代數課程發展學生數學能力方式之研究。科學教育學刊，19 (1)，43-61。
- Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Reed, B. S., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663-689.
- Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of the distributive property in US and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(2), 146-180.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, 45, 633-646.
- Finnish National Board of Education. (2004). *National Core Curriculum for Basic Education 2004*. Accessed December 5, 2016. http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curricu

la_for_basci_education.

- Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and teaching*, 6(1), 41-62.
- Mesa, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 255-286.
- Ministry of Education of Singapore (2006). *Secondary Mathematics Syllabuses*. Singapore: Ministry of Education, Curriculum Planning and Development Division. Accessed August 20 2018.
<http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses>.
- Moyer, J. C., Cai, J., Wang, N., & Nie, B. (2011). Impact of curriculum reform: Evidence of change in classroom practice in the United States. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 87-99.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, 27, 42.
- Senk, S. L., Thompson, D. R., & Wernet, J. L. (2014). Curriculum and achievement in Algebra 2: Influences of textbooks and teachers on students' learning about functions. In *Mathematics curriculum in school education* (pp. 515-540). Springer Netherlands.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of mathematical behavior*, 14(1), 15-39.
- Stacey, K. and MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teachers*, 90(2): 110-13.
- Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 455-488.
- Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2008). From the written to the enacted curricula: the intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191 - 201.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, Ó., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247 - 280.
- Teh, K. S., & Loh, C. Y. (2007). *New syllabus Mathematics 1 (6th ed.)*. Singapore: Shinglee Publishers Pte. Ltd.

- Teh, K. S., & Loh, C. Y. (2008). *New syllabus Mathematics 2 (6th ed.)*. Singapore : Shinglee Publishers Pte. Ltd.
- Teuvo, L., Raija, L.H., Erkki, L.A., Timo, S., Riitta, S., & Kirsi, T. (Eds.). (2009). *Laskutaito 7 (6th ed.)*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Teuvo, L., Raija, L.H., Erkki, L.A., Timo, S., Riitta, S., & Kirsi, T. (Eds.). (2009). *Laskutaito 9 (6th ed.)*. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- Törnros, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*(4), 315-327.
- Zhu, Y., & Fan, L. H. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609-626.

A comparative study of the function unit of mathematics textbooks in secondary school among Taiwan, Singapore and Finland

Feng-Chin, So¹ Der-Ching Yang²

¹ Fong-Ming Junior High School

²Graduate Institute of Mathematics and Science Education
Department of Education National Chiayi University

Abstract

This study applied the content analysis method to compare the differences of the mathematical contents, the distributions on function unit, and characteristics among A textbook in Taiwan, New Syllabus Mathematics in Singapore, and Laskutaito in Finland. Results show that Laskutaito includes the most function units, A textbook has the least function units. NSM includes the most questions, A textbook has the least. All of the textbooks teach the linear function and then non-linear function. In addition, there are different characteristics among the three textbooks.

Key words: comparative study; mathematics textbooks; textbook analysis, characteristics

看得到的檢定誤差-模擬與學習工具並行的教學設計

楊菁菁¹ 林震燦²

¹逢甲大學應用數學系 yangcc@mail.fcu.edu.tw

²逢甲大學應用數學系 linjt@fcu.edu.tw

摘要

本研究導入設計式教學於二項分布檢定，設計以提問、實時模擬實驗，實驗分析與理論對照，再介紹理論的教學模式。於 110 學年統計學實施時，雖因疫情而實施線上線下混成授課，但實時模擬成功提升學生課堂專注，且學生實際有感檢定錯誤的發生。本研究開發的教學平台，可做同步、非同步、或混和兩種教學之用。以機率論為基礎，比較 109 與 110 學年，109 學年學生機率論二項分布測驗成績，雖顯著高於 110 學年，但 110 學年學生統計學二項分布檢定的測驗成績，顯著高於 109 學年。在較高層次檢定能力方面，以檢定誤差評論檢定為例，兩學年高能力群達成比例差異不大，但 110 學年後半段學生達成比例明顯提升。

關鍵字：二項分布檢定、設計式教學、Geogebra

壹、緒論

一、研究動機與背景

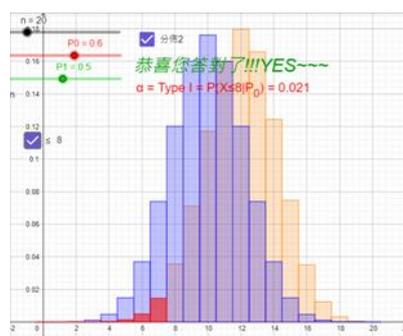
假設檢定為大學統計學中重要的一環，傳統教學下，較難建立學生檢定誤差的概念。例如，建立二項分布檢定時，請學生就檢定型 I 誤差的大小，評論檢定規則時，學生以型 I 誤差與 H_0 中的 p_0 做比較，顯示學生的機率觀念薄弱，也不了解型 I 誤差的意義。為此，重新設計教學流程，將檢定誤差的教學分為(1)機率分布概念建立(2)檢定規則概念建立(3)檢定誤差概念建立(如圖一)。其中，前兩部分，已完成應用 Geogebra(以下簡稱 GGB)設計的視覺化學習工具，學生利用學習工具了解機率分布並能正確建立檢定規則(Yang, 2019; 楊菁菁, 2021)，也能以學習工具學習於紙本機率表中完成查表(Yang, 2021)。建立學生基本能力之後，本研究著眼於學生檢定誤差概念的建立，與更進一步能以檢定誤差評論檢定規則。



圖一 檢定教學步驟

本研究採用設計式教學法設計教學流程(Kolodner, Crismond, Gray,

Holbrook & Puntambekar, 1998), 以問題帶出相關的實驗, 從實驗結果導入分析流程, 再引入理論對照實驗結果分析。檢定誤差為檢定規則做出錯誤判斷的機率。以檢定的型 I 誤差為例, 為了讓學生看到錯誤判斷的發生, 本研究設計課堂中的實驗, 實驗導入二項分布模擬網頁, 學生輸入銅板投擲次數與對應虛無假設的正面機率, 得到模擬之正面次數, 以設定之檢定規則判斷檢定為接受或拒絕虛無假設, 並以表單收集模擬的正面次數與判斷結果。此設計提升學生課堂參與, 並可從正面次數, 檢視學生是否依檢定規則做出判斷。接續以自行開發的 GGB 二項分布網頁版學習工具(如圖二所示), 視覺化在虛無假設下, 拒絕虛無假設的機率, 並與課堂模擬時拒絕虛無假設的人數比例比較, 讓學生實際“看見”錯誤判斷的發生, 了解型 I 誤差概念(教學流程如圖三)。進階流程則以兩個檢定規則, 連結實驗誤判比例與型 I 誤差機率, 建立以誤差判斷檢定規則的概念。接續以類似的教學流程, 建立學生型 II 誤差概念, 最後導入型 I、II 誤差, 投擲次數, 與檢定規則的關聯, 學生以開發的 GGB 學習工具, 實際操作如固定投擲次數, 與檢定規則, 得到檢定誤差; 固定投擲次數, 以特定的型 I 誤差, 得到檢定規則; 以特定的型 I、II 誤差, 從變化檢定規則尋找適合的投擲次數, 經過多樣的實驗, 深化對於檢定誤差的了解。



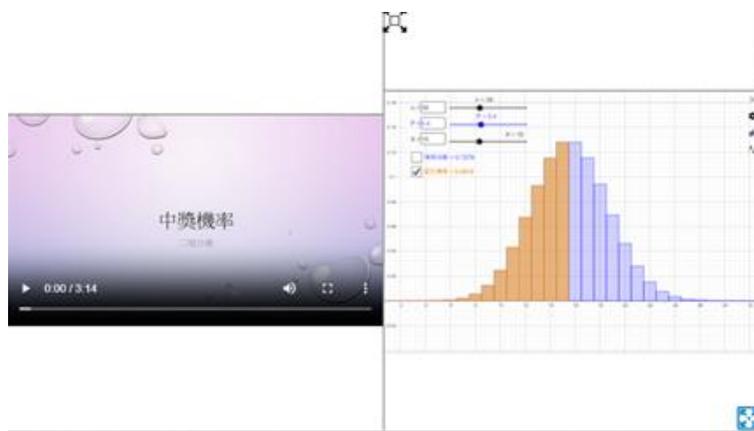
圖二 本研究開發之 GGB 學習工具-型 I 誤差



圖三 型 I 誤差教學流程設計

因 COVID-19 疫情的影響, 面臨線上教學的挑戰, 以此為契機, 本研究從原本的實體教學轉變為可實體、可線上、亦可同步加非同步教學的模式, 視教學需求轉換。以型 I 誤差教學為例, 圖三的教學可於實體教室或線上同步實施, 以表單回覆提升學生參與, 再以預先錄製的課程搭配學習工具, 以非同步教學方式, 導入型 I 誤差理論架構。本研究開發的平台可將影片、GGB 學習工具、

表單 QR code 等，以分割方式規劃於同一螢幕(如圖四所示)，做多可分割為四螢幕。學生可在觀看影片的同時，操作學習工具學習。也可設計表單，讓學生完成學習之後回答，以設定表單關閉時間的方式，將學生回答作為學習評量的一部分。



圖四 本研究開發之教學平台範例

本研究於 109 學年將 GGB 教學工具與設計式教學流程導入統計學教學，110 學年加入實時模擬實驗，並重新設計為混和運用同步與非同步教學的方式進行。課堂時間可規劃更多實際解題或以開放式問題引導學生討論，如要求特定的型 I 與型 II 誤差，請學生使用 GGB 學習工具，討論可行的檢定規則與樣本數，提升學習層次。

二、研究目的

本研究為建立學生檢定誤差概念，從機率分布介紹、檢定規則建立開始，即導入設計式教學，以教學目標開發 GGB 學習工具；以實時模擬實驗讓學生看到機率的實際發生。進一步希望提升學生學習層次，能以檢定誤差，衡量檢定規則的選取。

貳、文獻探討

一、設計式教學

面對新世代學生，如何讓學生專注於課堂，提升學習效率成為重要的課題。設計式教學(Kolodner et. al., 1988)已提出逾 30 年，以循環式的提問、實驗、比要分析、與反饋設計教學，其成效也獲得肯定(Prince & Felder, 2006)。手機是目前大學生不可或缺的隨身物，本研究於是開發網頁模擬，搭配表單，讓學生以手機完成實驗步驟、結果收集、同時也達到拉回學生注意力與點名的效果。例如，線上遊戲抽卡或製寶的成功機率通常會在其官網宣告，以此為引，在提問的過程，請學生思考如何建立檢定與檢定規則；再以實時模擬實驗方式，引導學生觀察規則的誤判率；最後搭配 GGB 學習工具，反饋誤判機率即檢定誤差的意義與計算，以視覺化方式強化概念。

二、Geogebra(GGB)

GGB 已可見廣泛運用於微積分、線性代數、與統計學等大學課程中，且都

得到學生的正面肯定與好的效果(Rodriguez, Morgado, & Dra. Filomena Goncalves da's, 2014, Morphett, Gun, & Maillardet, 2015)。本研究中的學生在微積分課程中，已熟悉 GGB 的 2 維與 3 維繪圖 APP 的使用，導入網頁版 GGB 工具時，並未增加學生額外負擔。前期的研究中發現，僅導入 GGB 學習工具，學生學習成效提高有限，於是教學中導入實時模擬網頁實驗，與 GGB 工具搭配，運用實驗與理論的對照，在建立檢定誤差概念上更有成效。因應線上教學，本研究也建置教學影片平台，將此流程開發為可實體教室操作，也可運用教學平台線上操作。視教學需求，可做同步、非同步、或混和兩種教學之用。平台以分割畫面，可同時顯示影片與 GGB 學習工具，方便學生邊看影片邊操作工具。也可顯示實驗說明檔案、模擬網頁、與表單網頁，以使用者操作方便考量，最多可做到四分割螢幕，且每個螢幕都可點選單獨放大。

參、研究方法與設計

本研究為建立學生檢定誤差概念，以設計式教學，搭配開發之 GGB 學習工具，與實時模擬實驗，讓學生看到錯誤判斷實際發生。主要研究對象為某大學 109 至 110 學年，於上學期修習機率論，下學期修習統計學的學生，研究教學流程差異，對於學生學習的影響。109 學年機率論為現場講授教學搭配 GGB 學習工具，110 學年完成平台建置。統計學方面，109 學年僅完成前半學期，包含二項分布檢定的影片平台，110 學年全部平台完成建置，且課堂加入模擬實驗與限時表單。授課方式因防疫而有調整，整體教學流程與操作請見表 1。

表 1 109、110 學年上課模式

課程	學年	上課模式	平台	表單
機率論	109	現場	未建置	無
	110	混成	全平台完成	搭配影片
	111	現場	全平台完成	搭配影片與課堂實驗
統計學	109	前半現場 後半線上	前半完成 (含二項分布檢定)	搭配影片
	110	混成	全平台完成	搭配影片與課堂實驗

註 1：混成為學生自行選擇是否到場上課

註 2：全部課程皆搭配 GGB 學習工具

因本研究進行跨年度比較，規劃以機率論作為比較基準，機率論期中考之二項分布試題，以相同題幹、數字不同命題共 36 分。109 學年得分顯著高於 110 學年(p -value=0.001)。110 學年機率論為混成教學，學生自主決定是否到校，網路上課同學的專注度推測可能是造成差異的原因。而在兩學年的統計學成績出現相反情況，統計學期中考二項分布檢定部分，以相同題幹命題共 40 分，110 學年分數顯著高於 109 學年(p -value=0.007)。兩年度的二項分布檢定影片皆搭配 GGB 學習工具，放置於教學平台，影片後配置限時表單，檢測學生學習。110 學年於課堂增加模擬實驗搭配表單的教學設計，顯然對於提高學生專注、增進對於檢定誤差的了解有助益。研究中也發現，學生將型 I 誤差機率與虛無假設 p_0 比較的情形，沒有再出現於紙筆測驗。惟部分學生在評論檢定規則時，仍不是從檢定誤差角度出發，例如比較教練與器材公司提出的規則時，

會認為教練有經驗，提出的規則應該比較好。110 學年統計學雖為混成教學，但期中考仍以紙筆測驗進行；而 109 學年統計學後半雖為線上教學，但二項分布檢定於期中考已完成紙筆測驗。

此外，以統計學期中考成績中位數分類，109 學年統計學高能力群學生，88.46%能以檢定誤差評論檢定，110 學年，則有 93.54%能應用檢定誤差評論檢定。109 學年後半學生，僅 24.13%具評論能力，110 學年則有 54.84%可依檢應誤差評論檢定，在高能力群差異不大，但明顯提升後半學生能力。

另於 111 學年機率論時，同樣以影片平台搭配課堂模擬實驗教學，期中考的二項分布試題，同樣配置與 110 學年相同題幹且配分相同的試題，發現 111 學年成績顯著高於 110 學年(p -value=0.032)。顯示搭配實時模擬實驗的教學設計，在機率論與統計學的教學皆有正面影響。

肆、結果討論

本研究於 110 學年統計學二項分布檢定教學時，設計以提問切入主題，再以實時模擬實驗，以表單收集模擬實驗結果，分析實驗結果並與理論對照，最後導入理論的模式教學。以 109 與 110 學年的機率論二項分布測驗作為基準點，110 學年顯著低於 109 學年，但 110 學年二項分布檢定的測驗成績，顯著高於 109 學年。導入實時模擬增加學生課堂的專注，且讓學生實際見到檢定錯誤的發生率，檢定誤差不再只是機率數字，同時釐清虛無假設的 p_0 與型 I 誤差間的比較不具意義，明顯提升學生二項分布檢定學習。

觀察學生在較高能力層次表現，即是否“能以檢定誤差評論檢定”，於高能力群達成比例差異不大，但 110 學年的後半段學生達成比例明顯提升。本研究設計以學習工具搭配實時模擬實驗的教學方式，顯現提升學生二項分布檢定學習，且能力後半群學生的高層次能力也有提升。

致謝

本研究感謝國科會計畫支援。計畫編號：MOST 107 - 2511 - H - 035 - 001 - MY3，MOST 110-2511-H-035 -001 -MY2。

參考文獻

- 楊菁菁、林震燦 (2021)。導入視覺化 GGB 學習工具於統計檢定教學。創新時代的教育：2021 創新教育與教學實踐研究論壇，台灣，台中市逢甲大學。
- Kolodner, J. L., Crismond, D., Gray, J., Holbrook, J., & Puntambekar, S. (1998). Learning by Design from Theory to Practice. *Proceedings of the International Conference of Learning Science*, 98, 16-22.
- Morphett, A., Gun, S., & Maillardet, R. (2015). Developing Interactive Applets with Geogebra: Processes Technologies. *Proceedings of Elephant Delta 2015*,

- 110-132, from <http://www.delta2015.co.za/images/Proceedings.pdf>.
- Prince, M. J. & Felder, R. M. (2006). Inductive Teaching and Learning Methods: Definitions, Comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), 123-138. doi: 10.1002/j.2168-9830.2006.tb00884.x.
- Rodriguez, C.O., Morgado, E.M.M., Moita, Dra. Filomena Goncalves da, S.C.M.(2014). The eXeLearning and Geogebra Integration for Teaching Geometrics Definitions and Vectors Representations through Learning Objects. *Proceedings of the Second International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturalism*, from <https://dl.acm.org/citation.cfm?doid=2669711.2669967>.
- Yang, C. C., Lin, J. T., Lin, Y. C. (2019). Design-based Instruction Integrating Computational Thinking of College Statistics – from Probability to Decision Errors, *Proceedings of Swan Delta 2019*, 155.
- Yang, C.-C. & Lin, J.-T. (2021). Implementing Geogebra Learning Tools into Asynchronous Online Modules on Evaluating Probabilities from Probability Tables, *Proceedings of Herenga Delta 2021*, 96.

Visualizing Testing Error-Designed Instruction with Simulation and Learning Tools

Ching-Ching Yang¹ Jenn-Tsann Lin²

¹ Department of Applied Mathematics, Feng-Chia University

² Department of Applied Mathematics, Feng-Chia University

Abstract

Design-based instruction was implemented into the hypothesis test of binomial distribution. The designed process consists of questioning, real-time simulation experiments, comparisons of analyzed data and theoretical results, and introducing the teaching mode of theory. During the implementation of statistics course in the 110 academic year, although some students stayed online and parts of them in class room due to the epidemic, the real-time simulation successfully improved students' classroom concentration, and students actually felt the occurrence of test errors. The teaching platform developed in this study can be used for synchronous, asynchronous, or mixed teaching. Based on probability course, the test scores of binomial distributions of the 109 academic year students were significantly higher than those of the 110 academic year. However, the test scores of binomial distribution tests in statistical course, the 110 academic year students were significantly higher than those of the 109 academic year. In terms of higher-level ability, taking the test errors to review test rule as an example, there is not much difference in the correct proportion of high-ability groups in the two school years, but the proportion of students in the second half of the 110 academic year has increased significantly.

Key words: Binomial Tests, Designed-based Instruction, Geogebra

學思達教學法融入一元一次方程式補救教學之探究

王俊程¹ 姚如芬²

¹ 雲林縣東明國民中學 w963211.jamie@gmail.com

² 國立嘉義大學教育學系教授 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究採個案研究法，以研究者任教學校之國中八年級三名個案學生為研究對象，探究其於一元一次方程式之學習困難，並使用張輝誠教師提出之學思達教學法搭配翰林版國中一上數學課本及研究者自編之學思達講義進行補救教學，藉以了解個案學生之學習表現。本研究蒐集前測、學思達講義、翰林版課本、後測、課室觀察等資料進行分析，研究發現：一、個案學生於一元一次方程式之學習困難有括號拆解的運算錯誤、已知的 x 代入求解之迷思、等量公理與移項法則之運算錯誤、畏懼題型中含有分數之運算等；二、藉由學思達教學法進行一元一次方程式之補救教學，學生自學後，藉由教師引導其進行討論，再由教師進行後續之教學統整，能有助個案學生於一元一次方程式之理解與學習。

關鍵字：學思達教學法、補救教學、一元一次方程式

壹、緒論

十二年國民基本教育數學領域課程綱要中指出，代數是一重要學習主題，而一元一次方程式更是代數學習的重要基礎，國中數學經常需要使用代數方程式進行列式、解題，然而由於代數學習內容過於抽象，使許多學生感到排斥與抗拒。黃淑華等人(2014)指出學生在進行一元一次方程式運算、解題時，最常見到的困難是代數運算能力不足。國中數學課本之編排內容發現其教材內容缺乏具體情境引導，加上學校授課有段考進度的壓力，以致於授課時無法帶領學生一一探究其運算過程，很快地就進入到抽象的代數運算，而過多的抽象代數運算會使學習變得無趣，致使學生對代數學習產生反感(蕭新雄、徐偉民、郭文金，2019)。

學生學習的成敗與學習動機有很大的關聯性(曾盈琇，2018)。學思達創辦人張輝誠教師於 2013 年開始推廣學思達，透過教師的專業介入，製作以問答題為導向、補充完整資料的講義，使學生在學習的專注時間能不斷切換學習樣貌，在小組之間形成「既合作又競爭」的學習模式，將講臺還給學生，教師轉換成主持人、引導者、課程設計者，藉此希望能改變臺灣的填鴨教育(張輝誠，2015)。

本研究之研究目的有二：

1. 探究國中八年級個案學生於一元一次方程式的迷思概念。
2. 探究國中八年級個案學生於學思達教學法融入一元一次方程式補救教學之學習表現。

貳、文獻探討

一、學思達教學法之相關研究

過去許多學者提出傳統講述式教學法之教育策略將使學生的學習興趣逐漸降低，學思達教學法是由張輝誠教師融合過去教學經驗中而提出之教學法，其目

的在於培養及訓練學生閱讀、自學、思考、討論、分析、歸納、表達及寫作等能力，更著重於學生之自學、思考與表達之能力。吳振峰等人(2020)指出學思達教學法融合強納森·伯格曼(Jonathan Bergman)與亞倫·山姆斯(Aaron Sams)之翻轉教室理論(Flipped Classroom)以及佐藤學教授提出之學習共同體(Learning Community)之概念。陳佩瑜等人(2016)認為學思達教學法與翻轉教室理論之內容不謀而合，因此其提出學思達教學法係為翻轉教室下的一種教學策略之應用。張輝誠(2015)提出教師在教學前，教師應針對欲教學之主題及內容有所了解，且須提供學生於自學時所需要之資料，並將其編撰為學思達講義，其教學流程為學生自學、思考問題、小組討論、學生發表及教師統整，教學流程分述如下：

(一) 學生自學：

張輝誠(2015)認為要使學生進入自主學習與自我探索知識的方法，須先培養學生自學的能力。在教學活動開始時，並非一開始就由教師進行講述，而是使學生先進行自主學習，若學生在自學過程中遇到學習困難，可先翻閱教師所編撰之學思達講義，以找尋其所需之答案。

(二) 思考問題：

張輝誠(2015)認為好奇心為引導學生的最佳學習動力，因此透過學思達講義上之問答題，誘發學生的好奇心，使學生從問答題中尋求答案，啟動其思考的技能。教師如欲了解學生之思考歷程與觀察其迷思概念，亦可使學生紀錄其思考歷程，作為教師日後修正教學之依據。

(三) 小組討論：

張輝誠(2015)指出學生在自學與思考問題的過程中，可能會遇到找不到或不確定答案等狀態，因此藉由小組討論的步驟，能夠讓學生們互相了解彼此的思考歷程與解題歷程，亦可讓學生們進行批判思考、互相切磋，藉以使學生彼此間能有更多元觀點的想法與答案。

(四) 學生發表：

張輝誠(2015)指出學生小組討論後，教師轉換其角色為主持人，引導學生回答問題，藉由學生回答之內容了解其學習表現與學習成效，若學生發表之內容符合教師預期或超乎教師預期，且班級中學生亦可理解，教師可與學生共同成長；若其回答不完整或不正確，則教師了解學生之迷思概念，即時進行補救教學。

(五) 教師統整：

教師在了解學生發表之內容後，進行統整與整理，張輝誠(2015)指出此階段教師需依據學生發表之內容與學生的理解基礎進行統整與教學，藉以釐清學生之迷思觀念與理解相關之知識。

過去多數學者提出學思達教學法能有效提升學生之學習動機與學習興趣，且能降低與釐清學生之迷思概念(簡子堯, 2022; 卓淑芬, 2018; 呂宜駿, 2018; 林玉莉, 2018; 蔡倩蓉, 2018; 林曉慧, 2017)，同時在學思達教學法融入教學活動中，多數研究指出能提升學生學習成就(卓淑芬, 2018; 林玉莉, 2018; 鐘嘉綾, 2017)，教學活動進行時，教師若能善用異質分組能培養學生彼此間同儕互動的機會，使其能相互學習(巫素萍, 2016; 郭淑梅, 2015)。學思達教學法係為使學生成為學習的主角，並從中激發學生對於知識的好奇心與培養其思考能力，藉以引起學生的自主學習(吳振峰、洪麗芬, 2020)。

研究者運用學思達教學法融入解一元一次方程式，依據張輝誠老師所提出之

學思達教學流程—學生自學、思考問題、小組討論、學生發表及教師統整等步驟進行補救教學，考量學生對於小組討論與學生發表的步驟較為不熟稔，須教師引導與協助，方能進行此二步驟。研究者編撰符合學生程度之學思達講義，並搭配翰林版國中一上數學課本進行教學活動，教學活動中進行影像紀錄以觀察及深入探究學生之學習狀態及學習表現，藉以探究學生之學習表現及彈性調整教學進度以減少學生之迷思概念，希冀藉由教學方法的調整，以提升學生的學習動機。

二、一元一次方程式之教與學相關研究

研究者根據教育部頒訂之十二年國民基本教育課程綱要之數學領域課程綱要及數學領域課程手冊進行探究，其一元一次方程式之學習內容為：「A-7-1 代數符號：以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；以一次式的化簡及同類項；符號記錄生活中的情境問題。」、「A-7-2 一元一次方程式的意義：一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。」及「A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。」經研究者檢視後發現學生於國小五年級已習得「以符號表示數學公式」、國小六年級階段已習得「怎樣解題」與「等量公理」之觀念，此三單元均為學生進入國中一元一次方程式之先備知識，且一元一次方程式亦為日後學習相關代數單元(如：二元一次方程式、直角坐標平面、一元一次不等式、多項式、函數等)之基礎。

張景媛(1994)提出國中階段之數學根據皮亞傑(J. Piaget)之認知發展理論係為形式運思期中的抽象思考與邏輯推理，與國小階段位於具體運思期之學習方式並不同，因此學生在此階段的轉換上較不熟悉，對於學習代數更為一大挑戰。

研究者過去之教學經驗中，學生若無法對代數式簡記、合併同類項等基本概念掌握清楚，則其無法順利進行一元一次方程式之解題。戴文賓等人(1999)亦提出學生在國中初次接觸代數單元時，可能具有代數式簡記、合併同類項、拆括號之運算，且其易對於運算符號與性質符號產生迷思。

綜上所述，一元一次方程式對於學生在國中階段之代數學習占有很重要的地位，文獻中可發現學生的學習困難可分為一：基礎運算之錯誤；二：代數運算之錯誤；三：無法了解題意而致使運算錯誤。因此研究者根據此三類學習困難，進行補救教學之教學活動設計，並將學思達教學法融入其中，希冀減少學生之學習困難，協助個案學生打下代數學習之基礎。

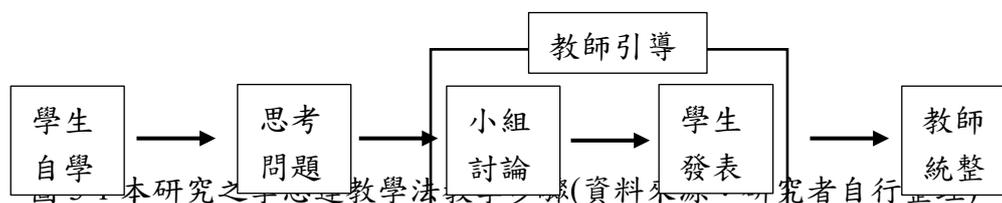
參、研究方法

研究者使用個案研究法針對研究對象進行深入觀察及探究其迷思概念與學習表現，本研究採取個案研究法之優點在於其資料蒐集具有彈性，藉以深入了解與分析個案學生在教學活動中之學習表現。

一、教學活動設計

研究者在設計教學活動前參考已著手實施學思達教學法數年之教師於學思達資源公開平台 Share Class 中分享學思達講義，並依照個案學生之數學學習表現與學習程度編撰學思達講義其教學流程為學生自學、思考問題、小組討論、學生發表及教師統整。本研究之教學活動為學生藉由研究者自編之學思達講義並搭配翰林版國中一上數學課本進行自學，再根據研究者自編學思達講義之引導進行思考問題，但考量個案學生對於小組討論、學生發表較不熟稔，此二步驟由研究者引導學生進行，故研究者將教學流程之小組討論與學生發表進行結合，輔以教師引導進行討論與發表之步驟，如圖 3-1。促使學生能進行同儕互動，了解彼此

的思考歷程，藉以產生多元觀點的想法，研究者亦可於引導歷程中了解學生之學習狀態，並根據學生之理解適時加以統整、補充。



研究者在過去教學經驗中，發現多數學生在解一元一次方程式的過程有較多的錯誤，因此本研究之教學活動將著重在探究個案學生於解一元一次方程式之學習表現，研究者於補救教學活動實施前，針對研究對象進行前測，並依據教育部頒訂數學領域課程綱要及課程手冊之學習內容與學習表現，設計補救教學活動、編撰學思達講義，搭配翰林版國中一上數學課本進行教學活動。本研究之研究對象為研究者任教學校之三位八年級學生，其數學學習特質與表現，如表 3-1，本研究進行時間為八年級下學期初，每週一、三、五午休進行補救教學，共進行四節課之補救教學。

表 3-1 研究對象之數學學習特質與表現

個案學生	個案學生數學學習特質與學習表現
S1	自主學習力高，上課專心聽講，參與度高。數學理解力偏低，有時會被自己的迷思而影響解題，因而錯誤率偏高。需耐心講解，給予大量練習題進而培養成功解題的經驗。
S2	個性內向，上課專注力高，但上課不太開口回答問題，數學理解力低，作業書寫確實，但錯誤率高，對於敘述較長之文字題容易放棄，需給予步驟、耐心引導。
S3	上課專注力高，且會主動練習以幫助自己精熟試題。過去遇困難不會主動尋求協助，而選擇放棄，導致其基礎不夠穩定。

本研究之研究目的為探究個案學生於解一元一次方程式之迷思概念，以及探究個案學生於學思達教學法融入一元一次方程式補救教學之學習表現，故研究者除了蒐集相關紙本資料(如：研究者自編之學思達講義、學生課本之填答、前後測試卷、教學省思紀錄等)，亦蒐集相關影音資料(如：課室錄音錄影檔、訪談錄音錄影檔等)，以深入了解及探究個案學生之迷思概念與學習表現。

二、資料蒐集與分析

(一) 前、後測試卷

研究者依據教育部頒訂數學領域課程綱要及數學領域課程手冊之學習內容與學習表現之「A-7-1：代數符號」、「A-7-2：一元一次方程式的意義」及「A-7-3：一元一次方程式的解法與應用」，設計前測卷共計 13 題，前測試卷之目的在於探究個案學生之迷思概念；後測卷共 12 題，其目的在於探究個案學生於解一元一次方程式單元之學習表現。試卷經一位國內數學教育專家、三位具十年以上數學教學經驗教師審查試題適切性，研究者再進行修正為本研究之前、後測試卷。教學活動進行前進行前測測驗，並於教學活動結束後進行後測測驗，再由研究者進行訪談以探究個案學生之一元一次方程式迷思概念與解一元一次方程式之學習表現。

(二) 課室觀察

研究者在本研究中為教學者與觀察者。本研究中將進行四次課程，每次 35 分鐘，共計 140 分鐘。教學活動進行時將全程錄音錄影，研究者於教學活動結束後，將影音資料進行分析，以觀察個案學生於教學活動中之言行舉止、學生間互動及師生間互動，以分析個案學生之學習表現。

(三) 訪談

本研究中將進行三次訪談，分別於前測、教學活動實施後及後測各進行一次。前測訪談之目的在於分析及了解學生於解一元一次方程式之迷思概念；後測訪談與教學活動後訪談之目的為探究學生於學思達教學法融入一元一次方程式補救教學之學習表現，每次訪談預計進行 20-30 分鐘，並且每次訪談過程均全程錄音、錄影，並將其重要之訪談內容轉譯紀錄為逐字稿，以達成訪談之目的。

(四) 自編學思達講義

研究者參照學思達資源共享平台 Share Class 之實施學思達教學法多年之教師所分享的學思達講義進行本研究之學思達講義設計與編撰共一份，以符合個案學生之學習程度。教學活動中，學生藉由研究者自編學思達講義搭配其課本教材進行學習，因此研究者可藉由學生之學思達講義分析學生之學習表現。

(五) 教學省思

研究者於教學活動實施時蒐集上述資料，教學活動實施後，進行資料分析，檢視與省思教學活動實施之情形，並觀察與分析學生之學習表現後，作為日後教學改進的依據。

肆、研究結果

一、察覺—個案學生在一元一次方程式的前測結果與迷思概念

研究者觀察並分析個案學生於一元一次方程式之前測試卷之答題情形，並輔以訪談方式了解其於一元一次方程式之解題想法並分析其迷思概念，個案學生之迷思概念彙整如表 4-1。

表 4-1 個案學生在一元一次方程式迷思概念(資料來源：本研究之研究成果)

解一元一次方程式之迷思概念	S1	S2	S3
1. 已知的 x 代入求解之迷思		V	
2. 等量公理與移項法則之運算錯誤	V	V	V
3. 畏懼題型中含有分數之運算		V	

註：V 代表個案學生具備該迷思概念

個案學生在解一元一次方程式之迷思概念分述如下：

(一) 已知的 x 代入求解之迷思：

個案學生根據題目所給定之 x 的值，代入指定之一元一次方程式，S2 在運算過程中，僅計算選項 A，而選項 B 僅尚未完成計算，就擦拭清除(如表 4-3)，其表示：「我算完 A 覺得有點怪怪的，繼續算 B 的時候，感覺自己好像算得不對，所以我就把 B 擦掉了。」(訪 1111121-S2)研究者認為在國中階段之教學中較少引導學生進行驗算檢證其答案是否正確，因此少數學生在此類型題型會摸不著頭緒。

1. $x = 3$ 為下列哪一個方程式的解?
 (A) $2 + 3(2x + 1) = 11$ (B) $2x - 5 = 3(x + 1)$
 (C) $4x - 5 = 2x + 1$ (D) $x + \frac{2-x}{3} = 2$

(A) $2 + 6x + 1 = 11$ (B) $2x - 5 = 3x + 3$
 $2 + 18 + 1 = 21$ (C) $4x - 5 = 2x + 1$

圖 4-3 S2 學生於已知的 x 代入求解之迷思

(資料來源：本研究之研究成果 1111121 學-S2)

(二) 等量公理與移項法則之運算錯誤：

國中數學教材目前三家出版社(翰林、南一、康軒)在解一元一次方程式單元中均有提及等量公理之概念，且清楚明示等量加法公理、等量減法公理、等量乘法公理及等量除法公理之運算，而多數學生會使用移項法則進行解題，但王如敏(2004)提及大多學生有等量公理及移項法則之迷思，且經常運用機械式背誦口訣解題，未清楚了解其運算之意義為何。

S1 在前測時將題目中帶有分數係數之方程式先進行等量乘法公理後，再運用移項法則進行運算，但其在移項時對於性質符號與運算符號的概念並不完全清楚，因此其答題有誤，其表示：「這題我直接把右邊的 x 移到左邊，左邊的 -4 移到右邊跟 3 一起算，所以就是 $\frac{5}{4}x = 7$ ，然後因為 $\frac{5}{4}$ 是正的，所以移項會變成負數，所以 $7 - \frac{5}{4}$ ，因為分母是 4 ，所以就是 $\frac{28}{4} - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}$ 。」(1111118 訪-S1)。

S3 則直接進行移項，不過其在計算時，直接將分數之分母移除，而未使用等量乘法公理進行計算，其表示：「我把 x 項都移到左邊，然後把 -18 移過去變成 $+18$ ，然後因為 $3x$ 是 $\frac{12}{4}x$ ，然後它們相減之後變成 $-9x$ ，所以 $-9x = 18$ ，所以 x 就是 18 除以 -9 ，答案就是 -2 。」(1111111 訪-S3)。

表 4-4 S1、S3 等量公理與移項法則之迷思概念(資料來源：本研究之研究成果)

S1 等量公理與移項法則之迷思概念	S3 等量公理與移項法則之迷思概念
$\frac{1}{4}x - 4 = x + 3$ $\frac{5}{4}x = 7$ $x = 7 - \frac{5}{4}$ $x = \frac{28}{4} - \frac{5}{4}$ $x = \frac{23}{4}$	$3x - 18 = \frac{21}{4}x$ $3x - \frac{21}{4}x = +18$ $\frac{12}{4}x - \frac{21}{4}x = 18$ $-9x = 18$ $x = 18 \div -9$ $x = -2$
(1111118 學-S1)	(1111111 學-S3)

(三) 畏懼題型中含有分數之運算：

學生在過去小學階段之分數有較大的迷思與畏懼，因此致使學生在國中階段遇到分數的題型會選擇放棄作答或無效作答。S2 學生告訴研究者：「因為它有分數，我不知道要怎麼做，就沒有寫了。」研究者推估 S2 學生在過去學習分數時，應有其學習困難產生，使其在面臨分數相關的題型，對其感到畏懼。

表 4-5：S2 學生畏懼分數相關題型(資料來源：本研究之研究成果)

S2 學生畏懼分數相關題型		
$3x - 18 = \frac{21}{4}x$	$\frac{1}{4}x - 4 = x + 3$	$\frac{3x + 2}{2} + \frac{4x - 2}{3} = 1$
×		×
(1111121 學-S2)	(1111121 學-S2)	(1111121 學-S2)

二、成長—個案學生於學思達教學法融入一元一次方程式補救教學學習表現

本研究進行 4 次課程，每次 35 分鐘，共計 140 分鐘的教學，研究者提供學生的教材為自編學思達講義及翰林版國中一上數學課本，其教學活動內容依序為：認識一元一次方程式、等量公理與移項法則。

三位個案學生在前測中，S1 有等量公理之迷思概念，而 S2 大致上能進行解一元一次方程式，但其過去學習分數相關單元之信心不足，因而畏懼一元一次方程式的未知數係數為分數的題型，S3 在解題過程中，較無所畏懼是否會計算錯誤，反而勇敢嘗試解題，其僅有些微等量公理之迷思概念及基本運算之錯誤，因此研究者在教學活動中的「學生自學」中，引導學生思考課本例題之解題方式，並使學生將其所觀察之細節進行記錄。

S1 在自學過程中，仍會出現等量公理之迷思概念，在教學活動進行中，藉由教師引導使個案學生進行小組討論，以引導 S1 能理解相關概念，但其在後測表現中，雖然能順利進行等量公理之運算，但其仍對於分數之題型具有等量公理的迷思概念。S1 在後測訪談中表示「我在算這題的時候，我就用交叉相乘去算。」(1120224 後訪 S1)研究者反問其使用交叉相乘進行計算的原因，S1 表示「我想說以前會用交叉相乘算，就直接交叉相乘，但是我有點忘記怎麼算，想說把它加起來，所以答案是 $33x + 4$ 。」(1120224 後訪 S1)因此可以從中發現 S1 仍有等量公理運算之迷思。

S2 在學生自學中能自行進行學習，且其學習狀態較佳，個性較為內向，但因為其他兩位個案學生均為同班同學，日常亦有互動，因此在教師引導中進行小組討論與學生發表過程中，能流暢的與同學進行活動，其表示：「還好 S1 和 S3 都是我們班的，這樣上課也會比較輕鬆，討論起來也比較自在，不會有壓力。而且這樣小小的討論，我們也可以知道彼此的答案，也會知道其他人怎麼想的，這樣就可以更知道怎麼樣解題。」(1120224 活二訪 S2)

S3 在本研究之教學活動中，不僅是課室中的開心果，也會願意帶領同學們進行討論，提出自己的想法，「師：好，那你們彼此先說說看自己在寫這個隨堂練習的時候，是怎麼想的呢？S3：好，那我要先說，我自己是...，那 S1 你要不要也說說看？」(1120221 活二)，其於教學活動後表示：「老師，我覺得這樣子上課，我可以更知道這些題目的概念裡面的重點是什麼，而且雖然 S1 速度比較慢，可是我自己可以先往後寫，然後等他寫完之後，我會在老師帶我們討論的過程再去想這個題目的概念，然後其他人在講的時候我也可以把我沒聽清楚的再複習一下，而且老師你都會等我們，所以我就可以寫的比較輕鬆，雖然輕鬆可是又可以把概念弄得清楚。」(1120224 後訪 S3)。

S2 與 S3 在後測中，表現優異，S2 在後測中提到「S2：我寫完這張考卷之後，我一開始還不相信我會寫，可是越寫越順，我才知道原來我自己是可以學會

的。師：那你覺得自己是怎麼從不會轉變成會的？S2：我以前在學這裡的時候都不太懂，而且有分數，我又很怕分數，可是老師在這幾次上課的時候，一開始在自己讀的時候，還是有點怕怕的，我怕我不會，可是老師帶我們討論的時候，會讓我們去聽其他人怎麼寫，就可以知道其他人的想法，然後再去想想自己有沒有沒想清楚的地方，而且老師你知道嗎，我聽到其他人的答案和我的是一樣的時候，我都超開心的。」(1120224 後訪 S2)

$$(5) \frac{3x-1}{5} = \frac{3x+2}{6}$$

$$\frac{3x-1}{5} \times \frac{3x+2}{6}$$

$$= 15x + 10 + 18x - 6$$

$$= 33x + 4$$

圖 4-6：S1 於後測中等量公理之迷思概念

(資料來源：本研究之研究成果 1120223 活二後測 S1)

三位個案學生在教學活動訪談中，均表示喜歡使用學思達教學法進行數學學習，亦期盼日後數學課教師也能夠使用學思達教學法進行授課，S1 提到「以前我在上課的時候都不太敢問問題，但是這樣上課人比較少，而且老師會讓我們討論，我就覺得這樣的上課方式幫助我很多，就可以知道其他人怎麼想，老師有時候很像同學也很像老師，都會帶著我們一起討論。」(1120307 教訪-S1)。S2 提到「這樣的上課方式我很喜歡，雖然剛開始有點不習慣，但是老師會帶著我們去想，會比較沒有壓力，老師不會讓我覺得很難接近，有問題的題目或不懂的概念，老師也都會慢慢的教我們，希望之後也可以用這樣的方式上課。」(1120307 教訪-S2)。S3 表示「老師帶我們用這種方法上課，雖然是補救教學，但是老師都會引導我們思考，這樣上課不會有太大的壓力，而且我們也都可以知道其他人寫了什麼答案，為什麼會這樣寫之類的，我很喜歡這樣的上課氣氛。」(1120307 教訪-S3)

研究者針對個案學生之課堂表現、教學活動後之訪談以及其後測試卷答題表現進行分析，發現個案學生大致上喜歡學思達教學法，起初 S1 稍微不習慣此教學法，但後續能融入教學活動中，並與其他學生進行互動及討論。個案學生們均在訪談中提及喜歡學思達教學法，亦提及因學思達教學法之小組討論與學生表達能夠讓學生們了解其他同學在解題時的想法，且教師亦能在此階段了解學生的學習表現，並進行後續之教學統整，以幫助學生釐清觀念，個案學生們亦提及希望教師在後續課堂中亦能使用學思達教學法進行課程。

伍、結論與建議

本研究藉由學思達教學法進行一元一次方程式之補救教學，以教育部十二年國民基本教育課程綱要之數學領域課程綱要「A-7-1 代數符號」、「A-7-2 一元一次方程式的意義」及「A-7-3 一元一次方程式的解法與應用」作為研究的範疇，將翰林版國一數學課本中一元一次方程式相關單元之內容設計出以問題為導向之學思達講義，促使學生能進行思考，再由教師引導其進行討論與發表，最後由教師統整，藉以使學生熟悉一元一次方程式之相關概念，以釐清其迷思概念。

研究者蒐集個案學生之學思達講義、翰林版國一數學課本、訪談、前測、後測及課室觀察等資料進行分析，研究中發現個案學生於一元一次方程式之學習困難為錯誤的列式思考、括號拆解的運算錯誤、已知的 x 代入求解之迷思、等量公

理與移項法則之運算錯誤、畏懼題型中含有分數之運算等，經由本研究之教學活動實施後，三位個案學生之後測解題表現中，均有明顯的進步與成長。

根據本研究之研究結果，研究者針對「一元一次方程式」教學提出建議：一、藉由合適之生活情境融入一元一次方程式之教學，使學生能從情境中思考及進行列式解題，教師可多提供能使學生進行聯想之情境進行題目布置，並引導學生留意相關之線索，惟需視學生之學習程度進行情境設計，避免情境過於複雜。二、學生普遍能熟悉移項法則之使用，但或多或少仍存有等量公理之迷思，宜放慢教學速度，使學生進行相關之基本運算，再引入移項法則之教學，以減少其認為 $-3x = 6$ ， $x = 6 + 3 = 9$ 之錯誤。

研究者對於學思達教學法融入數學教學提出建議：一、建立學生自學的環境：學思達教學法不同於其他教學法之處在於其著重於學生的自主學習能力，因此教師在最初階段應協助學生搭建起自主學習的鷹架，提供除了課本以外的合適教材，將學生所需之學習資源融入學思達講義之中，使學生能進行自主學習。二、啟發學生的思考能力：學思達教學法著重於學生的自學，因此培養學生的思考能力顯得更為重要，讓學生在自學時能發現問題、思考問題，教師在學思達講義中設計能引發學生進行思考之問題，使學生進行探索與激發其學習動機。三、鼓勵學生表達：國中學生進入青春期階段較為羞澀，教師可用正向引導之教學策略引發學生進行學生發表。教師如欲使用學思達教學法融入教學中，應積極參與學思達所舉辦之年會及各領域所組成之社群，定期參與社群所舉辦之讀書會或研習，以增進教師對於學思達教學法的熟悉度，並且需對於學生的個別差異有深刻的了解，以便知悉學生之學習困難，給予即時的回饋與補救。

主要參考文獻

- 吳勇宏 (2015)。可以說話的國文課—學思達教學法的操作與應用。中等教育，66 (2)，16-29。 <https://doi.org/10.6249/SE.2015.66.2.02>
- 吳振峰、洪麗芬 (2020)。學思達教學融入國小教育關鍵因素之研究。中華管理發展評論，9 (1)，59-72。 [https://doi.org/10.6631/JCMD.202006_9\(1\).0004](https://doi.org/10.6631/JCMD.202006_9(1).0004)
- 張景媛 (1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。教育心理學報，27，175-200。 <https://doi.org/10.6251/BEP.19940601.7>
- 張輝誠 (2015)。推廣學思達教學法的十年策略。中等教育，66 (2)，6-15。 <https://doi.org/10.6249/SE.2015.66.2.01>
- 張輝誠 (2015)。學·思·達—張輝誠的翻轉實踐。親子天下。
- 蕭新雄、徐偉民 (2017)。以奠基理念發展國中七年級一元一次方程式補救教材。科學教育，2017 (3)，31-54。
- 蕭新雄、徐偉民、郭文金 (2019)。以奠基活動進行七年級一元一次方程式補救教學之行動研究。課程與教學，22 (2)，107-144。 [https://doi.org/10.6384/CIQ.201904_22\(2\).0005](https://doi.org/10.6384/CIQ.201904_22(2).0005)
- 戴文賓、邱守榕 (1999)。國一學生由算數領域轉入代數領域呈現的學習現象與特徵。科學教育，10，148-175。

The Study of Share Star Teaching Method for the Remedial Teaching of the One-Variable Linear Equation

Chun-Cheng Wang¹ Ru-Fen Yao²

¹Yunlin County Dong Ming Junior High School

²Department of Education, National Chia Yi University

Abstract

The study adopts the Case Study method, the research object is for the three students of the researcher to explore their study difficulties of the One-Variable Linear Equation and use the Share Star Teaching Method the remedial teaching to explore the learning performance of the case students. In this research, we will collect the pre-test paper, handouts, textbook, post-test paper, and the observation of the teaching activities to analyze. We found: 1. The learning difficulties of the case students in the One-Variable Linear Equation are operational error in dismantling parentheses, the misconception about the known value of the variable in a polynomial, operational error for the equality of axiom and the transposition rule, and fear of operations involving fractions in the questions, etc.

The remedial teaching of the One-Variable Linear Equation is carried out by the Share Star Teaching method, the teacher guided the students to discuss what they were thinking about after they studied by themselves, and then, the teacher conducts follow-up teaching integration, which can help the case students understanding and learning the One-Variable Linear Equation.

Key words: Share Star Teaching Method, Remedial Teaching, One-Variable Linear Equation

大專院校學生數學焦慮的初探

黃岳笙¹ 林原宏²

¹ 國立臺中教育大學數學教育系 bma110105@gm.ntcu.edu.tw

² 國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在編製數學焦慮量表，探討大專院校學生的數學焦慮狀況。在國內，由於目前尚缺乏一份具有完整架構、良好施測品質之數學焦慮量表，作為後續了解大專院校學生數學焦慮情況的相關研究之用。因此本研究以 247 名國內大專院校的學生為樣本，研究者發展的數學焦慮量表具有四個向度，包含學習數學的焦慮、數學考試的焦慮、數字運算的焦慮以及尋求幫助的焦慮。探討過去國內外研究者，對數學焦慮之定義進行整理與比較，綜合諸多研究者對數學焦慮提出之向度，發展一套適合國內大專院校學生之數學焦慮量表，以統計方法檢驗量表的施測品質，最終將所得的資料進行各項分析。本研究發現：(一)此量表之 Cronbach's Alpha 值為.979，表示此量表具有良好信度；(二)經探索性因素分析結果顯示，「學習數學的焦慮」與「數字運算的焦慮」兩因素應被歸類為同一因素「學習數學的焦慮」；(三)根據描述性資料顯示，不同性別在數學焦慮中「數學考試的焦慮」、「數字運算的焦慮」、「數學焦慮」上具有顯著差異，且女性平均分數高於男性；在不同的專業背景下，數學或數學教育相關系所與其他系所的學生在數學焦慮上各向度皆有顯著差異，且數學或數學教育相關系所的學生相較其他系所的學生有著較低的數學焦慮。

關鍵字：焦慮、數學焦慮、數學焦慮量表

壹、緒論

一、研究動機

數學作為發展科學之根基，科學的進步需依賴數學的邏輯及推理能力，世界各國對數學的關注也逐漸提高。關於 2006 年歐盟議會及理事會的建議，數學素養為一項需終身學習的關鍵能力，也被認為是 STEM 教育的一個關鍵領域 (Gonzalez & Kuenzi, 2012)，國際學生能力評量計畫 (Programme for International Student Assessment, 簡稱 PISA) 將閱讀素養、數學素養、科學素養列為三項重要評比。在我國數學是國民教育階段兒童所必須學習的重要學科之一 (魏麗敏, 1996)，數學之重要性眾所皆知。由上述可知數學能力被世界各國視為個體的重要能力之一，因此數學能力的養成有其必要性，此為研究動機之一。

為落實十二年國民基本教育之基本理念與實踐課程目標，茲以「核心素養」為課程發展的主軸 (教育部, 2014)，「核心素養」承續過去課程綱要所強調的基本能力、核心能力與學科知識，除了強調知識、技能以外，亦重視情意態度的層

面(蔡清田, 2014)。Bloom, Englhart, Furst, Hill & Krathwohl(1956)提出教育目標分類法,研究者將教育目標分為:認知(cognitive domain)、情意(affective domain)、技能(psychomotor domain)三個領域。我國近年開始提倡數學素養的學習,導向「情意」化教學,以提供學生適性學習的機會,培育良好的數學態度。

我國的數學在國際上有優異的表現,2019年TIMSS揭露我國的數學和科學表現名列世界第二,同時也進行問卷調查,深入瞭解學生的學習興趣與態度,根據問卷的結果顯示,我國學生「不喜歡數學」的比例高於國際平均,對數學產生數學焦慮(math anxiety),屬於「情意」的一種,「情意」指的是個體受刺激的心理反應,同時為一個可能影響數學學習的非認知因素。綜合諸多研究者對數學焦慮的界定,數學焦慮為在日常生活與學習情境的應用中,使用數學與解決問題時所產生的焦慮感與緊張感,對數字的運算及數學問題解決能力產生干擾行為,影響到個體追求更高深的數學或科學意願,妨礙其學業發展。Carey(2016)的研究指出,有數學焦慮的成年人可能會躲避處理數學問題,會導致數學學習的減少與數學成績下降、減少選擇有關數學的大學課程或科系、失去學習數學的動力。因此為了能進一步瞭解學生在數學學習上遇到之焦慮情況,此研究特別關注在數學情意層面中的數學焦慮,將深入探討數學焦慮的面向,此為研究動機之二。

諸多研究探討了學生的數學焦慮與數學表現之間的關係,根據 Zhang, Zhao & Kong(2019)的研究調查中顯示,小學生到大學生的數學焦慮程度與數學表現皆有顯著的負相關。此外從 Schmitz, Salemink, Wiers & Jansen(2022)的研究中指出,大學生的焦慮程度明顯高於中學生,國外已發展出能有效測量成年人數學焦慮的工具,例如:縮寫數學焦慮量表(AMAS),鑒於不同文化國度間影響數學焦慮的因素可能有所差異,跨文化觀察到的數學焦慮情況可能有所差異,加上國內目前尚缺乏一個完整以大專院校生為對象,所發展的數學焦慮測量工具。因此現階段發展一套測量大專院校生的數學焦慮工具有其價值及必要性。除此之外,提供一個具有良好施測品質的工具,可以讓數學教學者有效掌握學生的數學焦慮情況,幫助教學者瞭解學生可能在數學的學習上遇到何種焦慮情況,此為研究動機之三。

綜合上述,因國內數學教育及諸多因素所影響,個體當面臨數學時,會產生不安、害怕的狀態,恐怕影響學生學習數學及升學上的表現,其嚴重程度不可漠視,即便教育體制不斷改革,數學焦慮仍存在,加上國內缺乏一個完整性測量大專院校生數學焦慮的工具,因此發展測量大專院校生的數學焦慮的工具是重要的,在此研究背景下,本研究將深入探討數學焦慮的影響因素,發展一個能有效測量大專院校學生數學焦慮的工具,期望透過此量表之量化結果,以提供往後教學或研究領域參考輔佐之用,能更深入瞭解數學焦慮對學生學習之影響。

二、研究目的

基於上述研究動機,以下為本研究之研究目的:

- (一)發展一套測量大專院校生數學焦慮的工具。
- (二)檢驗本研究所發展數學焦慮量表之測驗品質。

(三)進行大專院校學生數學焦慮的描述性分析。

貳、文獻探討

一、焦慮的意涵與相關研究

焦慮是一種正常的人類反應，乃是心理受刺激所產生的情緒，由於個體過度擔憂未來(預期)發生的問題，心理學家將焦慮的焦點放在預期這個部分上，而焦慮通常會伴隨著許多行為，影響至身心各層面。在焦慮的研究中有兩種互補的概念：心理狀態與人格特質，Spielberger (1966)將**焦慮分為情境性焦慮(state anxiety)與特質性焦慮(trait anxiety)**兩種概念，這兩種焦慮的表現方式皆不相同。所謂情境性焦慮是一種短暫性的焦慮，指的是人類在某種特定情境或某一特定壓力下所產生的焦慮狀態，其反映出個體的心理及生理的短暫反應(例如：考試、工作等……)，一旦產生焦慮的情境消失，焦慮情緒也會隨之不見；特質性焦慮是一種屬於長期性相對穩定的個體差異，指的是一種傾向人格特質的焦慮，意指個體時常感受到危險或受威脅所產生的焦慮狀態，此人格特質並不會依時間或情境改變而產生焦慮，產生原因可能來自於幼年的環境因素養成，也是個人獨特的情緒傾向。因此**數學焦慮屬於一種情境性焦慮**，若能減緩個體在特定情境或壓力下，產生的不安、緊張感，焦慮的症狀得以改善。

二、數學焦慮的意涵與相關研究

數學焦慮是指個體在學習數學或者從事與數學有關活動時，自身所受刺激所產生的一種情緒反應。甯自強(1983)的研究指出學生由於學習數學曾遭受挫折和衝突，使得學生自己在學習數學，做數學作業，尤其因為數學考試而產生的緊張狀態。Alexander & Cobb (1989)的研究中也指出數學焦慮的多維度，其中「數學考試焦慮」與「數字任務焦慮」為學生產生數學焦慮的重要因素；Plake & Parker (1982)的研究認為，產生數學焦慮兩項主要因素為「數學學習焦慮」與「數學評估焦慮」。對於學習數學有困難的學生，學生長期來自數學上的挫敗通常都來自於考試，對數學產生焦慮、排斥與逃避，會降低其學習數學的意願，心理學家認為適度的焦慮能發揮良好的學習效果，過度則會有不良的影響(魏麗敏，1991)，劉育春、陳柏霖、洪兆祥(2017)的研究中也指出，焦慮感的提升會影響學生在數學學業成就上的表現。

數學焦慮被發現是一種與數學最有關的情緒問題之一，數學焦慮經常伴隨著學習而產生。Morsanyi, Busdraghi & Primi(2014)研究中指出數學焦慮與認知反射測試(cognitive reflection test, 簡稱CRT)具有相關性，該項測試的目的是測試人類的認知反射，也可以稱為直覺，直覺是一種情緒化的表現，例如：「我不喜歡數學，我說不上來為什麼，但是我就是不喜歡」。研究中指出直覺可預測個人的決策能力，當個體同時面對情緒和需即時處理的問題時，往往都會未經深思熟慮而下決策。該研究也表明數學焦慮的高低會影響接受錯誤答案的程度，與認知反思呈現負相關，也就是說數學焦慮可能會間接影響到個人的決策能力，因此情緒會左右一個人的決策，失去理性思維。

因此，本研究將對產生數學焦慮的因素進行初步探討，試圖分析出可能影響數學焦慮之因素，進一步瞭解學習者的數學焦慮狀況，使教學者能夠找出因應方法。綜合上述，結合各研究者的觀點，本研究經歸納後認為數學焦慮意涵為當個體在處理數字運算、學習數學、面對數學考試以及尋求數學課業協助時，心理所產生的緊張、不安、畏懼等……反應。

參、研究方法

一、研究對象

本研究採用問卷調查法之便利取樣，以全台公私立大專院校學生(不包含碩、博士生)為母體，於 111 年 10 月至 111 年 11 月進行施測，有效樣本合計共 247 份，以下表 1 列出施測對象人數之百分比，其中包含 87 位男生及 160 位女生，與數學或數學教育相關系所有 61 位，其他系所的學生有 186 位。

表 1 施測對象人數之百分比

大專院校生背景變項	分項	人數	百分比
性別	男性	87	35.2%
	女性	160	64.8%
數學專業背景	數學或數學教育相關系所	61	25.1%
	其他系所	186	74.9%

二、研究流程

在研究開始之前，研究者先行確定主題，選擇研究對象為大專院校生，探討國內外數學焦慮相關文獻並且進行分析，綜合 Alexander & Cobb (1989)與 Plake & Parker (1982)的研究，研究者比較兩個數學焦慮量表中的向度差異，整理後研擬出本研究數學焦慮量表之向度，依照國內數學教育文化進行編定，接著將量表透過線上發放與回收，回收之量表資料進行編號與整理，而後運用 SPSS 統計軟體將數據資料依據研究目的進行分析，最後撰寫成論文。

三、研究工具

本研究以大專院校生作為研究對象，結合數學焦慮各面向編製成一份「數學焦慮量表」，本研究工具分為兩個部分，第一部分為填表者的「個人背景資料」，內容包含填答者的性別、年級、就讀科系，共計三項，其主要目的是在了解大專院校生各項背景後進行分析。第二部分為「數學焦慮量表」，依據 Alexander & Cobb (1989)的研究，結合 Plake & Parker (1982)的研究作為量表編製基礎，綜合國內教育文化，將其發展為適合測量大專院校生之數學焦慮量表，本量表一共設計四個數學焦慮向度，分別為學習數學的焦慮、數學考試的焦慮、數字運算的焦慮與尋求他人協助數學的焦慮。

(一)個人背景變項：

- 1.性別分別為男性、女性。
- 2.就讀系所：分為數學或數學教育相關系所與其他系所。

(二)數學焦慮向度：

此量表共設計四項數學焦慮向度，四個向度如下：

1. 學習數學的焦慮：當個體在學習數學或與參與數學相關活動時，所產生的焦慮，例如：了解數學公式的由來。
2. 數學考試的焦慮：當個體面臨數學測驗的情境下，因心理壓力產生暫時性的焦慮，例如：數學考試前未充分準備。
3. 數字運算的焦慮：當個體在處理生活上的數字、解決數學問題時所涉及之數字計算所產生的焦慮，例如：解決數學四則運算的問題。
4. 尋求他人協助的焦慮：當個體遇到數學上的困難，欲尋求他人的幫助時所產生的焦慮，例如：過度擔憂他人眼光、對自己缺乏自信...等。

(三)填答與計分方式：

本研究採用語意差別法，選取非常不焦慮、非常焦慮為相對兩種極端詞，在兩形容詞間有 5 個區間，計分 1 至 5 分，愈高分者表示從該情境中感到焦慮感愈高，反之則愈低。

四、結果分析

此研究主要目的是為了能發展一份具有良好信度與效度的量表，因此研究者將蒐集之資料進行各項結構的分析。本研究採用線上問卷蒐集資料，首先將有效樣本進行編碼，而後利用 SPSS 統計套裝軟體進行各項資料的結構分析。依據資料蒐集之結果，進行信度分析、因素分析，建構出一份具有良好結構之量表。

肆、研究結果

一、信度分析

本研究採用 Cronbach's Alpha 係數來檢視題目間的內部一致性，整份量表分析結果 Cronbach's Alpha 值為.979，表示本研究所發展數學焦慮量表信度可以接受，各分量表的 Cronbach's Alpha 值如下表 2 所示。

表 2 各分量表信度分析表

各項度名稱	題數	分量表 Cronbach's Alpha 值
學習數學的焦慮	12	.973
數學考試的焦慮	7	.945
數字運算的焦慮	7	.934
尋求他人協助的焦慮	7	.965

二、數學焦慮量表因素分析

本研究利用 Bartlett 球型檢定以及 KMO 以確認是否進行因素分析，KMO 取樣適切性量數為.95，Bartlett 球型檢定值達顯著水準($p < .01$)，此表示該量表適合進行因素分析，為了更準確的檢驗題目間的相關程度，本研究將因素設定為一個主成分以檢驗每個題目是否分屬於不同因素當中。

分析結果顯示各題目的因素負荷量(分析結果如下表 3 所示)，結果清楚呈現各題目分屬於不同因素，另外，「數學考試的焦慮」與「尋求他人協助的焦慮」中的各題，均與本研究原假設的歸類因素相同，研究還發現在「學習數學的焦慮」

與「數字運算的焦慮」中的各題，均歸類至同一因素，未符合本研究原假設的歸類因素，表示兩因素有高度重疊性，因此，應該將此兩因素進行合併為一個因素。

表 3 數學焦慮量表因素分析摘要表

原假設 向度	題號	因素負荷量			
		因素一	因素二	因素三	因素四
學習數學 的焦慮	1	0.705	0.215	0.382	0.312
	2	0.722	0.248	0.380	0.259
	3	0.786	0.217	0.357	0.130
	4	0.767	0.290	0.248	0.046
	5	0.780	0.332	0.238	-0.013
	6	0.730	0.287	0.225	-0.092
	7	0.766	0.245	0.349	-0.007
	8	0.757	0.329	0.287	0.176
	9	0.800	0.199	0.273	-0.003
	10	0.786	0.318	0.274	0.003
	11	0.771	0.350	0.298	0.047
	12	0.756	0.362	0.225	0.003
數學考試 的焦慮	13	0.496	0.170	0.701	0.065
	14	0.266	0.110	0.856	-0.156
	15	0.306	0.149	0.806	-0.249
	16	0.367	0.157	0.809	0.124
	17	0.420	0.230	0.727	0.239
	18	0.317	0.189	0.847	0.050
	19	0.144	0.178	0.717	0.361
數字運算 的焦慮	20	0.537	0.420	0.300	0.271
	21	0.667	0.404	0.145	0.423
	22	0.763	0.356	0.180	0.243
	23	0.738	0.368	0.243	0.131
	24	0.725	0.198	0.363	-0.182
	25	0.739	0.243	0.250	-0.087
	26	0.555	0.238	0.438	-0.227
尋求他人 協助 的焦慮	27	0.297	0.849	0.192	-0.117
	28	0.336	0.828	0.226	-0.159
	29	0.277	0.827	0.100	0.224
	30	0.298	0.859	0.198	-0.105
	31	0.308	0.828	0.089	0.233
	32	0.366	0.847	0.199	-0.040

33 0.291 **0.813** 0.156 0.233

三、數學焦慮量表的描述性分析

透過描述性分析，說明施測者在不同性別的數學焦慮的差異情形，以下表 4 為獨立性 t 檢定的分析結果，從表中可得知男性及女性樣本數分別為 87 人與 160 人，將性別分為男、女兩組進行差異比較，不同性別的大專院校生在數學焦慮中的「數學考試的焦慮」、「數字運算的焦慮」、「數學焦慮」呈現顯著差異，且女性大專院校生的得分平均高於男性，其餘「學習數學的焦慮」、「尋求他人協助的焦慮」兩向度在不同性別的得分上，均為女性高於男性，但均無達到顯著差異。

表 4 不同性別的大專院校生在數學焦慮的差異比較摘要表

向度名稱	性別	人數	平均數	標準差	t 值
學習數學的焦慮	男	87	29.64	13.40	-1.784
	女	160	32.85	13.54	
數學考試的焦慮	男	87	20.31	8.11	-4.905***
	女	160	25.21	7.14	
數字運算的焦慮	男	87	17.03	7.87	-2.600*
	女	160	19.66	7.43	
尋求他人協助的 焦慮	男	87	14.84	7.30	-.851
	女	160	15.66	7.16	
向度總分	男	87	81.83	32.74	-2.745**
	女	160	93.38	30.93	

*p<.05 **p<.01 ***p<.001

透過描述性分析，說明施測者在不同專業背景下數學焦慮的差異情形，以下表 5 為獨立性 t 檢定的分析結果，將專業背景分為數學或數學教育相關系所及其他系所兩組進行差異比較，從表中可得知數學或數學教育相關系所及其他系所樣本數分別為 61 人與 186 人，兩組的大專院校生在數學焦慮中的「學習數學的焦慮」、「數學考試的焦慮」、「數字運算的焦慮」、「尋求他人協助的焦慮」、「數學焦慮」均呈現顯著差異，且其他系所的大專院校生得分平均皆高於數學或數學教育相關系所的大專院校生，可由此看出就讀數學或數學教育相關系所的學生相較於就讀其他系所的學生，有著較低程度的數學焦慮，

表 5 不同專業背景下的數學焦慮大專院校生差異比較摘要表

向度名稱	背景	人數	平均數	標準差	t 值
學習數學的 焦慮	數學或數學教育 相關系所	61	22.95	10.27	-7.119***
	其他系所	186	34.60	13.28	
數學考試的 焦慮	數學或數學教育 相關系所	61	19.36	7.40	-4.955***

	其他系所	186	24.83	7.51	
數字運算的 焦慮	數學或數學教育 相關系所	61	13.26	6.38	-7.020***
	其他系所	186	20.53	7.21	
尋求他人協 助的焦慮	數學或數學教育 相關系所	61	11.97	6.27	-4.712***
	其他系所	186	16.48	7.15	
數學焦慮	數學或數學教育 相關系所	61	67.54	27.94	-6.6375***
	其他系所	186	96.45	30.01	

*** $p < .001$

伍、結論

本研究結合過去研究者探討數學焦慮的面向，發展適合測量大專院校生數學焦慮的量表，經分析後得出良好品質，適合施測在大專院校學生上。經研究發現，「學習數學的焦慮」與「數字運算的焦慮」無法如原先假設為兩向度，由於在國內外教育的差異，推測國內學生在學習數學的過程中，當面臨數字時，通常會無心計算，原因可能為突然面對大量數字、無法應用在生活情境，學生可能認為計算並非在解決生活問題，而是為了學習數學，因此，本研究建議未來可將「數字運算的焦慮」歸類至「學習數學的焦慮」此因素中，以符合國內數學教育之現況。

另外，從描述性統計分析結果中看出，不同性別在「數學考試的焦慮」、「數字運算的焦慮」、「數學焦慮」上具有顯著差異，且女性平均分數高於男性；在不同的專業背景下，數學或數學教育相關系所與其他系所的學生在數學焦慮上各向度皆有顯著差異，且數學或數學教育相關系所的學生相較其他系所的學生有著較低的數學焦慮。

研究者建議，未來可進行特定情境所產生之數學焦慮與學生成就表現的研究，深入探討可能影響學生產生數學焦慮的因素，由於現今教育尚以考試為重，考試目的為測出學生實力所在，學生當面對考試時，過度的焦慮可能會降低學生的表現，適當的焦慮或許會為學生帶來正面效益。

參考文獻

一、中文文獻

- 王雅玲、秦爾聰 (2008)。實施探究教學對學生數學焦慮的影響。《台灣數學教師電子期刊》，15，41-53+55。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要 (總綱)。臺北市：教育部。
- 陳義汶 (2007)。國中生數學焦慮及態度與數學課後補習之研究。《臺南科學報 (人文管理)》，26，43-64。

- 甯自強 (1983)。數學恐懼症的治療與預防。 *教育資料文摘*, **11**(6), 119-127。
- 彭淑玲、王佩琪、林宏泰 (2017)。你求助嗎? 個人目標導向與適應/非適應課業求助/避助行為之關係。 *教育心理學報*, **49**, 267-293。
- 劉育春、陳柏霖、洪兆祥 (2017)。以數學學業復原力為調節角色：國中生數學考試焦慮與數學學業成就之關係。 *課程與教學*, **20**(4), 151-176。
- 蔡清田 (2014)。十二年國教課程綱要核心素養。 *師友月刊*, **566**, 17-22。
- 魏麗敏 (1991)。國民中小學生一般焦慮、數學焦慮及數學態度之比較研究。 *台中師院學報*, **5**, 129-154。
- 魏麗敏 (1996)。國小學生學習動機、數學焦慮與數學成就之研究。 *國民教育研究集刊*, **4**, 133-155。

二、英文文獻

- Alexander, L., & Cobb, R. (1989). Identification of the dimensions and predictors of math anxiety among college students. *Journal of Human Behavior & Learning*, **4**(1), 25-32.
- Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). Handbook I, cognitive domain. Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals. *New York: Longman*.
- Carey E., Hill F., Devine A., Szücs D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology*, **6**, 1987-1987.
- European Parliament and the Council of European Union (2006). *Official Journal of the European Union*, L 394/10, 962/EC/2006.
- Gonzalez, H. B., & Kuenzi, J. J. (2012). Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education: A primer. *Congressional Research Service, Library of Congress*.
- Morsanyi, K., Busdraghi, C., & Primi, C. (2014). Mathematical anxiety is linked to reduced cognitive reflection: a potential road from discomfort in the mathematics classroom to susceptibility to biases. *Behavioral and Brain Functions*, **10**(1), 1-13.
- Plake, B. S., & Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Educational and Psychological Measurement*, **42**(2), 551-557.
- Schmitz, E. A., Salemink, E., Wiers, R. W., & Jansen, B. R. (2022). Test of measurement invariance, and evidence for reliability and validity of AMAS Scores in Dutch Secondary School and University Students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, **40**(5), 663-677.
- Spielberger, C. D. (1966). Theory and research on anxiety. *Anxiety and Behavior*, **1**(3), 12-16.
- Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The relationship between math anxiety and

2023 年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集

2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th International Conference on Technology and Mathematics Education

math performance: A meta-analytic investigation. *Frontiers in Psychology*, 10, 1613.

A Preliminary Study on College Students'

Mathematics Anxiety

Yue-Sheng Huang¹ Yuan-Horng Lin²

¹ Department of Mathematics Education, National Taichung University

² Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

This research aims to develop the mathematics anxiety scale and explore the mathematics anxiety in college students. In our country, there is still a lack of a mathematics anxiety scale with a complete structure and good test quality, which can be used as a follow-up research to understand the mathematics anxiety of domestic college students. The mathematics anxiety scale for college students has four dimensions including learning mathematics anxiety, mathematics test anxiety, mathematical operation anxiety, and asking for help anxiety. The study organizes and compares the definitions of mathematics anxiety, integrate the dimensions proposed by many researchers on mathematics anxiety, and develop a mathematics anxiety scales suitable for domestic college students. The subjects of the study were 247 college students. Based on the data obtained from the analyses, the conclusions of this study are as follows. This study indicate that mathematics anxiety scale is a reliable measurement tools measures students' mathematics anxiety condition toward mathematics. The value of Cronbach's Alpha 0.979 which has indicated that the scale has high reliability. The factor analysis showed that learning mathematics anxiety and mathematical operation anxiety should be classified as the same factor. There are significant differences of different genders in mathematics test anxiety, mathematical operation anxiety, and mathematics anxiety. And the average score of women is better than men. Under different professional backgrounds, college students with professional background in mathematics, mathematics education, and others have significant differences in all dimensions of mathematics anxiety. And college students in mathematics and mathematics education-related institutes have lower math anxiety than students in other departments.

Key words: anxiety, mathematic anxiety, math anxiety scale

臺灣 STEM 教育課程之定義與《形塑未來》一書之啟示

張鴻文¹、李齊恩²、王治凱³

¹ 國立台灣師範大學教育學系 61000013e@gapps.ntnu.edu.tw

² 新竹市東區水源國民小學 jedidiah0328@tmail.hc.edu.tw

³ asdf87915@gmail.com

摘要

本研究發想自林坤誼 (2018) 一文，嘗試補足該文於探討臺灣 STEM 教育課程和教學活動時較為欠缺之微觀視角論述，本研究關注面向為「STEM 教育定義」。根據本研究微觀視角分析結果發現，臺灣 STEM 教育課程之 STEM 教育定義仍有不足之處，如教育對象和學習模式條件等。對於此等情況，本研究將借助於美國首次以 STEM 高度相關教育為主軸之手冊作為參照，嘗試補充臺灣 STEM 教育定義，由此回應前二者之疑慮。

關鍵字：

臺灣 STEM 教育課程、《形塑未來：大學科學、數學、工程與科技教育的新期待》

壹、緒論與研究目的

林坤誼 (2018) 彙整臺灣 STEM 教育近代發展，點出雖已有 STEM 教育和 STEAM 教育精神於十二年國民基本教育課程綱要 (以下簡稱 108 課綱) 內，但仍有三點挑戰需要仔細面對：缺乏系統性規劃和 STEM 教育目標；欠缺有系統的 STEM 教育師培體系；缺少多樣且具彈性的 STEM 教育課程和教學活動。

然而，該研究對我國現場實務研究多以較宏觀視角陳述教育政策、教學現場實務以及非正式教育場域等要點，對各項目的細部內容較少描述。因此，本研究於此將嘗試補足該研究於教學現場實務之內容，並以「分析臺灣 STEM 教育課程實踐研究之 STEM 教育定義」作為研究目的一；並嘗試於美國首次發佈 STEM 教育相關資料之手冊為參照，以「釐清最初 STEM 教育雛形之 STEM 教育定義」作為研究目的二。

因此，根據前述兩點研究目的，本研究將選取「文獻分析法」(Literature Review) 作為本研究之研究方法。文獻分析法，為蒐集且分析相關文獻後，據此得出推論的研究方法；相關文獻範疇包含期刊、論文等資料(謝文全等人，2006)；分析的步驟常見為閱覽、整理、描述、分類、詮釋等(林生傳，2003)。

綜上所述，本研究為求釐清臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況，將採用「文獻分析法」作為本研究之研究方法。首先，本研究將先行蒐集與彙整臺灣

STEM 教育課程實踐研究論文後，再行描述與分類，最後詮釋臺灣當前 STEM 教育課程實踐研究中對 STEM 教育定義之理解，回應研究目的的一；接著，自美國首次以 STEM 相關教育作為主軸之手冊，闡明最初之 STEM 教育理想，以此作為研究目的二的探詢。

貳、分析臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況之 STEM 教育定義

於〈分析臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況之 STEM 教育定義〉中，首先，本研究將簡述本研究所使用之文獻分析架構以及本研究選取之臺灣 STEM 教育課程實踐研究範圍後；其次，描述將此架構應用於臺灣 STEM 教育課程實踐研究後的分析結果；最後，表述前述分析結果浮現的臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況，藉此闡述當前於臺灣 STEM 教育課程中可能潛在之挑戰與疑慮。

一、簡述臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況文獻分析架構與研究範圍

於此，本研究將先行簡述應用於課程實踐研究現況文獻分析架構的表格格式，再行述明本研究所選定的臺灣 STEM 教育課程實踐研究之研究範圍。

(一) 簡述臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況文獻分析架構

於本研究中，本研究將關注臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況，並以「STEM 教育定義」作為文獻分析架構之設計，以嘗試更理解當前於臺灣實施之 STEM 教育課程實踐研究中，多以何種方式為形容「STEM 教育」之方法。

綜上所述，本研究將以文獻分析架構表（如表格 1）作為本研究之文獻分析架構工具，以此架構分析臺灣 STEM 教育課程實踐研究之 STEM 教育定義。

表格 1 臺灣 STEM 教育課程實踐研究文獻分析架構——以《高中 STEM 網路專題式合作學習之研究》為例

作者 (年份)	論文名稱	STEM 教育定義
羅希哲、蔡慧音、曾國鴻 (2011)	高中 STEM 網路專題式合作學習之研究	融合科學、科技、工程、數學等領域，相互統整的一種整合式教育

註：本研究者自行彙整

(二) 述明臺灣 STEM 教育課程實踐研究之研究範圍

首先，本研究以「華藝線上圖書館」作為搜尋工具，查閱 STEM 教育相關論文，共有 53 篇¹；接著，經本研究以立意取樣選擇有「課程實踐」內涵之文

¹於 2023 年 1 月 16 日在華藝線上圖書館中，本研究以「STEM 教育」為關鍵字進行搜尋共有 53 筆相關資料。

獻後，共 20 篇論文²。此即本研究之臺灣 STEM 教育課程實踐研究研究範圍。

二、描述臺灣 STEM 教育課程實踐研究之內容分析結果

以下，首先本研究將依據時間序列為主，姓名筆畫為輔，依序論述 20 篇論文之 STEM 教育定義；接著，將結果以表格進行呈現，作一完整表述；最後，將全部研究結果做一敘述統計，彙整當前臺灣之 STEM 教育定義的分佈情形，並於本段末處提出本研究彙整前述所言後歸結出的「臺灣 STEM 教育定義」。

(一) 論述臺灣 STEM 教育課程實踐研究之內容分析結果

以下，本研究將依序論述本研究所涵蓋之 20 篇論文，並簡述各研究之 STEM 教育定義與課程主設計者之學科領域，作為後續表格構建之基礎外，亦能作為接續之敘述統計之參照。

1. 《高中 STEM 網路專題式合作學習之研究》

第一，羅希哲等人 (2011) 於《高中 STEM 網路專題式合作學習之研究》中將 STEM 教育理解為「STEM 教育」，並透過科學 (S, Science)、科技 (T, Technology)、工程 (E, Engineering) 與數學 (Mathematics) 之相互統整的整合式教育作為定義。

2. 《STEM 教學設計之探討：以液壓手臂單元為例》

第二，張玉山、楊雅茹 (2014) 於《STEM 教學設計之探討：以液壓手臂單元為例》間將 STEM 教育界定為「STEM 課程」，此課程具備 STEM 領域科際整合屬性。

3. 《STEM 取向的科技教育—以鼠夾車為例》

第三，陳冠吟 (2015) 於《STEM 取向的科技教育—以鼠夾車為例》內將 STEM 教育理解為「STEM 教學」，此種教學將科學探究、科技技術、工程設計與數學分析進行結合。

4. 《STEM 教育應用於機器人教學 - 以 6E 教學模式結合差異化教學》

第四，姚經政、林呈彥 (2016a) 於《高中工程設計實作教學活動之設計與發展 - 以乒乓球發射器為例》裡將 STEM 教育理解為「STEM 教育」，並以相輔相成作描述。

5. 《高中工程設計實作教學活動之設計與發展 - 以乒乓球發射器為例》

第五，姚經政、林呈彥 (2016b) 於同年亦發表《高中工程設計實作教學活

² 由前述 53 篇論文中，本研究閱讀各篇論文摘要後，以「立意取樣」之方式選取有具備「課程實踐」實質內涵 (即有具體落實的課程規劃) 之論文作為本研究選擇之文獻，共計 20 篇。

動之設計與發展 - 以乒乓球發射器為例》中將 STEM 教育界定為「STEM 知識」，重視領域整合。

6. 《STEM 取向準工程課程設計：以二氧化碳賽車單元為例》

第六，簡佑宏、張玉山、簡爾君（2016）於《STEM 取向準工程課程設計：以二氧化碳賽車單元為例》間將 STEM 教育界定為「STEM 知識」，以整合四大領域的學科作為表述。

7. 《STEM 教育自幼開始 - 幼兒園主題探究課程中的經驗》

第七，周淑惠（2017）於《STEM 教育自幼開始 - 幼兒園主題探究課程中的經驗》內將 STEM 教育詮釋為「STEM 教學」，此教學除綜合運用 STEM 知能外，亦具有解決日常問題、探究性與統整性之特色。

8. 《從 STEM 觀點教導造型磁鐵之探討》

第八，陳立庭（2017）於《從 STEM 觀點教導造型磁鐵之探討》裡將 STEM 教育理解為「STEM 教育」，且將科技工具與工程設計作為 STEM 教育之核心，科學原理與數學概念作為連結之整合方式。

9. 《應用虛擬實境技術與 6E 教學模式於高中生活科技課程之結構教學單元設計》

第九，周惠柔、林弘昌（2018）於《應用虛擬實境技術與 6E 教學模式於高中生活科技課程之結構教學單元設計》中將 STEM 教育界定為「STEM 課程」，亦重視四者間的科際整合。

10. 《STEM 理論應用在博物館藏品體驗活動設計—以國立科學工藝博物館「520 世界計量日」活動設計為例》

第十，黃俊夫、陳淑菁、黃惠婷（2018）於《STEM 理論應用在博物館藏品體驗活動設計—以國立科學工藝博物館「520 世界計量日」活動設計為例》間將 STEM 教育自「STEM 教學」與「STEM 課程」之取徑劃定：前者重於表達科際整合³的教學方法；後者強調此課程為工程設計取向跨學科整合課程。

11. 《範例引導學習與問題導向學習之教學策略對國小學生機器人程式學習的影響》

第十一，李隆盛、楊秀全（2019）於《範例引導學習與問題導向學習之教學策略對國小學生機器人程式學習的影響》內將 STEM 教育陳述為「STEM 知識」，此種知識具備橫跨 STEM 學科之性質。

³ 該文雖以「科技整合」作為描述，但經本研究閱畢該文後，以為該文所傳達的意旨為「科際整合」。於此，為正確表達該文之觀點，遂以「科際整合」取代「科技整合」一詞。

12. 《STEM 整合教育應用於時尚設計領域之效用》

第十二，葉建宏、洪榮昭、范靜媛（2019）於《STEM 整合教育應用於時尚設計領域之效用》裡將 STEM 教育描繪為「STEM 知識」，將科學、技術、工程、數學各專業學科之獨立單元（Unit）整合為統一之模組（Unity）。

13. 《新興科技融入 STEM 教學之研究 - 以六龜高中執行科技部高瞻計畫為例》

第十三，盧正川、黃新賢、吳百祿（2019）於《新興科技融入 STEM 教學之研究 - 以六龜高中執行科技部高瞻計畫為例》中將 STEM 教育界定為「STEM 教學」，旨在將科學探究、科技技術、工程規劃和數學計算融合於單一課程之統整教學。

14. 《以 POEC 模式發展 STEM 課程應用於國中能源教育之行動研究 - 以風力發電為例》

第十四，王尊玄、王仁俊（2020）於《以 POEC 模式發展 STEM 課程應用於國中能源教育之行動研究 - 以風力發電為例》間將 STEM 教育表述為「STEM 課程」，此課程可提供學生更多設計等學習機會，藉以建構完整的整合與應用之能力。

15. 《設計自我效能、設計興趣和 STEM 學習表現之相關分析：以時尚設計為例》

第十五，范靜媛、葉建宏（2020）於《設計自我效能、設計興趣和 STEM 學習表現之相關分析：以時尚設計為例》內將 STEM 教育表達為「STEM 教育」，藉此教育可讓學生於科際整合之餘亦能感受到與學習的鏈結更為密切。

16. 《STEM 教育對學生科學生涯選擇的影響》

第十六，馬宜平（2020）於《STEM 教育對學生科學生涯選擇的影響》裡將 STEM 教育描述為「STEM 教學」，此種教學可結合 STEM 四大項度的知識內容與技能。

17. 《STEM 模式整合穿戴式擴增實境和穿戴式虛擬實境應用於科學教育：探討科學學習自我效能來源對高中生科學學習自我效能和學習成效之影響》

第十七，游師柔、葉宣靈、孫之元（2020）於《STEM 模式整合穿戴式擴增實境和穿戴式虛擬實境應用於科學教育：探討科學學習自我效能來源對高中生科學學習自我效能和學習成效之影響》中將 STEM 教育視作「STEM 教學」，此教學具備四大屬性：其一，以真實情境為背景；其二，藉由四科目之連結作為後續 STEM 職涯可活用之模式；其三，符合二十一世紀人力所需；其四，藉

由此種以學習者為中心的教學方法完成協助學習者培養問題解決能力之目的。

18. 《STEM 教育融入 2-3 歲幼兒遊戲活動之初探：以植物主題為例》

第十八·林怡滿、曾永禎 (2021) 於《STEM 教育融入 2-3 歲幼兒遊戲活動之初探：以植物主題為例》間將 STEM 教育陳述為「STEM 教育」，此種教育具備整合四大領域專業知識的跨學科性質。

19. 《6E 教學模式結合 STEM 融入大學生專題課程》

第十九·常雅珍、黃寶園、吳詠惠、楊雅筑 (2022) 於《6E 教學模式結合 STEM 融入大學生專題課程》裡將 STEM 教育描述為「STEM 教育」，此種教育旨在跨領域整合，有助學生於解決問題時，一同學習與應用多種學科的知識。

20. 《在專題導向學習課程中探究學生的團隊歷程：採用團隊科學研究的觀點》

第二十·Weng, C. H., & Guo, C. J. (2022) 於《在專題導向學習課程中探究學生的團隊歷程：採用團隊科學研究的觀點》內將 STEM 教育描述為「STEM 知識」以及「STEM 教學」。

以上，即是本研究對於前述 20 篇文章之 STEM 教育定義與課程之學科主要領域之描述，於次段中本研究將前述內容彙整為表格，以利瀏覽與分析。

(二) 表述臺灣 STEM 教育課程實踐研究之結果

以下，即是本研究根據前段〈論述臺灣 STEM 教育課程實踐研究之內容分析結果〉之結果，作一表格進行彙整 (如表格 2)，藉以供後續參照統計之用。

表格 2 臺灣 STEM 教育課程實踐研究內容分析結果表

論文作者 (年份)	論文名稱	STEM 教育定義
羅希哲等人 (2011)	高中 STEM 網路專題式 合作學習之研究	融合科學、科技、工程、數學等領域，相互統整的一種整合式教育
張玉山、楊雅茹 (2014)	STEM 教學設計之探討：以液壓手臂單元為例	融合科學、科技、工程、數學的科技整合課程
陳冠吟 (2015)	STEM 取向的科技教育—以鼠夾車為例	將科學探究、科技技術、工程設計、數學分析等課程領域整合而成的一種教學模式
姚經政、林呈彥	STEM 教育應用於機器	科學、科技、工程、數學四

(2016a)	人教學 - 以 6E 教學模式 結合差異化教學	個學科的縮寫，且「相輔相 成」
姚經政、林呈彥 (2016b)	高中工程設計實作教學 活動之設計與發展 - 以 乒乓球發射器為例	STEM 知識整合
簡佑宏等人 (2016)	STEM 取向準工程課程 設計：以二氧化碳賽車 單元為例	整合科學、科技、工程與數 學的學科
周淑惠 (2017)	STEM 教育自幼開始 - 幼兒園主題探究課程中 的經驗	綜合運用科學、工程、技術 與數學等知能，解決日常生 活中的問題，在學習上具有 探究性與統整性
陳立庭 (2017)	從 STEM 觀點教導造型 磁鐵之探討	以科技工具與工程設計為 主，連結科學原理與數學概 念的 STEM 教育整合方式
周惠柔、林弘昌 (2018)	應用虛擬實境技術與 6E 教學模式於高中生活科 技課程之結構教學單元 設計	STEM 科際整合課程
黃俊夫 等人 (2018)	STEM 理論應用在博物 館藏品體驗活動設計— 以國立科學工藝博物 館「520 世界計量日」活 動設計為例	1. 強調科技整合的教學合 作方式 2. 工程設計取向的跨學科 整合課程
李隆盛、楊秀全 (2019)	範例引導學習與問題導 向學習之教學策略對國 小學生機器人程式學習 的影響	科學、科技、工程和數學 (STEM) 跨學科的知識
葉建宏 等人 (2019)	STEM 整合教育應用於 時尚設計領域之效用	將科學、技術、工程與數學 個專業學科視為各自獨立的 單元 (Unit)，進而整合學 科凝聚成一個模組

		(Unity)
盧正川 等人 (2019)	新興科技融入 STEM 教 學之研究 - 以六龜高中 執行科技部高瞻計畫為 例	融合科學探究、科技技術、 工程規劃和數學計算之課程 統整教學
王尊玄、王仁俊 (2020)	以 POEC 模式發展 STEM 課程應用於國中 能源教育之行動研究 - 以風力發電為例	提供學生更多設計、探究、 分析、測試與綜合評估的學 習機會，以建構完整的整合 與應用的能力
范靜媛、葉建宏 (2020)	設計自我效能、設計興 趣和 STEM 學習表現之 相關分析：以時尚設計 為例	科學、技術、工程與數學之 科技整合教育是一項讓學生 與學習鏈結更加密切的一種 教育模式
馬宜平 (2020)	STEM 教育對學生科學 生涯選擇的影響	整合科學、科技、工程、數 學等四個向度的知識內容及 技能的教學模式
游師柔等人 (2020)	STEM 模式整合穿戴式 擴增實境和穿戴式虛擬 實境應用於科學教育： 探討科學學習自我效能 來源對高中生科學學習 自我效能和學習成效之 影響	1. 真實情境 2. 透過四個科目之間的連 結塑造未來 STEM 職涯 可應用模式 3. 符合二十一世紀所需的 人力專長 4. 運用學習者為中心的教 學法幫助學習者發展問 題解決能力
林怡滿、曾永禎 (2021)	STEM 教育融入 2-3 歲幼 兒遊戲活動之初探：以 植物主題為例	整合四大領域專業知識的跨 學科教育
常雅珍 等人 (2022)	6E 教學模式結合 STEM 融入大學生專題課程	跨領域的整合教育，學生在 解決問題時，同時學習和應 用不同科目的專門知識
Weng, C. H., & Guo, C. J	在專題導向學習課程中	1. STEM 知識

(2022)	探究學生的團隊歷程： 採用團隊科學研究的觀 點	2. STEM 教學
----------	-------------------------------	------------

(三) 統計臺灣 STEM 教育課程實踐研究之 STEM 教育定義之分佈

於此，本研究將統計前述 STEM 教育定義與學科領域之分佈情形，藉以完成文獻分析法之分類，以利後續〈表述臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況分析結果之啟示〉的編撰。

於臺灣 STEM 教育課程實踐研究之 STEM 教育定義裡，本研究閱畢前述內容分析結果後，將 STEM 教育定義分為四大類別：其一為羅希哲等人 (2011) 等之「STEM 教育」；其二為張玉山、楊雅茹 (2014) 等的「STEM 課程」；其三為陳冠吟 (2015) 之「STEM 教學模式」；其四為姚經政、林呈彥 (2016a) 等的「STEM 知識 (整合)」。

綜上所述，本研究將以「STEM 教育」、「STEM 課程」、「STEM 教學模式」和「STEM 知識 (整合)」作為四大類別，將前述 20 篇研究之定義歸類為四大類別，並以表格呈現歸類結果 (如表格 3)。

表格 3 臺灣 STEM 教育課程實踐研究之 STEM 教育定義的分佈情形表

STEM 教育 定義類別	STEM 教育	STEM 課程	STEM 教學 模式	STEM 知識 (整合)	總研究數
數量	3	4	9	6	20 ⁴
佔比	15% ⁵	20%	45%	30%	100%

註：本研究者製表

以前述表格為本，本研究發現目前於臺灣 STEM 教育課程現況中，對於 STEM 教育一詞之定義最常使用之定義為 9 篇研究 (45%) 採用之「STEM 教學模式」，接著則是 6 篇研究 (30%) 選擇之「STEM 知識」以及 4 篇研究 (20%) 選定之「STEM 課程」，最少使用之定義則為 3 篇研究 (15%) 偏好之「STEM 教育」。

(四) 陳述臺灣 STEM 教育課程實踐研究現況分析結果之啟示

⁴ 雖將 STEM 教育、STEM 課程、STEM 教學模式、STEM 知識 (整合) 之總數進行加總，可發現數量合計為 22 次，而非此處所描述之 20 篇。然而，因有部分研究之定義跨越單一類別，故本研究將其劃分至二種類別中，惟因考量研究實際總數，故於此將以 20 篇作為呈現。

⁵ 此處於 STEM 教育之佔比，為以 20 篇作為母群體之數量進行計算之結果，而非以 22 次作為計算之成果。後續之佔比與此相同，皆以 20 篇為分母進行計算的數值，本研究不再贅述。

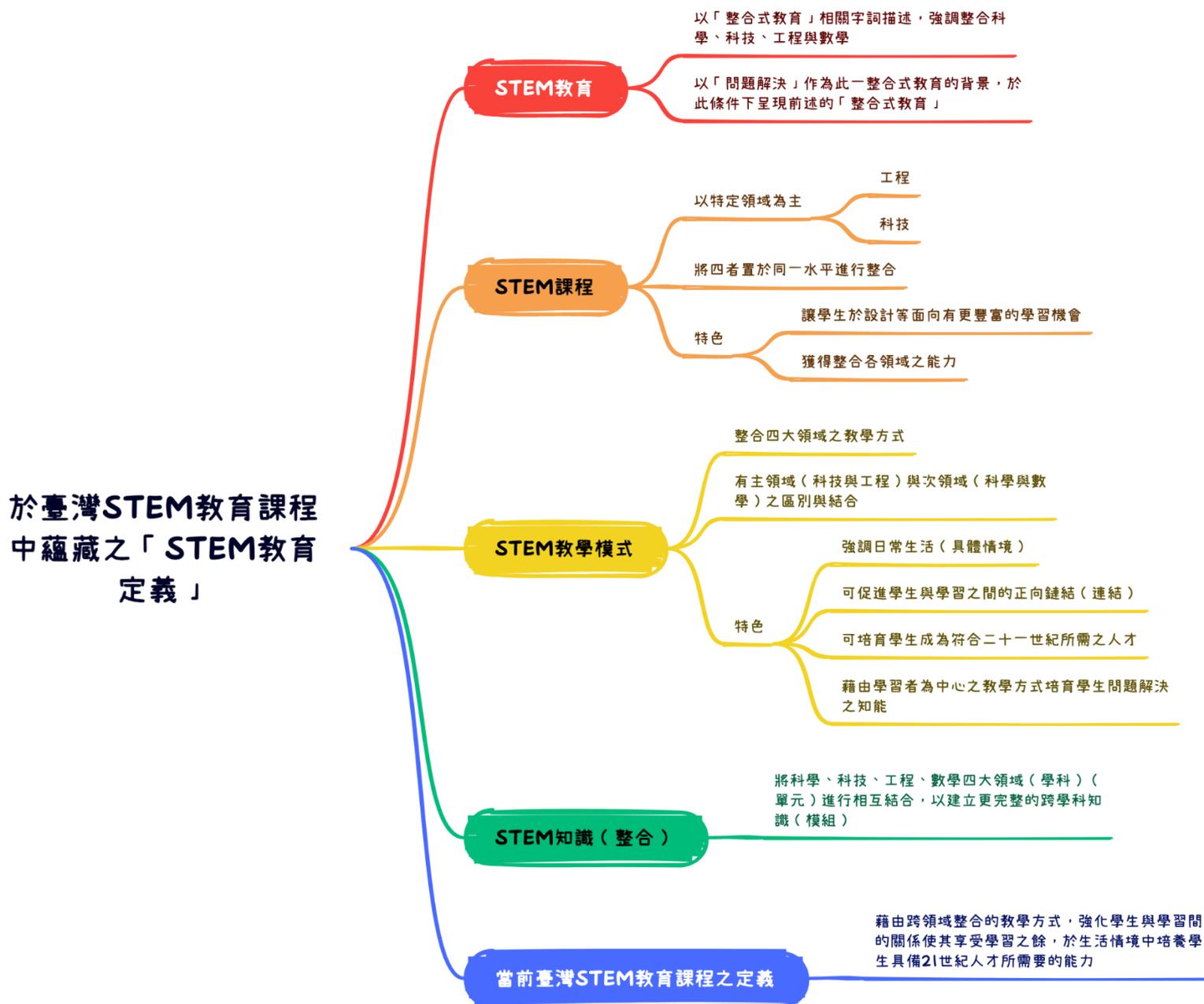
最後，本研究將集結前述所言，描述本研究於前述內容分析結果中所窺見與彙整之發現，進而論述當前臺灣 STEM 教育於 STEM 教育課程之普遍定義。

首先，本研究以為無論前述之 STEM 教育、STEM 課程、STEM 教學與 STEM 知識之觀點，皆重視並強調於 STEM 教育之名以下所涵蓋之事物，必然強調其跨領域整合之意涵。惟因切入觀點或有教育、課程、教學或知識之區分，但是仍不應去除「跨領域結合」之核心價值。

其次，於此核心價值之下，本研究發覺於 STEM 教育與 STEM 教學之背景下，皆有強調「問題解決」之內涵；於 STEM 教學中則進一步強調「生活情境」、「強化學生與學習間的關係」和「21 世紀人才所需要的能力」。

最後，本研究將嘗試以前述分析結果作一總結，以此結論論述當前於臺灣 STEM 教育課程之定義。本研究以為，當前臺灣 STEM 教育課程定義為「藉由跨領域整合的教學方式，強化學生與學習間的關係使其享受學習之餘，於生活情境中培養學生具備 21 世紀人才所需要的能力」(如圖 1)。

圖 1 於臺灣 STEM 教育課程中蘊藏之「STEM 教育定義」之綜合分析圖



註：本研究者繪製

參、提升臺灣 STEM 教育課程品質之取徑——以「教育史學」為例

於〈提升臺灣 STEM 教育課程品質之取徑——以「教育史學」為例〉內，首先，本研究將先回顧目前臺灣 STEM 教育研究的 STEM 教育定義，並進一步指出後續可能可以進行補充之面向；其次，以教育史學為例，找尋美國 STEM 教育之名最早的命名以及其淵源；最後，則藉此二者，探討以此二者豐富我國 STEM 教育課程之可能性與實例。

一、臺灣 STEM 教育研究於 STEM 教育定義之不足處

經由本研究研讀當前臺灣 STEM 教育課程的 20 篇相關文獻後，本研究歸納當前臺灣 STEM 教育可被定義為「藉由跨領域整合的教學方式，強化學生與學習間的關係使其享受學習之餘，於生活情境中培養學生具備 21 世紀人才所需要的能力」。但是，此定義仍有未完善之處，以下本研究將逐點說明。

(一) 臺灣 STEM 教育對象為何？是特定族群亦或是全體皆需要受教？

首先，第一點為臺灣 STEM 教育對象。對此，臺灣因尚無任何政府的公文或是手冊，推動全國級別之 STEM 教育，因此並無可供參照之教育對象指南。因此，本研究以為首點需要進行留意之處，即是授課學生之選定。方有界定良好之學習者，才有機會因材施教，甚者「適性揚才」。

(二) STEM 教育期待之學習模式除跨領域整合外，是否仍有其他條件？

其次，當前臺灣學界多以「跨領域整合」作為 STEM 教育的核心共通處，但是除卻此點之後，STEM 教育是否仍有其他的特性？或此點即是唯一屬性？

由此，本研究將嘗試自最初首次定義 STEM 教育相關的手冊內，找尋對於 STEM 教育最初樣貌的重點與目的，藉以回應此二者的疑惑。

二、以教育史學為例——談美國 STEM 教育之名緣起與最初定義

於本段落中，本研究將先行論述當前臺灣學界以為之 STEM 教育緣起或有可討論之點，並提出相關論據藉以證成本研究之猜想與論述；其次則自《形塑未來：大學科學、數學、工程與科技教育的新期待》(Shaping the Future: New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology)(以下簡稱《形塑未來》)一手冊中，彙整 STEM 教育最初之定義，藉以提供本研究後續規劃 STEM 教育課程時的參照。

(一) STEM 教育緣起之再討論

當前於臺灣學界中張仁家、林癸妙(2019)指出美國 STEM 教育發展可區分為奠基期、發展期及變革期，更點出多位學者以為 STEM 教育開端是《大學的科學、數學與工程教育》(Undergraduate Science, Mathematics and Engineering Education)但本研究詳閱該手冊後，發覺此結論或有可再討論之處。

首先，於 1986 年由美國國家科學委員會所發佈之《大學的科學、數學與工程教育》，該文於科技(Technology；或譯技術)層面之描述，並不若其餘科學、數學或工程重要；該文僅以科學、數學和工程作為「學科觀點」

(Disciplinary Perspectives)進行此領域說明，但尚無將「科技」(Technology)視為與前三者「同等」地位之教育，因而若以此作為「四者並重」的 STEM 教育之開端，或有再行討論之處。

因此，本研究以為於《大學的科學、數學與工程教育》中，因為此手冊注

重科學 (Science)、數學 (Mathematics) 和工程 (Engineering) 教育，且於此手冊中以「SME 教育」自居：雖此三者皆為 STEM 教育重要元素，但仍缺少科技 (Technology)，故雖不可否認其與 STEM 教育有著密切關係，然而此手冊卻未及後續所論述之 STEM 教育的完整性，因此本研究推論，若將《大學的科學、數學與工程教育》作為 STEM 教育之開端或有不妥之處。

然而，本研究持續閱讀 National Science Board [NSB] 與 National Science Foundation [NSF] 後續文獻，發現美國國家科學基金會於 1996 年發布之《形塑未來》，此手冊以「SME 教育」為基礎，加上「&T」作為表示，以彰顯「SME&T 教育」作為新教育形式之創見。

故本研究因於《形塑未來》一手冊提及之 SME&T 教育與 STEM 教育各領域相近，僅是排序殊異，因此本研究以為《形塑未來》可作美國 STEM 教育濫觴。同時，林坤誼 (2018) 彙整臺灣自國民中小學九年一貫課程綱要 (以下簡稱九貫課綱) 至今之 108 課綱的變革，遂指出過去之九貫課綱較為傾向於 SME 教育，而當今的 108 課綱則是較符應 STEM 教育與 STEAM 教育精神。故綜上所述，此次探詢《形塑未來》一書之 SME&T 教育除可作為 STEM 教育追本溯源以求最初定義之校訂外，更能符應當前臺灣實施之 108 課綱核心精神，將此一結果提供予欲實施 STEM 教育課程之教育者參照。

(二) 於《形塑未來：大學科學、數學、工程與科技教育的新期待》之 SME&T 教育定義

於此，本研究將彙整於《形塑未來》中對於 SME&T 教育之重點與目的，從中進行 SME&T 教育的定義，以資後續參照。

1. 於《形塑未來》之 SME&T 教育的重點

於《形塑未來：大學科學、數學、工程與科技教育的新期待》中，對於 SME&T 教育特別強調六點重點，並清楚指出此六項對於 SME&T 教育的重要性。此六點分別為：

- (1) 特別強調真實世界的問題；
- (2) 跨領域知識的整合；
- (3) 關注於過程如何進行 (如何擬定研究問題、獲取問題相關的資訊、評量資訊的品質)；
- (4) 運用資訊與數學能力探討 SME&T 領域中的相關概念；
- (5) 增進軟實力 (如溝通、團隊合作、認知技能等)；
- (6) 理解失敗中學習的概念與實踐。

(National Science Foundation [NSF], 1996, pp. 17-18)

以上六點，即是本研究以為於《形塑未來》中，對於 SME&T 教育之重點，需滿足此六點條件方能算是《形塑未來》所指之 SME&T 教育。若此六點任何一點並未於宣稱為「SME&T 教育」之課程實踐或教學設計中出現，本研究便以為該課程實踐或教學設計或有歸類為「SME&T 教育」之疑慮，仍有待提倡或推動該課程實踐或教學設計者再次反思何謂「SME&T 教育」的本質。

2. 於《形塑未來》之 SME&T 教育的目標

於《形塑未來》中，對於 SME&T 教育闡述四點希望達成之目標，並清晰點明後續 SME&T 教育前行方向。四點依序為：

(1) 全部 (all)

SME&T 教育的實施，應包含女性、少數團體與身心障礙者等人，而不單單僅是於美國文化中較重視的白人男性。

(2) 支持 (supportive)

在學校、家庭或各級教育機構中，各界人士與教師皆應鼓勵學生參與令人生畏且被視為僅適合少數人之 SME&T 領域，於此領域進行深造學習。

(3) 傑出 (excellent)

社會以及各組織機構，都應對主修 SME&T 領域的學生或於此領域工作者有高期待與要求，同時相對也應提供極佳相關教育的經驗與品質以扶持其專業成長。

(4) 探索 (inquiry):

學生在進行 SME&T 教育的同時，應能於此活動中理解科學本質同時參與科學探索 (scientific inquiry) 的過程，而不只是動手做 (hands on) 的操作活動而已。

(NSF, 1996, p. 2)

以上，即是本研究以為於《形塑未來》中對 SME&T 教育之目標。

3. 於《形塑未來》之 SME&T 教育的基本定義

本研究於此將嘗試定義於《形塑未來》一手冊中的 SME&T 教育之基本定義，以下將先概述 SME&T 教育之重點後，再陳述 SME&T 教育之目標，最後以此二者為根本，呈現本研究於《形塑未來》彙整之 SME&T 教育基本定義。

首先於《形塑未來》中對 SME&T 教育重點有六點：其一，強調真實世界問題；其二，整合跨領域知識；其三關注過程；其四，將資訊與數學作為探索 SME&T 領域知識之工具；其五，增進軟實力；其六，從失敗中學習 (NSF, 1996, pp. 17-18)。

接著於《形塑未來》中對 SME&T 教育的目標有四點：向所有人皆提供

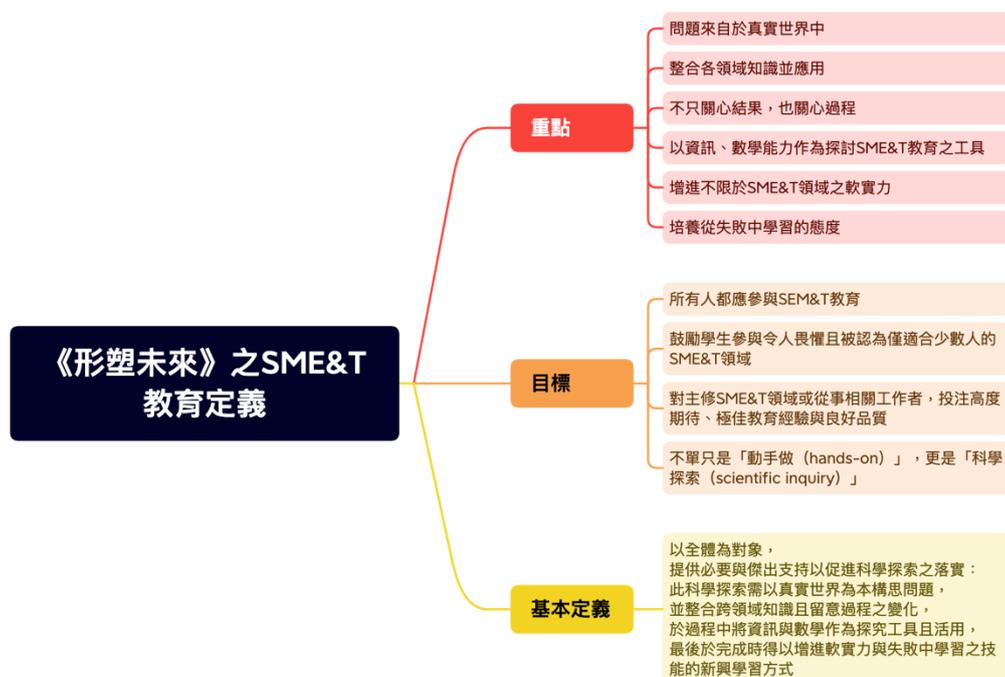
SME&T 教育之「全部」、於各教育機構與家庭皆提供 SME&T 領域學習機會之「支持」、社會及各教育機構皆提供高期待、高標準、高品質 SME&T 教育之「傑出」、不單強調「動手做」同時也留意「科學探究」過程之「探索」(NSF, 1996, p. 2)。

最後，本研究將根據前述重點與目標歸納 SME&T 教育為：

「以全體為對象，提供必要與傑出支持以促進科學探究之落實：此科學探究需以真實世界為本構思問題，並整合跨領域知識且留意過程之變化，於過程中將資訊與數學作為探究工具且活用，最後於完成時得以增進軟實力與失敗中學習之技能的新興學習方式。」

前述定義，即是本研究以《形塑未來》所闡述之 SME&T 教育重點與目標為基礎彙整之 SME&T 教育基本定義 (如圖二-2)。

圖 2 《形塑未來》之 SME&T 教育重點、目標與定義圖



註：研究者自行繪製，資料整理自 Shaping the Future: New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology (p. 2, 16-17), by National Science Foundation, 1996.

(三) SME&T 教育與 STEM 教育之名詞轉變

Granger (2016) 和 Salinger & Zuga (2009) 皆指出，因 SME&T 發音近似於 SMUT，而 SMUT 有「黑穗病」之意思，此詞有負面意涵。因此，自 2001 年起由美國國家科學基金會的教育和人力資源 (Education and Human-Resources) 部主任 (director) Judith A. Ramaley 更名為 STEM 教育 (Breiner, Harkness, Johnson, Koehler, 2012)。自此，STEM 教育的縮寫已然替代 SME&T

教育，成為形容「理工科」教育的代名詞。綜前所述，本研究以為 STEM 教育近似於 SME&T 教育，兩者間可進行正當連結與對話。

三、藉教育史學觀點反思臺灣 STEM 教育課程現況之疑惑

是以，於前一篇幅中本研究回顧美國之 STEM 教育緣起至關重要的《形塑未來》一書對於作為 STEM 教育易名之 SME&T 教育的重點與目的，藉以綜合 STEM 教育之最初定義。於此，本研究將嘗試藉由此一定義，即「以全體為對象，提供必要與傑出支持以促進科學探究之落實：此科學探究需以真實世界為本構思問題，並整合跨領域知識且留意過程之變化，於過程中將資訊與數學作為探究工具且活用，最後於完成時得以增進軟實力與失敗中學習之技能的新興學習方式」，回應於臺灣 STEM 教育課程中教學對象和學習模式的疑惑。

(一) 授課對象應以全體作為對象，並提供必要支持與資源以助正向學習

第一，於當前臺灣的 STEM 教育定義「藉由跨領域整合的教學方式，於生活情境中培養學生具備當前世紀人才所需要的能力之餘，亦強化學生與學習間的關係使其享受學習」下，並未清楚描述授課對象之範疇。然而，此等不足處可於《形塑未來》一手冊的「目標」找尋到相關的補充，藉以劃定範圍。

首先，此等授課對象於美國之脈絡下，被詮釋為「全體」，亦即不分性別、團體或是身心障礙與否之限制，皆應有接受 SME&T 教育之權利；其次，對於此等全體之教育，應盡到「支持」的政府與教育機構職責，使每位學生皆可以有相對的資源獲得幫助。

其次，若將此等全是應用於臺灣之脈絡下，則可發覺雖台灣較少對於少數民族之壓迫或是人種間的對立，但是仍存在「男理工，女人文」的性別偏見，如蔡麗玲（2017）指出傳統教育家常倡導「男女大不同」反而導致此等性別偏見之加大，反造成科技領域的男女懸殊，並對此提出批判與省思。

因此，本研究以為性別之議題，或是臺灣當前世代理應面臨的 STEM 教育挑戰之一：考量前述研究結果，本研究提醒當前臺灣 STEM 教育宜重視「性別平等」之概念，並將全體學生皆納入 STEM 教育的授課對象內，以提供更為完善與全面的教育資源交予每位學生，使其皆可獲得支持與資源得以正向成長。

(二) 學習模式除應跨域結合外，亦需科學探究、觀察過程、軟實力和試誤學習

第二，於此時臺灣的 STEM 教育定義「藉由跨領域整合的教學方式，於生活情境中培養學生具備當前世紀人才所需要的能力之餘，亦強化學生與學習間的關係使其享受學習」內，亦僅有強調跨領域整合作為教學方式的重點描述，則對於其他的內容並未有詳實的論述。對此，本研究亦自《形塑未來》一手冊的重點中，找尋到可供補充與參照之要點，將於底下逐點說明。

1. 科學探究

首先，臺灣當前的眾多 STEM 教育課程中，仍然有一「動手做」的趨勢，即在於使學生根據既定之課程規劃中，完成「既有目標」之作品，如陳冠吟（2015）以鼠夾車作為目的，卻僅讓學生嘗試完成此一作品，而並無具體的科學探討環節；姚經政、林呈彥（2016b）雖以乒乓球發射器太貴而學生需要自行設計進而節省成本為由，卻僅僅只是老師提供之特定情境，並未有學生「自主發想」的環節。因此雖有動手做之名，卻難保不會淪為「機械性操作」之實。

因此，於《形塑未來》一書中，點名「除了動手做之外，更是科學探究」之重點，因此學生應能根據自身的所學、所想和所做，進行一系列的「科學探究」，繼而提出屬於自己的「創意成品」。對此，本研究以為或可提供臺灣 STEM 教育定義補充論述：以科學探究為教學方法，而不僅是「動手做」。

2. 觀察過程

其次，對於傳統的教育，大多注重於成果，而非重視過程。如近期於臺灣推動之學習歷程檔案，當其化作為升學評量之一環時，難保其本質不會受到異化，原意在於記錄學生的學習歷程，卻儼然變為學習歷程「成果」檔案：爭相競艷彼此間的豐功偉業，然而對於實際上的心路歷程，卻少有關懷。

對此，於《形塑未來》的 SME&T 教育便提出觀察過程之訴求，於觀察過程中，讓學生學習擬定問題、搜集資料與評量資料品質等，此等並不全然會於成果中進行呈現之重要環節，亦是 SME&T 教育所倡導與重視的。因此，本研究以為或可基於此觀點，進行臺灣 STEM 教育課程的補充說明：以過程作為重要參照，陪伴學生從開始走向完成的每一里路。

3. 軟實力

接著，在當前的臺灣 STEM 教育中，並未於定義處強調「軟實力」的重要性，於過去的研究中，不乏有以「個人」為單位的教學模式，如陳立庭（2017）以每位學生設計造型磁鐵作為課程進行教學等。相較於軟實力的培養，當前臺灣之 STEM 教育現況中則僅留意於是否有「跨領域整合」。

因而，本研究以為於《形塑未來》中，即有強調軟實力培養於 SME&T 教育的重要性，於 SME&T 教育的教學過程中，應能一同提升學生的溝通、團隊合作與認知技能等各方面的能力，進而使學生得到全面性的發展。是以，本研究以為或可基於此論述，進行對臺灣 STEM 教育課程的補充論述：以 STEM 教育作為媒介，增進學生溝通、團隊合作與認知技能之能力。

4. 失敗中學習

最後，則是注重失敗中學習的精神。於此，或可於第一點的科學探究進行

呼應：於當前臺灣 STEM 教育課程中，較少科學探究之過程，即意味著失敗出現的幅度僅可能是動手做的「操作錯誤」，較少因為自身觀念或者其他因素所導致的「探究失誤」。

因此，本研究以為於《形塑未來》期待之失敗中學習，可與該手冊所強調的科學探究相互呼應：因有後者的期待，故更希望學生能夠擁抱失敗，從中獲取成長，以利後續之發展。故將此等反思應用於臺灣 STEM 教育課程的補充時，即可發覺：失敗中學習，方能使學生於 STEM 教育中勇於嘗試，培養真正的問題解決能力。

(三) 綜合論述

最後，本研究將以前述臺灣 STEM 教育課程中所孕育之 STEM 教育定義作為基礎，並將前述之要點與補充作為擴充，藉以重新陳述以《形塑未來》一手冊作為參照，補充而成之臺灣 STEM 教育定義：

「『以全體學生作為對象，提供必要的資源與支持，』藉由跨領域整合的教學方式，強化學生與學習間的關係使其享受學習之餘，於生活情境中培養學生具備當前世紀人才所需要的能力『，更可培養學生科學探究、觀察過程、軟實力與失敗中學習的技能』。」

肆、研究結論與建議

於本文末處，本研究將先行總結前述之研究結論，以此為本研究做一總結；接著談論本研究對於教學者以及教育研究者二方面之建議：於教學者層面，以談論對於 STEM 教育教學者之提醒；接著，於教育研究者層面依序論述自 STEM 教育領域與教育史學二層面的討論。

一、研究結論

於本研究中，本研究先論述臺灣 STEM 教育之現況，並發現臺灣 STEM 教育定義可理解為「藉由跨領域整合的教學方式，強化學生與學習間的關係使其享受學習之餘，於生活情境中培養學生具備當前世紀人才所需要的能力」。

接著，本研究將先探討前述定義的可議之處：第一，對於欲教授之對象當前並未於臺灣現行 STEM 教育中進行描述；第二，STEM 教育除了跨領域結合外，是否仍具有其他特質？此二疑惑，本研究嘗試藉由首次發布 SME&T 教育（即 STEM 教育前身）的《形塑未來》一手冊中找尋答案，並經本研究之研讀後，以為該手冊所論及之 SME&T 教育定義為「以全體為對象，提供必要與傑出支持以促進科學探究之落實：此科學探究需以真實世界為本構思問題，並整合跨領域知識且留意過程之變化，於過程中將資訊與數學作為探究工具且活

用，最後於完成時得以增進軟實力與失敗中學習之技能的新興學習方式。」藉此，本研究將可補充臺灣 STEM 教育定義，將其擴充為「『以全體學生作為對象，提供必要的資源與支持，』藉由跨領域整合的教學方式，強化學生與學習間的關係使其享受學習之餘，於生活情境中培養學生具備當前世紀人才所需要的能力』，更可培養學生科學探究、觀察過程、軟實力與失敗中學習的技能。」之陳述，使其更加完整與全面。

二、研究建議

於此，本研究將先行陳述對於臺灣有志於推動 STEM 教育之教學者和致力於數學教育者之二層面的教學建議；再行對於臺灣學界之 STEM 教育以及教育史學二面向進行後續學術研究之提點，以期後續有志之士，能一同使此領域教學實例與研究成果得以日益豐碩。

(一) 教學建議

在教學建議層面，本研究將依序對於 STEM 教育與數學教育者二層面進行教學建議的表述，希冀透過本研究之陳述有助於後續教學之進行。

1. STEM 教育

首先，於 STEM 教育教學者中，本研究將提出四大要點，希冀藉此協助後續 STEM 教育之進行：其一，後續之教學於讓學生動手做之餘，可增加「科學探究」之比例；其二，藉由適宜的方式，使學生並不單僅僅只是留意於最終成品的成效，而是能夠使學生關注於「過程」，享受箇中樂趣；其三，提供團隊協作的機會，藉此培育學生能夠具備「軟實力」，幫助其後續的團隊合作與溝通互助的能力建置；其四，則是非必要則不要打斷學生的錯誤嘗試，使其能夠從「失敗中學習」，試誤 (trial and error) 應為 STEM 教育之一環。

(二) 學術研究建議

在學術研究建議面向，本研究亦將先行論述 STEM 教育後，再行描述教育史學層面可再擴充之學術研究層面，希冀藉此為後續研究規劃一可行之道。

1. STEM 教育

首先，本研究以為於 STEM 教育的學術研究領域中，首先若以此研究為本，則可嘗試將此一研究所提及之課程加以落實，以檢驗此一課程的有效性。此外，亦可多嘗試自不同的科學、科技、工程與數學的主題，嘗試建構多元且高品質的課程，並加以進行課程實踐進一步檢核相關成效外，亦可嘗試透過教育基礎理論，如教育史學、教育哲學、教育心理學與教育社會學等層面，使其與 STEM 教育進行對話與補充，藉以使 STEM 教育背後之理論更為穩健。

2. 教育史學

其次，若自教育史學的觀點觀之，本研究以為此研究僅談論《形塑未來》一書，或其局限性與去脈絡化的嫌疑。是以，本研究以為後續之教育史學相關研究者，或可嘗試建構與補充《形塑未來》一文的時代背景外，亦可嘗試自更宏觀的脈絡，如《形塑未來》至後續諸篇〈STEM 教育法案〉之演變，從中校對 STEM 教育根據時代等因素所進行之調整，繼而更符應此時此刻 STEM 教育的核心，且於釐清之餘，亦可嘗試進行一「比較教育研究」，將臺灣與發源地美國的 STEM 教育發展進行一比較，繼而建立更完善之「STEM 教育史學」。

伍、參考文獻

- Breiner, J. M., Harkness, S. S., Johnson, C. C., Koehler, C. M. (2012). Is STEM? A Discussion About Conceptions of STEM in Education and Partnerships. *School Science and Mathematics, 112*(1). <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00109.x>
- Clapp, E. P., & Jimenez, R. L. (2016). Implementing STEAM in maker-centered learning. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts, 10*(4), 481–491. <https://doi.org/10.1037/aca0000066>
- Liu, C.-Y., Wu, C.-J., Chien, Y.-H., Tzeng, S.-Y., & Kuo, H.-C. (2021). Examining the Quality of Art in STEAM Learning Activities. *Psychology of Aesthetics, Creativity, and the Arts*. Advance online publication. <http://dx.doi.org/10.1037/aca0000404>
- National Science Foundation [NSF] (1996). *Shaping the Future: New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology*. <https://eric.ed.gov/?id=ED404158>.
- Weng, C. H., & Guo, C. J. (2022). Investigating Students' Team Processes in a Project-Based Learning Course: From the Perspective of Science of Team Science. *臺灣教育評論月刊, 11*(10), 178-199. <https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=P20130114001-202210-202210050013-202210050013-178-199>
- 王尊玄、王仁俊 (2020)。以 POEC 模式發展 STEM 課程應用於國中能源教育之行動研究 - 以風力發電為例。 *工業科技教育學刊, 13*, 89-104。 [http://doi.org/10.6306/JITE.202011_\(13\).0007](http://doi.org/10.6306/JITE.202011_(13).0007)
- 李隆盛、楊秀全 (2019)。範例引導學習與問題導向學習之教學策略對國小學生機器人程式學習的影響。 *數位學習科技期刊, 11* (4), 77-104。 <http://doi.org/10.3966/2071260X2019101104004>
- 周淑惠 (2017)。STEM 教育自幼開始 - 幼兒園主題探究課程中的經驗。 *臺灣教育評論月刊, 6* (9), 169-176。
- 周惠柔、林弘昌 (2018)。應用虛擬實境技術與 6E 教學模式於高中生活科技課程之結構教學單元設計。 *科技與人力教育季刊, 4* (3), 67-89。 [http://doi.org/10.6587/JTHRE.201803_4\(3\).0004](http://doi.org/10.6587/JTHRE.201803_4(3).0004)
- 林生傳(2003)。 *教育研究法：全方位的統整與分析*。心理。

- 林怡滿、曾永禎 (2021)。STEM 教育融入 2-3 歲幼兒遊戲活動之初探：以植物主題為例。 **幼兒教育**，**332**，62-75。
- 姚經政、林呈彥 (2016a)。STEM 教育應用於機器人教學 - 以 6E 教學模式結合差異化教學。 **科技與人力教育季刊**，**3 (1)**，53-75。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3\(1\).5](http://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3(1).5)
- 姚經政、林呈彥 (2016b)。高中工程設計實作教學活動之設計與發展 - 以乒乓球發射器為例。 **科技與人力教育季刊**，**3 (1)**，12-31。
[https://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3\(1\).3](https://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3(1).3)
- 范靜媛、葉建宏 (2020)。設計自我效能、設計興趣和 STEM 學習表現之相關分析：以時尚設計為例。 **教育科學研究期刊**，**65 (1)**，221-246。
[http://doi.org/10.6209/JORIES.202003_65\(1\).0009](http://doi.org/10.6209/JORIES.202003_65(1).0009)
- 馬宜平 (2020)。STEM 教育對學生科學生涯選擇的影響。 **科技與人力教育季刊**，**7 (1)**，1-25。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.202009_7\(1\).0001](http://doi.org/10.6587/JTHRE.202009_7(1).0001)
- 常雅珍、黃寶園、吳詠惠、楊雅筑 (2022)。6E 教學模式結合 STEM 融入大學生專題課程之研究。 **教學實踐與創新**，**5 (2)**，111-154。
<http://doi.org/10.53106/261654492022090502003>
- 張仁家、林癸妙 (2019)。美國 STEM 教育的發展沿革與經驗 - 以俄亥俄州為例。 **科技與人力教育季刊**，**5 (4)**，1-25。
[https://doi.org/10.6587/JTHRE.201906_5\(4\).0001](https://doi.org/10.6587/JTHRE.201906_5(4).0001)
- 張玉山、楊雅茹 (2014)。STEM 教學設計之探討：以液壓手臂單元為例。 **科技與人力教育季刊**，**1 (1)**，2-17。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.2014.1\(1\).1](http://doi.org/10.6587/JTHRE.2014.1(1).1)
- 張曉琪 (2019)。美國跨領域教學趨勢：從 STEM 到 STEAM 的轉化。 **教育研究月刊**，**300**，36-46。
<https://doi.org/10.3966/168063602019040300003>
- 陳立庭 (2017)。從 STEM 觀點教導造型磁鐵之探討。 **科技與人力教育季刊**，**4 (1)**，46-62。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.2017.4\(1\).4](http://doi.org/10.6587/JTHRE.2017.4(1).4)
- 陳冠吟 (2015)。STEM 取向的科技教育 - 以鼠夾車為例。 **科技與人力教育季刊**，**2 (1)**，63-81。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.2015.2\(1\).4](http://doi.org/10.6587/JTHRE.2015.2(1).4)
- 游師柔、葉宣靈、孫之元 (2020)。STEM 模式整合穿戴式擴增實境和穿戴式虛擬實境應用於科學教育：探討科學學習自我效能來源對高中生科學學習自我效能和學習成效之影響。 **數位學習科技期刊**，**12 (3)**，25-57。
<http://doi.org/10.3966/2071260X2020071203002>
- 黃俊夫、陳淑菁、黃惠婷 (2018)。STEM 理論應用在博物館藏品體驗活動設計 - 以國立科學工藝博物館「520 世界計量日」活動設計為例。 **科技與人力教育季刊**，**5 (2)**，16-27。
[http://doi.org/10.6587/JTHRE.201812_5\(2\).0002](http://doi.org/10.6587/JTHRE.201812_5(2).0002)
- 葉建宏、洪榮昭、范靜媛 (2019)。STEM 整合教育應用於時尚設計領域之效

用。 **紡織綜合研究期刊**， **29** (1)， 17-23。

[http://doi.org/10.6439/TTRJ.201901_29\(1\).0003](http://doi.org/10.6439/TTRJ.201901_29(1).0003)

蔡麗玲(2017)。關注科技領域的性別平等—從性別偏見到性別意識。 **臺灣社會
學會通訊**， **86**， 24-26。

盧正川、黃新賢、吳百祿 (2019)。新興科技融入 STEM 教學之研究 - 以六龜
高中執行科技部高瞻計畫為例。 **工業科技教育學刊**， **12**， 100-114。

[http://doi.org/10.6306/JITE.201912_\(12\).0007](http://doi.org/10.6306/JITE.201912_(12).0007)

謝文全等人(2006)。教育行政學：理論與案例。五南。

簡佑宏、張玉山、簡爾君 (2016)。STEM 取向準工程課程設計：以二氧化碳賽
車單元為例。 **科技與人力教育季刊**， **3** (1)， 32-52。

[http://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3\(1\).4](http://doi.org/10.6587/JTHRE.2016.3(1).4)

羅希哲、蔡慧音、曾國鴻 (2011)。高中女生 STEM 網路專題式合作學習之研
究。 **高雄師大學報：自然科學與科技類**， **30**， 41-61。

<http://doi.org/10.7060/KNUIJ-ES.201106.0041>

Review of Taiwan STEM Education Curriculum Definition and inspiration from the "Shaping the Future"

Hong-Wen, Zhang¹ Chi-En, Li,² Zhi-Kai, Wang³

¹Department of Education, National Taiwan Normal University

² Shui Yuan Primary School

³

Abstract

This research is inspired by Lin (2018), trying to replenish the lack of the micro-perspective discussion about Taiwan's STEM education curriculum and teaching activity in this article. This Study is concentrating on the "STEM Education Definition." According to the analysis results from the microscopic view, this study found the deficiency of STEM Education definition of the Taiwan STEM education curriculum, such as educational object and requirement of teaching and learning mode etc. For this situation, this study will use the first handbook in the United States that focuses on the origin of STEM Education as a reference, trying to supplement the definition about the Taiwan's STEM Education and responding the doubts about former two.

Key words:

The curriculum of Taiwan STEM Education, 《Shaping the Future: New Expectations for Undergraduate Education in Science, Mathematics, Engineering, and Technology》

「提問式共學」融入內心單元之探究

張莞婕¹、姚如芬²

¹國立嘉義大學教育學系數理教育碩士在職專班研究生 changjasmin@gmail.com

²國立嘉義大學教育學系教授 rfau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究採個案研究法，以研究者線上教學的三位國中九年級學生為研究對象，探究個案學生在內心單元的學習困難，並運用提問式共學教學法進行補救教學，以了解個案學生的學習表現。本研究以前測卷、後測卷、訪談及線上錄影觀察等資料來做分析，研究發現：一、關於個案學生於內心單元的主要學習困難有四點，包括：（一）學生在解題的過程中，因計算能力較弱而錯失分數，也沒有寫完後做檢查。（二）內心和外心概念模糊不夠清晰，以致兩個單元觀念產生迷思而造成解題錯誤。（三）錯誤運用公式導致解題錯誤。（四）傳統講述型教學，讓學生缺少學習的動力，盲從的背誦公式，導致遇到問題不會運用，也不敢詢問老師，所以學習上就無法投入，導致學習表現不佳。二、提問式共學法融入內心單元之線上補救教學後，藉由提問式引導及共同學習討論，再由教師進行統整及歸納，有助於個案學生在內心單元的觀念更清晰及學習表現上更為提升。

關鍵字：提問式共學、線上教學

壹、緒論

2020 年 1 月 21 日，台灣本土的新冠肺炎延燒，疫情嚴峻，教育本持著停課不停學的政策，學校及補習教育都改為線上上課代替了實體上課，至今，也採混成教學，線上課程搭配線上教室的資訊資源，秉持著教育不停學的目標，發展另類的教學方式，不侷限於課室中，在線上教學另一闢新的學習模式。研究者本人的補習課程因為這次的疫情，全面改為線上上課，線上課程使用 Zoom 軟體的雲端視訊會議，讓授課於教室內的學生改為線上上課，其中學生涵蓋了北部、中部及南部，分別有國一至高二的族群，我們依年級會在同一時段學習數學課程，在線上上課的學生們，除了和學生還有家長有共同的默契，家長會陪同在旁一起督促學習，每一次的上課新的觀念都會以引導的方式，並採「提問式教學」的方式來完成教學及交流。本研究透過「提問式共學」教學法融入內心單元，針對國中三年級學生進行補救教學活動，以此探討學童內心單元的學習歷程與表現。

研究者的學生們在線上教室可以一起討論，每一題或是每一個新的觀念導入，都會再設計另一個相關的題型讓其中一個學生當大家的老師，解析說明給大家看，每一場的學習全程都會錄影，再發布至群組及 IG 社群，讓學生們家長們可以再觀看及複習當天的課程，在這其中，發現學生觀看到自己講解給大家的時候，他們會更認真更想把這一題講解的更清楚給其他同學聽，所以會更重

視自己的學習，若遇到概念迷失時，我們都相同的默契，他們會要研究者本人給他們提示來引導他們，而不是直接要研究者本人講出此題的詳解，讓他們對這些題目更有印象更有數感，因此，研究者本人的線上的學生成績比在之前課室內學習時的成績更進步且學校成績較高分，綜上，本研究在這其中有了值得探究的空間。

本研究之研究目的有二：

1. 探討個案學生於「提問式共學」融入二次函數線上補救教學前的學習困難。
2. 探討個案學生於「提問式共學」融入二次函數線上補救教學中的學習表現。

貳、文獻探討

一、線上學習之相關探究

線上學習是自我導向的學習方式，游玉梅(2002:34)，沒有時間地點空間上的限制，隨時隨地都可以進行學習，以學習者為出發，學習者身上要具備自動自發的主動學習態度和積極的行動力，在線上學習上面才有最佳的學習表現，線上學習使用的媒介較為多元豐富，較能激起學習者學習的動機，學習者也能重複利用錄製的功能，可以重複複習使用。

教師若要提升學童們在線上教學的積極性及參與性，可以創造問題給學童們的機會(陳采秀, 2022)，提高學童的學習意願，或是給予適當的口語互動，增加課程的豐富度及彈性，師生鏡頭互相開啟，結合網路資源，製造臨場感，學生學習的主動性會更高。教師是課室中的靈魂領導人物，採取適合的教學策略，例如：依照教學的目標、學童的起點、教學的資源等，彙整不同的教學方式，找出適合學童的學習元素，以達到教學的效果，在線上教學展現出嶄新的「教與學」模式。

綜合前述文獻，饒達欽、賴慕回、陳培基(2021)主張教師和學生在不同空間進行教學，是要有規劃的學習目標，結合多元的課程設計及教學技巧，透過資訊的連結才能達到學習效果。因此，在後疫情時代的停課不停學的政策下，「線上教學」將會是後疫情時代下的教學常態。

二、提問式教學之相關研究

提問式教學在數學科的課堂中之重要性(陳翠蘭, 2020)有三項，第一：吸引學生的目光及注意；第二：提升學生在課堂中的參與感；第三：課堂氣氛可以更活潑；此種教學可以讓教師和學生互動性更高，讓學生在課堂中能保持注意力，提升學生的學習動機。

教師提問在教學上(黃昭勳, 2019)有五項功能，第一：激起學生的學習意願和動機；第二：可以幫助學生有效的學習；第三：可以診斷學生的學習成就；第四：可以產生教學回饋；第五：啟發學生更高層面的想法；統整前五項功能，教師提問多元且豐富可以提升學生在課室內學習的興趣以及學生的思考。

三、內心教與學的探討

內心教學中(許博琳, 2018)學生在三角形的內心單元的錯誤類型有七個原因:無法解決概念性問題、無法解決程序性問題、無法解決應用性問題、幾何敘述出現錯誤、基本運算發生錯誤、代數列式發生錯誤及不會或未完整作答。學生們在內心單元易錯的原因有五個:未理解定義與性質、先備知識的不足、已習教材的干擾、缺乏說理的能力及計算能力的貧乏。

綜合上述,研究者本人在線上課程進行內心單元教學,會和學生在電子白板上同步畫出內心的交點,帶領學生一一解說內心的相關概念,之後再依題型來引導新知識、公式來做推理及解題,輪流抽問學生的想法及解題思路,請他們解題給線上的我們觀看,大家一起討論一起推演,來回做題及解題,更能加深學生在內心單元的觀念及解題技巧。

參、研究方法

一、研究參與者

本研究以個案研究法,選擇研究對象的方式分兩個階段:第一階段先詢問過家長的同意,對三名學生進行前測;第二階段詢問三名學童參與此活動的意願,最後取得個案學生三人,個案學生的學習特性和表現如表 1。

表 1 個案學生的學習特性和表現

個案學生	個性及學習特性和表現
研究對象一小沂	家中的獨生女,爸爸和媽媽很關心孩子的教育,小沂在自己的課業上非常要求,是個很有主見的孩子,凡事實事求是,在班級上,各科成績都在前 5%。
研究對象二小淳	在家裡排行老二,還有一個姊姊,爸爸和媽媽很尊重孩子的學習,會聽孩子的意見,選擇適合的老師,在課業上比較沒有自己的想法,屬於穩扎穩打的孩子,認真且細心,其班級數學成績為前 40%。
研究對象三小秉	在家裡排行老大,爸爸媽媽非常注重他的學習狀況,會陪同他一起念書複習課業,阿秉有著異想天開的想法,也有點閱讀障礙,對自己比較沒有信心,怕說錯話,比較無法融入大團體,班級數學成績後 30%。

二、線上「提問式共學」教學法融入內心單元教學設計

研究者於 Zoom 雲端視訊會議線上教學,每一個觀念的導入,都會採「提問式共學」的教學法,老師會先講述此單元的觀念及重點題型鋪成,再隨機抽點學生,角色換成老師,由他們講述給大家聽,講解的過程中,學生會用自己的話語及自己的理解,表達給線上的學生及老師過程中若有觀念或是解題不夠完整時,老師會適時給予提示及引導,讓學生更為印象深刻加深他們的觀念及解題技巧。

課程進行都是全程錄影,教學後會發布在群組及 IG 社群,讓學生家長們觀看,這其中,他們家長們都會在身旁陪讀,所以學生們會更認真更仔細想出觀

念和解題技巧，若遇到不會的地方，需要研究者本人引導，他們會很自然希望研究者本人給他們提示，給他們線索，他們不會希望研究者本人直接給他們結果，會想辦法從提問的內容發現可以解題的關鍵提示，從中也發現他們是主動求知和求解，而達到學習的目的。

學生們上課時間為兩次周五晚上七點至八點半，實施三個小時的教學，一共 180 分鐘。活動摘錄表整理如表 2。

表 2 活動摘錄表整理

活動名稱	教學大綱	分年細目	時間
講述	線上白板先介紹內心的意義和相關名詞；畫出三角形的內心圖。	S-9-9 三角形的內心：內心的意義與	25 分鐘
引導	從三角形內心圖，讓學生發現及觀察三角形的內心到三角形的三邊等距；引導學童導出三角形的面積 = 周長 × 內切圓半徑 ÷ 2 及直角三角形的內切圓半徑 = (兩股和 - 斜邊) ÷ 2 的公式	內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形的面積 = 周長 × 內切圓半徑 ÷ 2；直角三角形的內切圓半徑 =	25 分鐘
隨機抽問	隨機抽問一位學生，請他在線上白板計算三角形的面積運用周長 × 內切圓半徑 ÷ 2 及直角三角形的內切圓半徑運用 (兩股和 - 斜邊) ÷ 2	(兩股和 - 斜邊) ÷ 2。	20 分鐘
學生解答	隨機抽問的學童講解問題，把自己所知道的解析分享給其他學童、家長及教師聆聽。		30 分鐘
回饋	老師把學生講解給大家的問題，再次統整及歸納，強化學生的觀念。重複不斷的給不同題型，隨機抽問不同學生，讓每一次被抽問的學生去試著做試著思考，講解給其他學童聆聽，反覆強化他們這一章的觀念及解題技巧。		80 分鐘

三、資料收集

本研究的資料收集包含前測卷、後測卷、課室錄影觀察及晤談來探討學生的數學表現。而研究者設計「提問式共學」融入內心的單元教學活動，來探究學生之線上學習後的表現。同時透過教學活動前後的觀察、訪談以及學生上課反應之實際情況轉錄成逐字稿等資料來探究學生在數學學習之情意層面表現。

(一) 前測卷及後測卷

前後測試卷各 1 份，共 2 份試卷，依據教育課程綱要數學領域的對應學習

表現細目 S-9-9 自編講義且根據第五冊翰林版本，參考課本、習作及坊間教材的教學指引，內容包含：內心的意義與內切圓；三角形的內心到三角形的三邊等距；三角形面積＝周長×內切圓半徑÷ 2；直角三角形內切圓半徑＝（兩股和一斜邊）÷ 2。編制前後試題與對應的教學目標的內容分析，如表 3，以建立內容效度。

表 3 前測後測卷對應分年細目及教學目標對照表

對應之分年細目 與教學目標	S-9-9 內心的意義 與內切圓。	S-9-9 三角形的內 心到三角形的三 邊等距。	S-9-9 三角形的面 積＝周長×內切圓 半徑÷ 2；直角三 角形的內切圓半徑 ＝（兩股和一斜 邊）÷ 2。
一、計算題	(2)	(1)	(3)(4)(5)
二、選擇題	(1)(2)	(3) (4)	(5)

(二) 訪談

為清楚知道三位學生的三角形內心的觀念及解題，研究者透過前測及後測卷，訪談學童的解題想法及思維，能知悉學生的學習狀況及轉化，利用視訊的方式，時間為 10 分鐘。訪談期間皆全程錄影記錄，將重要資料的訪談內容轉譯成文字稿。前後測各 1 次，共訪談 2 次。

(三) 課室觀察紀錄

在此研究中，研究者本人擔任觀察者及教學者，在課程進行時，皆會錄影，以此紀述學生的上課學習展現及情形，能收集更多更周詳的學生學習資訊。

四、資料分析

1. 資料閱讀統整及轉譯

本次研究收集前後測卷、訪談紀錄等資料反覆閱讀，並將資料轉譯成逐字稿，反覆檢查及分析。

2. 資料編碼及分析

將轉譯後的資料檢查及檢視後，進行整理及編碼，以進行分析及比較。

五、研究流程

一、教學前的預備時期

包含：確定研究的主題、閱讀大量相關文獻、制訂研究計畫、提問式共學教學法融入三角形內心初步設計及確定研究的個案對象。

二、教學中的執行時期

包含：實行前測及訪談、修改提問式教學融入三角形內心的問題設計以及進行提問式教學法的補救教學。

三、教學後的闡明時期

包含：實行後測及訪談、進行資料統整及分析以及撰寫研究報告。

肆、研究結果

本研究主要探究學生學習內心單元前的學習困難及「提問式共學」教法融入內心單元的補救教學後的學習表現。

研究者在進行線上補救教學前，先對三名個案學生實施前測和訪談，以了解個案學生於「內心單元」的觀念及解題方法，並審視其學習困難的地方，本節以個案學生在「內心單元」的後測試題的測驗結果來探討。

一、學生學習前的學習困難

三位學生在內心單元會和重心、外心的單元的觀念及解題方式會重疊模糊不清，三角形內心是角平分線的交點，會形成內接圓，其內接圓的半徑即為內心到三邊等距離，學生會和外心是中垂線的交點及重心是三中線的交點所混淆，三心的性質定義及觀念並沒有非常熟悉，導致學生看到題目，無法正確的解題，以致於前測成績不理想。

根據前測前的訪談，了解三位學生在學校學習的講述型方式教導，有兩項主要原因：

1. 不敢在全班前問問題。
2. 公式和性質觀念都是用背誦的，無法融會貫通，導致在寫題目不知道如何運用而在該單元成績不盡理想。

二、個案學生於提問式共學教學後的學習表現

提問式共學教學融入線上教學後，有以下四點來呈述：

1. 教師使用引導的方式在電子白板上，畫出圖形做詳解，和學生們一同討論及合作，學生們對內心是三個角的角平分線交點更為印象深刻且觀念更清晰。如圖 1 及表 5-1。
2. 學生們一起使用電子白板，有任何想法或是不清楚的觀念，學生們會口述並請教師使用電子筆在白板上畫出及提出迷失概念，教師能及時清楚知道學生的困惑立即解惑及加強學生的觀念，學生們的迷失概念能夠更扎實更能清楚自己的錯誤思考，能及時矯正且觀念更深刻。例如：在引導三角形面積為三個邊長相加乘以內切圓半徑再乘以 $1/2$ 時，如圖 2 及表 5-2。
3. 三位學生在教師提問引導下，一同在電子白板導出公式，而不是一味的背誦公式。例如：直角三角形的兩股和等於斜邊加上兩個半徑，如圖 3 及表 5-3。

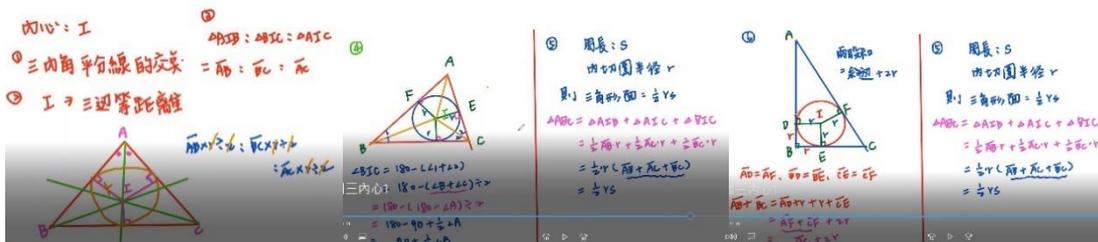


圖 1

圖 2

圖 3

表 5-1 上課互動的對話

T:我畫一下三角形，我們看圖，從 I 到三邊距離要 90 度喔!它是內接圓喔!它的半徑我們叫他小 r 喔!可以嗎?那我們繼續喔!

T:第三個，如圖:三角形 AIB 的面積比三角形 BIC 面積比三角形 AIC 面積，我們問一下睿沂，請問它們的面積比是不是邊 AB 比邊 BC 比 AC 呢?睿沂?是不是呢?可以想想看，睿沂我們可以證明看看喔!你看三角形 AIB 面積是不是邊 AB 乘以 r 除以 2，是不是?那其他兩個三角形呢?

S:睿沂說:三角形 BIC 面積是邊 BC 乘以 r 除以 2 比上三角形 AIC 面積是邊 AC 乘以 r 除以 2，oh my god，乘以 r 除以 2 都消掉

T:挖~有沒有感覺到很特別很讚，所以它們三個面積比是不是就是三個邊的比呀!大家可以嗎?OK~行不行呢?

S:大家說可以喔!好那我們繼續，如圖:它還會要大家求出角 BIC 的角度，好，那我們要怎麼做呢?大家看一下，請問內心是甚麼的交點呢?稟宸?

表 5-2 上課互動的對話

S:稟宸回答，它是三個角平分線的交點，對，所以，我們看圖，角 BIC 等於 180 度減掉括號(角 1 加角 2)

T:那我再請問稟宸喔!(角 1 加角 2)是不是角 B 加角 C 的一半呢?

S:是的

T:我們繼續推論下去，角 B 加角 C 的一半是不是 180 度減去角 A 的一半呢?那我們繼續喔!把它展開，是不是可以推論到它就是課本上說的 90 度加二分之一的角 A，這樣我們是不是證明完課本上的公式了!行不行!可以嗎?大家都可以嗎?

S:大家說都可以

T:我們就繼續了，內心很多重點，第五點，三角形周長是 S，內切圓半徑我們稱為 r，則三角形面積是二分之一 rS，那我們問詠淳，淳你來

T:三角形 ABC 面積我們可以分三塊，三角形 ABC 面積等於三角形 AIB 面積加上三角形 BIC 面積加上三角形 AIC 面積，那三角形 AIB 面積底是邊 AB 乘以 r 除以 2 加上三角形 BIC 面積底是邊 BC 乘以 r 除以 2 加上三角形 AIC 面積底是邊 AC 乘以 r 除以 2，之後淳我們可以怎麼做

S:把二分之一乘以 r 提出來，剩下邊 AB 加上邊 BC 加上邊 AC，那邊 AB 加上邊 BC 加上邊 AC 又是三邊長的總和就是此三角形的周長

S:淳:對耶!挖!那我們是不是又證明出來了呢?

表 5-3 上課互動的對話

S:大家說對耶!好

T:那我們繼續第六個直角三角形，內切圓半徑 r，如圖，兩股和等於斜邊加 2r，我們沒有要背喔!我們可以把這個公式導出來，淳，我們看一下，我們該如何證明呢?來我們從切線性質來看喔!

S:淳說:邊 AD 等於邊 AF，邊 BD 等於邊 BE，邊 EC 等於邊 CF，好，那老師問

你喔! 邊 ID 等於邊 IE, 邊 BD 等於 IE 等於 r , 又邊 BE 等於邊 DI 等於 r , 所以 DBEI 是正方形對不對, 所以, 淳我們繼續推下去

S: 淳說: 邊 AB 加邊 BC 等於邊 AD 加 r 加上 r 加邊 CE, 之後呢?

S: 淳說: 邊 AD 加邊 CE 等於邊 AF 加邊 CF 加上兩個 r , 又邊 AF 加邊 CF 等於斜邊 AC, 所以我們可以推出來兩股和等於斜邊加 $2r$ 。太棒了!

3. 透過後測卷實行後的訪談, 三位個案學生皆反應: 因為教師一同和他們在電子白板作圖解析, 教師抽問的方式, 讓學生自己再講述自己的想法, 教師從旁提示, 這一步讓他們更清楚知道自己哪一個地方有迷失, 除了不是用背誦的方式外, 自己講述過的題目印象更為深刻, 學生在解題時, 腦海會清楚的出現該單元的觀念及解題技巧, 所以在後測卷的表現上, 成績都滿不錯的。

伍、結論與建議

一、結論

提問式共學融入線上教學前, 研究者對個案學生實施前測及訪談, 以了解學生在線上教學前內心的概念, 發現個案學生有如下四個問題:

- 一、學生在解題的過程中, 因計算能力較弱而錯失分數, 也沒有寫完後做檢查。
- 二、內心和外心概念模糊不夠清晰, 以致兩個單元觀念產生迷思而造成解題錯誤。
- 三、錯誤運用公式導致解題錯誤。
- 四、傳統講述型教學, 讓學生缺少學習的動力, 盲從的背誦公式, 導致遇到問題不會運用, 也不敢詢問老師, 所以學習上就無法投入, 導致學習表現不佳。

於線上教學提問式共學融入教學後, 研究者對個案學生實施後測及訪談, 經歸納整理後有四項發現:

- 一、提問式共學於線上融入教學後, 學生勇於在線上課程中, 發問及提出疑問。
- 二、和學生在線上課程同步進行畫圖及講解, 學生及時遇到的迷思概念, 可以立即解決。
- 三、於線上課程中, 教師學生角色互換, 由學生講解給教師及同學聆聽, 專注力及學習動機提升不少。
- 四、於線上課程中, 學生和學生間的互動, 彼此傳達的觀念及溝通的語言, 會讓教師更能了解學生碰到的問題及迷思想法。

綜合上述, 最後, 研究者將學生在教學法介入的前後做比較分析如下表 7, 提問式共學教學法, 在內心單元的學生學習表現上, 有顯著的提升學習表現, 學生在學習此單元更積極且觀念更熟悉。

表 7 教學法介入的前後做比較分析

學習前困難(課室內傳統講述)	線上提問式共學教學法	學習表現呈現
	介入	

觀念不熟悉	講述觀念及定義	觀念更清晰
不敢及時發問	提問及引導問題介入	勇於發問
計算錯誤	隨機抽問	計算更熟悉
運用錯誤公式	學生解答	已正確運用公式
無法及時發現迷思概念給予指導	教師回饋統整	同步指導及修正

二、建議

研究者依據本研究發現，就提問式共學教學法運用在線上教學上及後續研究提出一些建議，以作為相關教學和未來後續研究之參考。

- 一、提問式共學教學法運用在線上教學上，有人數上的限制，若人數多於十人以上，則在教學上就無法更全面的了解到學生的迷思概念及問題。
- 二、教師使用提問式共學教學法，在整個班級的控班上，要隨時掌握學生的注意力，要有技巧性及積極性的問問題，學生們的答題，若有遇到迷思的概念要立即給予指導，並統整學生問題上的觀念及概念。

主要參考文獻

賴麗珍(2012)，自我學習／自我導向學習 (self-learning/self-directed learning)，國家教育研究院，Retrieved March 23, 2021，取自：

<https://reurl.cc/95b6xn>。

陳采秀(Chen, Tsai-Hsiu). 台灣教育研究期刊； 3 卷 1 期(2022 / 01 / 01)， P213 - 235。

陳翠蘭(2020) 提問式教學在小学数学教學中的運用措施. 东西南北:教育, 2020。

黃昭勳 (2019)。教師發問行為之探究。臺灣教育評論月刊，8 (1)，281-291。

Exploration of "Inquiry-based learning" Integrated Into the Incentre Unit

Wan chieh-Chang¹ Ru-Fen Yao²

¹Changhua Luoqing Elementary School

²Department of Education, National Chia Yi University

Abstract

This study adopts the case study method, taking three ninth grade students from the researcher's online teaching course as the research object, exploring the learning difficulties of the case students in the incentre unit, and using the "inquiry-based learning" method to carry out remedial teaching to understand the case students' learning difficulties. This study analyzed the pre-test papers, post-test papers, interviews, and online video observations. The research found that firstly, there are four main learning difficulties for the case students in the incentre unit, including: (1) Students lose points in the quizzes due to weak calculation ability and not checking after finishing writing. (2) The concepts of incentre and circumcentre are vague and not clear enough, so that the two unit concepts cause misunderstanding and problem-solving errors. (3) Misuse of formulas leads to errors in problem solving. (4) Traditional narration-based teaching makes students lack the motivation to learn and blindly recite formulas, resulting in not being able to use them when encountering problems. Traditional narration-based teaching also makes students dare not ask the teacher when having questions, so they cannot devote themselves to learning, which results in poor learning performance. Secondly, after the "inquiry-based learning" method is integrated into the remedial teaching of the incentre unit, through question-based guidance and joint learning and discussion, as well as the clear explanation by the teacher, it will help the case students to have a clearer concept of the incentre unit and elevate their learning performance.

高中數學教科書之內容分析-以三角課程為例

李驊峻¹ 秦爾聰²

¹ 國立彰化師範大學科學教育研究所 M0921002@gm.ncue.edu.tw

² 國立彰化師範大學科學教育研究所 abechin@cc.ncue.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討臺灣 108 課綱下各版本高中數學教科書，在三角課程上呈現之異同。研究對象為臺灣六個版本。本研究採用內容分析法進行分析，針對課程之編排內容進行比較，以「題」為分析單位，並依據 Zhu 與 Fan (2006) 數學問題類型，對題目之表徵型態、答題型態進行分析。研究結果顯示，在編排內容上，臺灣各版本教科書之數學概念以螺旋式呈現且版面以圖文穿插或以漫畫說明，而版本間之編排上有差異，在同版本 A、B 類版教科書中也能看出其編排內容上之差異。從數學問題類型來看，在數學問題的表徵型態上皆以數學型態與文字型態為主，顯示在問題中著重計算與解題能力，並呈現多元的解題方式與歷程；在數學問題的答題型態上皆以封閉式問題為主，顯示在問題中著重單一答案及答題的正確性。

關鍵字：108 課綱、教科書、三角課程、內容分析

壹、緒論

一、研究動機與研究背景

根據相關研究指出，不同的數學教科書，在內容呈現的形式上都有很大的差異，這不僅會影響學生數學學習的表現 (Stein et al., 2007)，甚至會影響學生對於數學本質的觀點 (Henningsen & Stein, 1997)。由此可知，教科書之重要性在於課程內容如何編排和數學問題如何呈現，其將影響老師與學生之教與學及影響學生數學學習之表現與理解。

臺灣過去的數學課程歷經了數次的改革，從學科本位、學生本位到能力本位的發展歷程 (鍾靜, 2005)。在 108 課綱的安排下，三角的內容從十一、十二年級移至十、十一年級且十一年級數學又分成 A、B 兩類，由於「數學 B」是針對不同面向數學需求或低需求的學生所設計的課程，其主要是希望學生能具備基礎數學素養，並統整過往所學的數學知識概念，無須過度的計算。這當中所學的三角內容又不全然相同，且十一年級 B 類又增加許多生活情境的應用。因此本研究

將以三角課程為分析的對象，並深入探討各版本教科書編排、數學問題呈現及數學 A、B 兩類之差異。

二、研究目的

本研究目的旨在探討臺灣各版本高中數學教科書在三角課程中內容之異同，其中將分別探討：

- (1)各版本高中數學教科書在 A 類三角課程編排內容之差異為何？
- (2)各版本高中數學教科書在 B 類三角課程編排內容之差異為何？
- (3)各版本高中數學教科書在 A 類三角課程數學問題呈現方式之差異為何？
- (4)各版本高中數學教科書在 B 類三角課程數學問題呈現方式之差異為何？

貳、文獻探討

根據上述研究動機與研究背景及研究目的，研究者針對以下文獻進行探討，分別為一、普通型高中三角課程，其中子項目包含(一)99 課綱及(二)108 課綱；二、數學問題呈現之探討，其中子項目包含(一)表徵的意義與重要性、(二)數學問題的重要性及(三)數學問題表徵；三、數學教科書內容分析之研究，其中子項目包含(一)數學教科書研究之重要性及(二) 數學教科書內容分析之實徵性研究。由於篇幅限制，故研究者將略過此篇內容。

參、研究內容與方法

一、研究方法與架構

本研究主要在分析各版本高中數學教科書之內容，並針對各版本教科書的三角課程探討其編排內容差異及數學問題呈現方式。基於本研究的研究目的，故採取內容分析法 (Content analysis) 進行本研究。

二、研究對象

本研究對象為高中數學教科書，採用臺灣的六個版本，共六套教科書進行分析，本研究以課本與習作的三角課程進行分析，其餘教師手冊、講義等教材不納入研究範圍。

三、類目建構與資料處理

(一) 分析單位與分析類目

1.分析單位

教科書之內容分析，通常採用章、節、單元、課等分析單位 (王文科、王智弘, 2020)。為精確計數各版本教科書內容差異及了解各個問題所提供的概念與表徵方式，先以冊、章(單元)、節作為區分單位，再以教科書佈題以「數學

問題」作為分析單位。本研究「數學問題」計數標準定義如下：1. 題目之敘述僅包含一主要問題者，計數為一題。2. 題組之題目，各小題分別計數為一題。

2.分析類目

本研究參考 Zhu 與 Fan (2006) 的數學問題類型，建立本研究之分析類目表，如下表 3-3-1。

表 3-3-1

數學問題分析類目表

主類目	次類目	說明
表徵型態	數學型態	題目表徵方式以數學符號為主軸
	文字型態	題目表徵方式以文字描述為主軸
	視覺型態	題目表徵以圖、表、畫面為主軸
	聯合型態	題目同時含有兩種以上的呈現
答題型態	開放性問題	題目的答案不唯一或是沒有標準答案的問題
	封閉性問題	題目的答案只有一種標準答案的問題

(二)資料處理

在資料處理方面，本研究以「數學問題」為計數單位，以 Zhu 與 Fan(2006) 的標準對數學問題的呈現表徵型態進行歸類。量化資料處理上，將各版本教科書之數學問題依照次數分配的百分比統計量進行各版本的分析比較，其分析焦點是：1.計算六個版本三角課程在數學、文字、視覺、聯合型態之題數與百分比。2.計算六個版本三角課程中開放性問題與封閉性問題之題數與百分比；在質性資料處理上，將各版本的編排情形加以分析說明，其分析焦點是：1.三角課程概念編排順序 2.A、B 版本間之差異 3.各版本特色。

(三)信度檢核

1.信度

本研究採用評分者間信度進行信度檢驗，評分者間信度是指評分員對於內容單位分配類目的一致性程度，檢驗方式以 Krippendorff's Alpha (α) 進行信度分析，其優點為容許多位編碼員進行內容分析、適用於不同變項且可以為不同種類的評價結果設定不同的差異衡量標準，可以解釋期望一致性(Krippendorff, 2004)。

本研究以 SPSS20.0 版本做為應用統計軟體進行評分者間信度檢測，其信度計算結果中，分為 1.表徵型態類目包含數學型態、文字型態、視覺型態、聯合型態，其評分者間信度為 $\alpha = .821$ ，顯示此分析類目是可靠的；2.答題型態類目包含封閉性問題及開放性問題，其評分者間信度為 $\alpha = .978$ ，顯示此分析類目

是可靠的。

2.效度

(1)理論依據：在數學問題的分類上，本研究採用Zhu與Fan (2006) 對數學問題表徵型態的分類，該分類曾用來分析中國和美國數學教科書的問題型態。因此，本研究所採用的分析類目，都具有理論和應用上的支持。

(2)確定分析的類目之後，便邀請兩位具有教科書分析經驗的研究生，一同進行問題計數與歸類標準的說明，並針對六版本教科書隨機抽取一版本進行各自的初步分析與歸類以了解評分員對於分析類目定義的理解、初步歸類的結果、以及歸類過程中可能的困難與疑問。

(3)初步分析完成後，研究者和兩評分員針對分析過程中遇到的判斷和歸類的問題進行討論，並將遇到的歸類問題與指導教授一同討論後形成共識，使每個數學問題都能明確地歸類到所屬的類目中，之後進行正式六個版本教科書之分析，並建立本研究之內容效度。

肆、研究結果

一、各版本高中數學教科書三角課程編排內容之差異

由於篇幅限制，此小節將以 A 類三角課程進行說明。

各版本高中三角課程編排順序如表 4-1-1，從表中可發現，各版本之編排順序上皆有差異，各版本會以三角比、廣義角與極座標開始，再往三角比的性質、弧度量、三角的函數圖形、三角的和差角公式、正餘弦的疊合延伸。而在弧度量與三角函數的圖形、三角的和差角公式與正餘弦的疊合中，T4 版會將其放在同一個小節；在三角函數的圖形及正餘弦的疊合中，T6 版會將其放在同一個小節。

表 4-1-1

各版本高中三角課程編排順序

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
	3A	3A	3A	3A	3A	3A
廣義角與極座標	2	2	1	2	2	2
三角比	1	1	2	1	1	1
三角比的性質	3	3	3	3	3	3
弧度量	4	5	4	4*	4	4
三角的和差角公式	6	4	5	5*	6	5
三角函數的圖形	5	6	6	4*	5	6*
正餘弦的疊合	7	7	7	5*	7	6*

註：*表示其放入同一小節，故研究者將其歸類為同一順序。

二、各版本高中數學教科書三角課程數學問題呈現方式之差異

由於篇幅限制，此小節將以 A 類三角課程進行說明。

各版本數學問題表徵型態從 4-2-1 中可發現，在 T1 版 3A 之文字型態較高、視覺型態較低；在 T2 版 3A 之數學型態交高、視覺型態較低；在 T3 版 3A 之數學型態較高、視覺型態較低；在 T4 版 3A 之數學型態較高、視覺型態較低；在 T5 版 3A 之文字型態較高、視覺型態較低；在 T6 版 3A 之文字型態較高、視覺型態較低，而相較於其他版本，T3 版之數學問題表徵型態較為平均且視覺型態之比例也較其他版本高，在文字與數學型態的占比中，又以 T5 版 3A 最高。整體而言，各版本 3A 皆以數學型態與文字型態為主，視覺型態較少，偏重計算、解題能力及培養學生閱讀理解之能力。

表 4-2-1

各版本高中三角課程之數學問題表徵型態題數與百分比整理

版本	數學型態	文字型態	視覺型態	聯合型態	總題數
T1 版 3A	168 (31.34%)	210 (39.17%)	13 (2.42%)	145 (27.05%)	536
T2 版 3A	177 (42.96%)	140 (33.98%)	17 (4.13%)	78 (18.93%)	412
T3 版 3A	192 (32.60%)	190 (25.63%)	60 (5.57%)	147 (19.78%)	589
T4 版 3A	177 (36.95%)	146 (30.48%)	14 (2.92%)	142 (29.65%)	479
T5 版 3A	206 (38.36%)	212 (39.48%)	10 (1.86%)	109 (20.30%)	537
T6 版 3A	189 (33.63%)	206 (36.65%)	29 (5.16%)	138 (24.56%)	562

註：百分比=(各項題數)÷(總題數)

各版本數學問題答題型態從 4-2-2 中可發現，各版本 3A 皆以封閉性問題為主，僅有 T2 版 3A、T3 版 3A、T5 版 3A 有少部分的開放性問題。

表 4-2-2

各版本高中三角課程之數學問題答題型態題數與百分比整理

版本	開放性問題	封閉性問題	總題數
T1 版 3A	0 (0%)	536 (100%)	536
T2 版 3A	1	411	412

	(0.24%)	(99.76%)	
T3 版 3A	7 (1.19%)	582 (98.81%)	589
T4 版 3A	0 (0%)	479 (100%)	479
T5 版 3A	1 (0.19%)	536 (99.81%)	537
T6 版 3A	0 (0%)	562 (100%)	562

註：百分比 = (各項題數) ÷ (總題數)

由於各版本三角數課程中開放性問題過少，因此研究者探討開放性問題在三角數課程中是如何呈現的。在三角課程開放性問題中，皆是「利用開放性的問題歸納出數學概念的題型」，以探究的方式，使學生自行去發現背後的數學概念，透過觀察、嘗試等方式了解不同數學概念的差異。以下將例舉其中的開放性問題為例。

T2 版的開放性問題如圖 4-2-2-1，其問題以同界角為核心概念，題目 1 請學生舉例與 45 度相同位置的同界角，而此問題無唯一的答案，因此歸類在開放性問題中。T3 版的開放性問題如圖 4-2-2-2，其問題藉由數學軟體，透過操作方式及變數位置的不同讓學生觀察圖形的性質及差異的開放性問題。

圖 4-2-2-1

T2 開放性問題

隨堂練習

- (1) 寫出 45° 的兩個同界角。
- (2) 試求 500° 介於 0°~360° 的同界角。

圖 4-2-2-2

T3 開放性問題

手腦並用 4

- (1) 在 Desmos 軟體輸入 (可由教師輸入，亦可選擇其他軟體操作)

$$S(x) = \sin x、$$

$$f(x) = \sin x + a, \quad \text{【選擇新增滑桿：} a \text{】}$$

拉動 a 的滑桿，針對 $f(x)$ 的圖形，你有什麼發現？

- (2) 在 Desmos 中再輸入

$$g(x) = b \sin x, \quad \text{【選擇新增滑桿：} b \text{】}$$

拉動 b 的滑桿，針對 $g(x)$ 的圖形，你有什麼發現？

參考文獻

一、中文部份

- 王文科、王智弘 (2020)。教育研究法(第十九版)。五南。
- 王石番 (1989)。傳播內容分析法。幼獅文化。
- 王石番 (1996)。傳播內容分析法：理論與實證 (第二版)。幼獅文化。
- 左台益、李健恆 (2017)。從教學事件分析國中數學教科書與備課用書之設計脈絡—以三角形性質單元為例。教科書研究，10(2)，67-97。
- 吳怡璇 (2014)。臺灣各時期國中數學教科書代數教材之內容分析 [未出版之碩士論文]。國立屏東教育大學數理教育研究所。
- 李健恆、楊凱琳 (2012)。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。教科書研究，5(2)，31-72。
<https://doi.org/10.6481/JTR.201208.0031>
- 周珮儀、鄭明長 (2008)。教科書研究方法論之探究。課程與教學，11(1)，193-222。
<https://doi.org/10.6384/CIQ.200801.0193>
- 周珮儀、鍾怡靜 (2013)。聯合國教育科學文化組織教科書研究與教科書修訂指引。教科書研究，6(1)，143-154。
- 徐偉民 (2013a)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊，21(1)，25-48。
<https://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2101.02>
- 徐偉民 (2013b)。國小數學教科書數學問題類型與呈現方式之比較分析—以臺灣、芬蘭、新加坡為例。科學教育學刊，21(3)，263-289。
<https://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2103.02>
- 徐偉民、徐于婷 (2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：台灣與香港之比較。教育實踐與研究，22(2)，67-94。
<https://doi.org/10.6776/JEPR.200912.0067>
- 教育部(2008)。普通高級中學課程綱要。教育部。
- 教育部(2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。教育部。
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域。教育部。
- 陳霈頡、楊德清(2005)。數學表徵應用在教學上的探究。科學教育研究與發展季刊，40，48-61。
- 楊德清、陳仁輝 (2011)。臺灣、美國和新加坡三個七年級代數課程發展學生數學能力方式之研究。科學教育學刊，19(1)，39-67。
- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。教育科學研究期刊，60(1)，33-72。
[https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60\(1\).02](https://doi.org/10.6209/JORIES.2015.60(1).02)
- 歐用生(2000)。教育研究法。師大書苑。

- 鍾靜(2005)。論數學課程近十年來之變革。《教育研究月刊》，133，124-134。
- 洪郁雯、楊德清（2006）。具體表徵融入數學教學之探索。《屏東教大科學教育》，23，30-38。

二、英文部分

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.
- certification. *American Educational Research Journal*, 46(2), 501-531.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, 28(2), 146-180.
- Eysenck, M. W., & Keane, M. T. (2015). *Cognitive psychology: A student handbook*. Psychology press.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x
- Grouws, D. A., Tarr, J. E., Chávez, Ó., Sears, R., Soria, V. M., & Taylan, R. D. (2013). Curriculum and implementation effects on high school students' mathematics learning from curricula representing subject-specific and integrated content organizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(2), 416-463.
- Grouws, D., Smith, M., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. Mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 221-269). National Council of Teachers of Mathematics.
- Henningsen, M.A., & Stein, M.K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524-549.
- Hong, D. S., & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: The case of quadratic equations. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 241-263. doi:10.1007/s10649-013-9512-4
- Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education : a study of textbooks as the potentially implemented curriculum*.

- Kaput, J.J (1987). Towards a Theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage publications.
- Lesh, R., & Lamon, S. J. (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics*. American Association for the Advancement of Science.
- mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS
- Mesa, V., & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics*, 79 (1), 85-107.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council. (2004). Framework for evaluating curricular effectiveness. In J. Confrey & V. Stohl (Eds.), *On evaluating curricular effectiveness: Judging the quality of K-12 mathematics evaluations* (pp. 36-64). National Academies Press.
- Rowan, T. E., Payne, J. N., & Towsley, A. E. (1990). Implementing the standards: Implications of NCTM's standards for teaching fractions and decimals. *Arithmetic Teacher*, 37(8), 23-26.
- Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teacher College Press.
- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, Information Age.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 247-280.
- Willoughby, S. S. (2000). Perspectives on mathematics education. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 1-15). Reston, VA: NCTM.
- Yang, D.-C., & Wu, W.-R. (2010). The study of number sense: Realistic activities integrated into third-grade math classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 103(6), 379-392. doi:10.1080/00220670903383010

2023 年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集
*2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th International
Conference on Technology and Mathematics Education*

Zhu, Y., Fan, L. Focus on the Representation of Problem Types in Intended
Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland
China and the United States. *Int J Sci Math Educ* 4, 609–626 (2006).
<https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9>

The Content Analysis of Senior High School Mathematics Textbooks: Taking the Topic of “Trigonometry” as an Example

Hua-Jun Li¹ Erh-Tsung Chin²

¹Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

²Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education

Abstract

The purpose of this study is to explore the similarities and differences in the trigonometry courses of the various versions of senior high school mathematics textbooks under the 108 curriculum guidelines in Taiwan. The research subjects are the six versions of mathematics textbooks in Taiwan. The method of content analysis is adopted in the research to analyse and compare the contents of these six versions of textbooks, taking "question" as the unit of analysis, and analysing the representation types and answer types of the topic according to the types of mathematical problems in Zhu and Fan (2006). The research results show that, in terms of arrangement content, the mathematical concepts in Taiwan's textbooks are presented in a spiral form and the layout is interspersed with pictures and texts or illustrated by cartoons, and there are differences in the arrangement between versions. There are also differences between A, B versions of the same publisher. From the perspective of the types of mathematical problems, the representation types of mathematical problems are dominated by mathematical types and text types, which shows that the problems focus on calculation and problem-solving abilities, and present multiple problem-solving methods and processes; The types of answers are mainly closed questions, which shows that the questions focus on a single answer and the correctness of the answer.

Key words: 108 Curriculum Guidelines, Textbook, Trigonometry, Content Analysis

一位國小生手教師數學教學提問類型分析之研究

廖啟佑¹ 林原宏²

¹ 國立臺中教育大學數學教育系 bma110106@gm.ntcu.edu.tw

² 國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

中文摘要

進入教職工作的前幾年稱為生手教師，他們讓學校、學生及家長感受到與時俱進的教育環境。後設認知使人了解自己的思維過程、提高閱讀意識，而「提問」在教學過程中有多項教育上的功能，能夠使學生學習新知識、產生概念改變、促使學生尋找知識與資訊，進而達到課程目標，故提問在目前數學教學中教師常用的方法，也是即時了解學生想法的一種教學評量策略。

然而在教科書、教師專用手冊中很少引導教師如何使用「提問」進行教學，且生手教師相較於資深教師的教學經驗較少，故本研究欲探討一名生手個案教師在數學教學中所使用的提問類型之頻率與時機，主要採用半結構式晤談法蒐集資料，並結合觀課影片及文獻蒐集，做出以下分析。分析結果發現：

- 一、個案教師在形成性評量中先使用反思性提問找出問題再使用理解性提問強化學生數學概念。
- 二、個案教師在數學教學中結合 PPT 並放上日常生活之圖片使用連結性提問引起學生興趣。
- 三、個案教師認為因普遍學生數學能力較不足，故在數學教學的提問中較少使用策略性提問，大多以理解性提問為主。

關鍵字：生手教師、數學教學、提問類型、後設認知

壹、緒論

本研究在探討國小生手教師數學教學提問類型分析之個案研究，以下依序說明本研究之研究動機、研究目的。

一、研究動機

提問在目前數學課室中是教師常用的教學方法，也是教師即時了解學生想法的一種教學評量策略，因此提問是非常重要的。馬會梅（2009）指出教師能掌控最佳提問時機，才能讓提問發揮最佳效果。而近年來後設認知（metacognition）逐漸受到重視，且後設認知的發展可以透過提問來進行。因此本研究欲採用 **Mevarech 與 Fridkin（2006）** 以後設認知為主的四種提問類型，故此為本研究的動機之一。

陳淑娟（2008）指出，教師提問是當今數學課室裡重要的教學運用，不僅關乎師生對話的品質，更牽動著學生數學概念的學習。但是在教科書、教師專用手冊中很少引導教師如何使用「提問」進行教學。且生手教師因經驗不足，發問節

奏掌握度不若經驗教師（陳怡靜、林吟霞，2013），因此生手教師在數學課室中使用提問的類型及頻率是非常值得探討的，故本研究欲了解生手教師在四種提問類型的使用頻率，此為本研究的動機之二。

二、研究目的

根據上述研究動機，本研究旨在探討國小某生手教師數學教學提問類型之分析，提出研究目的如下：

- (一) 探討個案教師在數學教學中所使用的提問類型之時機。
- (二) 探討個案教師在數學教學中所使用的提問類型之頻率。

貳、文獻探討

一、提問之探討

「提問」是指在教學歷程中提出問題的行為，常見的提問型式可分為「教師提問」與「學生提問」（吳思逸，2013），康淑娟與劉祥通（2010）指出，在數學課室中教師提問是教師常用的教學策略之一。若是能針對教師與學生對話中實際的引導與分析，將會有助於生手教師培養並精進其教學能力（Viiri & Saari, 2006）。因此本研究以「教師提問」的角度探討在數學教學中使用提問的類型及頻率。

Cowie (1995) 提到如果要促進學生進行數學思考，則必須透過教師的提問。特別是有效的提問幫助學生解釋、說明他們的想法，以及探索學生的認知 (Kosko, Rougee & Herbst, 2014)。教師的每一次提問就是增加學生一次思考的機會，所以老師若能有效運用提問的技巧，就能激發學生不同的層次的討論活動 (張玉成, 1991)。Bednarz 與 Metoyer (2010) 亦指出並非所有的問題皆能有效地鼓勵學生思考，知道何種類型的問題容易培養學生思考技能，對於教師有效教學是重要的。教師可以使用不同類型的問題使學生投入思考與論證的過程 (Kawalkar & Vijapurkar, 2013)。故教師應先熟悉提問之分類，能幫助教師分析教材，選擇使用較適切之提問類型，本研究依據 Mevarech 與 Fridkin (2006) 所提出的後設認知教學策略，整理出教師課堂提問有四種類型：

1. 理解性提問 (comprehension questioning)：讓學生了解題目的意思、或是讓學生理解事實性的內容，主要進行 what 或 who 的提問。
2. 連結性提問 (connection questioning)：透過提問讓學生經由舊有的觀念或生活經驗，幫助學生與現有的知識進行連結，主要進行 when 或 where 的提問。
3. 策略性提問 (strategic questioning)：透過提問幫助學生整合解題需要的概念和策略，主要進行 How 的提問。
4. 反思性提問 (reflection questioning)：透過提問讓學生進行反思、回顧或檢驗答案的合理性，主要進行 why 的提問。

NCTM (2000) 指出凡是能引發學生心智活動，並引導學生回應，將概念吸收進而達到教學目標，皆可稱為數學提問。問題可以是口頭的，或是出現在教科

書文本與測驗上以引發學生思考 (Bednarz & Metoyer, 2010)，而陳淑娟 (2008) 指出通常數學提問會有一個用來作為討論的開端，後續引導學生順利解題，需要靠教師的口頭關鍵提問。故本研究主要以觀察生手教師在數學教學中針對學生進行的「口頭提問」。

二、生手教師之探討

在教學過程中，生手教師 (novice teacher) 難免會產生教學困擾，因為種種因素無法達到原本目標而導致情緒的不安的狀態 (項祖恩, 2013)。本研究綜合國內外研究生手教師的困擾整理如下：1. 工作壓力感受稍大；2. 人際關係層面壓力；3. 無法控制教學時間；4. 教材安排不佳；5. 缺乏教學策略；6. 教學資源與設備不足；7. 難掌控學生學習表現；8. 提問節奏掌握不佳。

黃永和 (1996) 指出在數學教學中，生手教師較不清楚學生是否理解，而是以心目中的答案引導學生。且生手教師對於提問的方式及時間不容易掌握，以至於數學學習效果不彰 (高菁霞, 2001)，Park 與 Kim (2023) 更指出教師在數學教學的生涯中，生手教師階段可能會產生永久的影響。故本研究主要以觀察生手教師在數學教學之提問類型。

參、研究方法

一、研究對象

本研究採立意取樣，選取一名生手教師為研究對象，個案教師以「劉老師」為化名，在小學有六年教學經驗，目前任教於台中市○○國小，本研究所觀察的教學影片為該師任教於○○國小時所記錄的教學影片。

二、資料蒐集與分析

本研究蒐集劉老師在110學年度上下學期以及111學年度上學期，共三次的教學錄影，並且與劉老師進行半結構式晤談，晤談教師對於提問策略教學的相關經驗。

研究者為使資料分析更有效率，將教學錄影與晤談資料加以編碼整理，編碼範例請見下表1。

表 1 教學錄影及晤談資料代碼表

代碼	意義
影 A11001	110 學年度上學期翰林版一六年級小數除法
影 A11002	110 學年度下學期翰林版一六年級速率
影 A11101	111 學年度上學期康軒版一四年級三角形
晤 A11112	民國 111 年 12 月與劉老師晤談所得資料

三、資料處理

本研究先將個案教師授課影片紀錄成文字，列舉出教師在數學教學中出現的提問內容，經篩選過後得到提問 125 項，邀請一位數學教育領域的研究生共同依

照 Mevarech 與 Fridkin (2006) 的四種提問類型進行分類，計算評分者信度，以增加本研究觀察的一致性。

兩位評分者根據提問進行第一次分類後，針對分類標準及分類不一致處進行逐一討論後，再根據第二次分類的結果加以計算（如表 3）。如表 4 所示，其 Kappa 相關係數為 0.934 ($p < .001$)，因此本研究的評分者信度可以接受。

表 3 兩位評分者第二次分類之評分表格

	理解性提問	連結性提問	策略性提問	反思性提問	總和
分析者 1	85	21	5	14	125
分析者 2	88	19	4	14	125

表 4 評分者一致性之 Kappa 相關係數

	數值	顯著性近似值
Kappa 統計量數	.934	.000
有效觀察值的個數	125	

表 5 課堂中的活動教學目標舉例

- | |
|---|
| (1) 概念理解：指數學內容中的概念性知識，讓學生知道、應用「事實與定義」。
例：八角柱有（ ）個面、（ ）個頂點、（ ）條邊。 |
| (2) 程序執行：指數學內容中的程序性知識，包含各種計算算則，此算則為一種工具。如操作數與計算符號、四捨五入法、幾何作圖、製作圖表。判斷學生是否知道如何去完成數學運算。
例：請計算出 $24 + 12 \div 3 \times 4$ 的答案為何？ |
| (3) 解題與思考：指對數學問題的解題能力，能夠判斷學生是否能在情境中使用已累積的數學知識能力。
例：一個機器人模型賣 180 元，買 4 個機器人模型比買 6 輛汽車模型的價錢少 30 元，一輛汽車模型賣多少元？ |

本研究之目的為探討個案教師在數學教學中所使用的提問類型之時機。研究者將時機定義包含單元教學目標。如表 5，課堂中的活動教學目標分別為概念理解、程序執行以及解題與思考。

最後將與個案教師晤談時所獲得的晤談資料進行統整、歸納，經過受訪者的確認後進行資料分析，最後參考及引用相關文獻作成結論。

肆、研究結果

一、劉老師在數學教學中所使用的提問類型之時機

(一) 面對概念理解時，常使用理解性提問搭配日常生活的圖片

對於概念理解老師會將教學需要的圖片或文本等放於 PPT 上，使學生能夠直

覺性地看到後並提出理解性提問，並帶著學生瀏覽圖片或文本中的重點(如圖 1)；特別是老師會將日常生活中會接觸到事物或是藝術作品在教學中進行連結。例如：老師會拿世界有名的畫作來認識三角形，帶著學生觀賞畫作之美的同時讓學生找出圖中的三角形(如圖 2)，並且透過理解性提問讓學生清楚知道三角形的性質。

應該會用比較偏向理解性的吧，就是直接問他們說，我們就一個圖形出來，然後就可能問他們說，請問這個圖形這個角柱有幾個面幾個頂點，然後我們就一個一個去看，我們就開始數。……就是可能 show 一個圖片。「欸，請問這個是什麼？」「這是什麼圖形」。……我可能會找一些有名的畫作類似這樣，……透過這個找三角形，讓他們了解三角形的定義這樣子。(晤 A11112)



圖 1 速率單元之上課情形

(影 A11002)



圖 2 三角形單元之上課情形

(影 A11101)

(二)面對程序執行時，以理解性提問居多，有時使用隨堂練習加強數學概念

在數學教學中，老師提問的答案大多較為單一，上課的問答過程如同學生面臨題目一般，一步驟一步驟慢慢解題，如下方的觀課影片對話所使用的理解性提問可看出此情形。因此老師不斷地使用理解性提問讓學生能夠穩固其數學知識，進而透過形成性評量達到該堂課的教學目標。

老師：對。5.080。5.08....後面那一個 0 要不要省略？(理解性提問)

學生：不要。

老師：因為他說取到第幾位？(理解性提問)

學生：第三位。

(影 A11001)

老師：有沒有人可以跟我講第一題的答案？為什麼？(理解性提問)

學生：27.40。因為他說取小數點第二位，第二位是 0、第三位是 3， $3 < 5$ ，所以 3 不進位。

老師：第二題？為什麼？(理解性提問)

學生：因為他要取到小數點第三位，要看第四位，第四位是 9，所以要進給 2。

(影 A11001)

程序性的東西，我反而就是自己練習，……就像我們就會練那個數八格，我可能就出個幾題，但是我不會馬上就丟很難的題目給他，……後面才會開始，即使他後面遇到困難，他也會自己想辦法試著算算看，……算完之後再來，就是一直練習，錯了也沒關係就繼續修正，反正你自己錯了，你才知道你自己哪裡錯。(晤 A11112)

我那個時候的國中老師他怎麼做呢？他就是把代數的那個單元，是他就給 100 題 200 題全部都算。你就一直算，有一天我不知道為什麼算一算哦，我就都會算了，就開始熟練了，然後我就開始很有興趣。(晤 A11112)

上方的晤談中老師分享自身的經歷，認為直接讓學生自己操作練習來發現自己的問題，慢慢修正使學生達到程序執行的教學目標，並對數學產生興趣。

(三)面對解題與思考時，以理解性提問為主強化題目中的概念理解問題；較難的題目適時使用連結性提問

老師認為在面臨解題與思考的題目時應有其階段性。以怎樣解題單元的流水問題為例，若題幹中有出現「順水」或「逆水」等關鍵字時，學生應當能夠回答得出其概念上的意義；若出現錯誤時，則應當先加強概念再解決後續問題。所以在面對解題與思考的題目時，老師會先以理解題目的內容為主，透過理解性提問確保學生是否已經掌握了概念理解之概念。

我可能就是先把題目敘述完，然後會反問他們理論的部分，所以我可能會先問他們理解性的，因為我要先知道說他們懂不懂這個題目在問什麼，我就可能問他們說，請問順水的時候船速是怎麼算？……他前面應該已經有學過，怎麼計算順水跟逆水，或者是就是靜止船速是什麼意思。先要懂概念，你才可以有後續。……去把原理先搞懂再來算。(晤 A11112)

若遇到較複雜的解題與思考之題目時，老師仍先以理解性提問確認學生是否掌握概念理解的問題，此時老師通常會視題目適時的加入一些連結性提問。仍以流水問題為例，若題目出現順水船速反求靜止船速時，老師認為逆算以及以符號代表數的觀念在以前已經學過了，再將式子條列在黑板上，學生就能解決該題。

今天在一個順水的流速下面是多少？水流速度多少啊？請問這艘船如果今天在靜止船速的時候是多少？這種就不是馬上直接直覺的。我一樣會先問他們，請問順水船速怎麼算？就先理解。提問完之後，有人回答說，哦順著水，然後加上靜止船速加上水速，……我們就空格出來，就是把原本剛才定義的東西靜止船速然後加上水流等於實際船速實際的速度條列出來……那我要怎麼把靜止船速算出來，這時候同學就有經驗就說：哦我知道了就是實際船速減掉水流的流速，2 個相減就好了。(晤 A11112)

二、劉老師在數學教學中所使用的提問類型之頻率

(一) 劉老師認為大多以進入新的單元或章節時較常使用連結性提問

老師在新單元開始時會盡可能地讓學生與日常生活連結，並使用連結性提問讓學生發表，因為老師認為大部分的學生對於數學是不感興趣的，若能喚起學生們的生活經驗，可以豐富數學教學的內容，學生也較願意投入課程裡，但是老師認為在開始數學的主要教學內容後就會較少使用連結性提問。

連結性就是開頭吧，進入這個新的單元或者是新的章節，可能才會用連結性，不管是前經驗或者是前面教過的東西，或者是時事……之後帶完就比較少再繼續使用連結性提問。……就可能開始程序性的計算就比較少。因為可以問他們什麼是世界跑最快的動物是什麼？他們一定很有興趣這個。他們對數學沒有興趣，他對誰跑最快可能會有一點興趣。(晤 A11112)

(二) 劉老師認為自己較少使用策略性提問

在數學課室中，因各個學生程度不一的問題，且擁有多種算法能力的學生為少數，故老師認為學生先以一種固定算法為主即可，使用策略性提問的次數會較少於其他三種提問。

高年級部分比較多啦。……也會有但是比較少，因為他們也是程度比較沒有到那麼好，我只希望他們有一個可以算的算法就好了。……我覺得...有啦，就是可能我那時候 16 個人可能只有 5 個人可以有辦法有想到其他的做法。(晤 A11112)



圖 3 劉老師上課所使用之教科書。康軒(111)數學 4 上課本第 05 單元三角形。

老師：全班回答我。(正三角形)幾度？(理解性提問)

學生：60 度。

老師：三個角都 60 度嗎？(理解性提問)

學生：對。

老師：還有沒有人可以用簡單的方式證明三個角都一樣？(策略性提問)

學生：因為他們三個邊一樣長，所以三個角一樣大。

(影 A11101)

課室對話中可以看到老師使用策略性提問「還有沒有人可以用簡單的方式證

明三個角都一樣？」讓學生解決程序執行之問題，但在教學影片中發現老師的教學脈絡仍以課本為主（如圖 3），加上老師在上課的過程會讓學生看 PPT 及課本的內容，也能呼應前面的晤談內容老師所提及的「我只希望他們有一個可以算的算法就好了」，以課本的脈絡學習即可。

（三）劉老師認為理解性提問與反思性提問二者為最常使用的提問類型，先利用反思性提問挑戰學生，再以理解性提問確認數學概念

每當老師達到該堂課的教學目標後會進行形成性評量，而在過程中通常會讓學生講述算式或想法，並使用反思性提問檢查學生是否產生迷思。無論學生有無出現迷思，老師會再使用理解性提問穩固學生的數學知識或破除學生的迷思。

哦，你這裡怎麼是假分數呢？不是帶分數的定義。來，這時候再回到理解性提問。

（先反思再接理論的理解性提問。）

對，我就回啊，請問那個帶分數的定義是什麼？.....

（解題與思考部分老師還是會比較著重在理解性的提問去做進行嗎？）

對，比較多啦。比較因為我覺得是也要看學生的差異性。因為我覺得唉，以我遇到的這幾個班級，他們的基礎就沒有很好，所以你要他連基礎都不穩的時候，你又要他可以有什麼天馬行空的想法，我覺得是做不太到，所以我會一直著重在他們最基礎的理論的部分。（晤 A11112）

三、劉老師在數學教學中提問類型之轉變

本研究欲了解個案教師在三個學期中數學教學提問類型之轉變，研究者發現劉老師第三學期之反思性提問較於其他學期佔比提高許多(如表 6)。在晤談過程中，劉老師認為自己並無特別增加提問次數或偏重某一提問類型，不過劉老師希望學生能多發表自己的想法，讓老師能夠確認學生之數學概念。

嗯，可能沒有特別吧，可能只是剛好遇到這個……可能是單元的關係啦，因為可能希望他們想要有多一點的想法出來吧，所以我可能會稍微追問他們一下，再深入一點看他們有沒有對理解性的東西，或者是他基礎的東西有沒有夠穩。

表 6 不同單元中四種提問類型之百分率

	速率	百分率	小數除法	百分率	三角形	百分率	加總	總百分率
理解性提問	36	74%	26	65%	23	64%	85	68%
連結性提問	6	12%	12	30%	3	8%	21	17%
策略性提問	3	6%	0	0%	2	6%	5	4%
反思性提問	4	8%	2	5%	8	22%	14	11%

伍、結論與建議

本研究從晤談中可以發現個案教師認為普遍的國小學生在數學程度上較差，且個案教師有時提問給予的提示過於明顯，反而達不到提問的效果。故建議個案教師在數學教學提問上可以加長學生思考時間，或是提問的內容可以更為具體，促進學生有效的思考。

參考文獻

一、中文文獻

- 吳思逸 (2013)。國小社會習作習題之提問類型分析 (未出版之碩士論文)。臺北市立教育大學，臺北。
- 馬會梅 (2009)。教師教學提問行為研究。《教育探索期刊》，215，88-89。
- 高菁霞 (2001)。一個嘗試落實國小數學新課程精神之初任教師的數學教學現況探討 (未出版之碩士論文)。國立臺北師範學院，臺北。
- 張玉成 (1999)。《教師發問技巧 (第二版)》。臺北：心理。
- 陳怡靜、林吟霞 (2013)。初任教師與經驗教師課堂發問技巧之個案分析。《國教新知》，60 (3)，95-104。doi:10.6701/TEEJ.201309_60(3).0007
- 陳淑娟 (2008)。國小教師發展數學提問能力之合作行動研究 (未出版之博士論文)。國立台南大學，臺南。
- 黃永和 (1996)。國小實習教師數學學科教學知識之個案研究 (未出版之碩士論文)。國立彰化師範大學，彰化。
- 項祖恩 (2013)。初任教師擔任國中導師工作壓力與因應策略之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺灣師範大學，臺北。
- 康淑娟、劉祥通 (2010)。數學提問教學之探討與應用。《科學教育月刊》，333，2-18。

二、英文文獻

- Cowie, B. (1995). The Challenge of Teaching for thinking Mathematics Classroom. T. Neyland(ed), *Mathematics Education: A Handbook for teachers*, 2, 49-59.
- Jo, I., Bednarz, S., & Metoyer, S. (2010). Selecting and Designing Questions to Facilitate Spatial Thinking. *Geography Teacher*, 7(2), 49-55.
- Kawalkar, A., & Vijapurkar, J. (2013). Scaffolding science talk: The role of teachers' questions in the inquiry classroom. *International Journal of Science Education*, 35(12), 2004-2027. doi:10.1080/09500693.2011.604684
- Kosko, K. W., Rougee, A., & Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal*, 26(3), 459-476.
- Mevarech, z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition Learning*, 1, 85-97. doi:10.1007/s11409-006-6584-x
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Park, M., & Kim, Y. (2023). Instructional quality of two beginning mathematics teachers for three years: what professional competency makes a difference? *Educational Studies in Mathematics*, 112, 505-529.

Viiri, J., & Saari, H. (2006). Teacher talk patterns in science lessons: Use in teacher education. *Journal of Science Teacher Education*, 17(4), 347-365.
doi:10.1007/s10972-006-9028-1

A Study on the Analysis of the Types of Questions Asked by a Novice Teacher in Mathematics Teaching

Qi-You Liao¹ Yuan-Horng Lin²

¹ Department of Mathematics Education, National Taichung University

² Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

The first few years before entering the teaching job are called novice teachers. They let the school, students and parents feel the educational environment that keeps pace with the times. Metacognition enables people to understand their own thinking process and improve reading awareness. "Questioning" has multiple educational functions in the teaching process. It can enable students to learn new knowledge, produce conceptual changes, prompt students to seek knowledge and information, and achieve the goal of the course. Therefore, asking questions is a common method used by teachers in current mathematics teaching. It is also a teaching evaluation strategy to understand students' thinking in real time.

There are few textbooks and teacher-specific manuals to guide teachers on how to use "questioning" in teaching, and novice teachers have less teaching experience than experienced teachers. In "The frequency and timing of the types of questions used" and "The types of questions used in different units", the semi-structured interview method is mainly used to collect data, and combined with the lecture video and literature collection, the following analysis is made. The analysis found that:

1. In formative assessment, case teachers first use reflective questions to identify problems and then use comprehensible questions to strengthen students' mathematical concepts.
2. Mathematics teaching combines PPT with pictures of daily life and uses linking questions to arouse students' interest.
3. The teacher of the case thinks that due to the lack of mathematics ability of the students in general, strategic questions are rarely used in the questions of mathematics teaching, and most of them are mainly comprehension questions.

2023 年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集
*2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th International
Conference on Technology and Mathematics Education*

Keywords: novice teachers, mathematics teaching, questioning types, metacognition

國小五年級學童於素養導向之整數四則運算文字題解題歷程探究

吳岱陽¹ 姚如芬²

¹ 嘉義縣阿里山鄉香林國民小學 dyedu108@gmail.com

² 國立嘉義大學教育學系 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究欲了解國小五年級學童於素養導向之整數四則運算文字題解題歷程。研究者從服務學校以四年級篩選測驗及平時學習情形抽取 3 位五年級學生作為個案學童，其中 1 位為高成就學童，2 位為低成就學童。研究採個案研究法。研究結果發現高成就學童在理解題意的過程傾向完整語句進行解讀且嘗試用自己的話語說明，針對後續解題所需要之訊息進行重點摘要，並省略解題無需使用之情境敘述，且在四個解題歷程：理解問題、擬訂計畫、執行計畫、回顧皆能順利執行。低成就學童則會採取完整覆誦題目，或以關鍵字的方式理解題意，而受策略影響，不論題目是否有情境融入，理解題意對低成就學童是一大挑戰；且因理解題意有困難，導致低成就學童在擬訂策略階段所列的算式常會與題意有所誤差；而即使低成就學童能成功運作前兩階段，在執行計畫時，也會因四則運算能力不佳導致解題失敗；至於在回顧階段則是發現低成就學童不能夠連結數字與題目，無法清楚理解各數字代表之意義。

關鍵字：整數四則運算、素養導向、數學文字題

壹、緒論

十二年國民基本教育課程綱要以「核心素養」做為課程發展之主軸(教育部，2014)。108 課綱數學領域課程特色著重學生能將生活中所遇到的問題轉化成數學問題並且解決它(國家教育研究院，2020)。為符應培養學生核心素養，評量的試題也進行調整。吳正新(2019)提到數學素養導向試題特色之一包含情境。PISA2022 數學評量架構亦提出架構之一為情境脈絡(PISA 國家研究中心，2022)。試題為納入情境脈絡導致題幹的文字敘述日趨複雜，對於學生的解題能力有更多考驗。

四則運算在數學領綱(2018)中屬於數與量(N)主題，國小每個年級都有對應的四則運算相關學習內容，可以見得四則運算為國小數學學習之重點。學生在解決四則運算問題須經歷文字題轉譯解題心智歷程才能解決二步驟四則混合問題，因此學生容易在四則混合運算中出現學習困難(許家驊，2016)。整數四則運算在數學領綱的規劃為五年級需學習完成，以便銜接六年級及國中課綱設定之學習內容，因此五年級四則運算學習成效對往後數學學習有其重要性。

然而，在國小的教學現場中，學童究竟是如何解決素養導向的文字題？其解題歷程為何？較少有相關研究結果的分享，因此本研究擬結合學童的紙筆紀錄及訪談資料，將主要研究目的設定為「探討五年級學童於素養導向之整數四則運算數學文字題的解題歷程。」其中，本研究所指的數學文字題須符合「與

真實生活情境或情境脈絡連結」以及「強調總綱核心素養或領域／科目核心素養、學科本質及學習重點」兩項條件；而解題歷程則是分為理解問題、擬訂計畫、執行計畫、回顧四個階段。

至於本次研究所指的整數四則運算範圍，主要為 108 數學領綱中五年級之學習內容，包括：N-5-2、R-5-1、R-5-2，而因應部分學童為學習扶助個案因此也會同步納入 R-4-1、R-4-2 等學習內容。

貳、文獻探討

一、國小四則運算教材地位與重要性

108 課綱數學領綱國小三個學習階段提到四則運算相關學習重點如下：

- (一) 第一學習階段：能初步掌握數、量、形的概念，重點在自然數及其運算。
- (二) 第二學習階段：在數方面，能確實掌握自然數的四則與混合運算，培養流暢的數字感，並初步學習分數與小數的概念。
- (三) 第三學習階段：確實掌握分數與小數的四則計算。能以常用的數量關係，解決日常生活的問題。

從上述學習重點可以發現國小三個階段皆含有四則運算相關內涵，可以見得四則運算為國小數學學習之重點。本研究設定之五年級四則運算須完成整數四則運算之學習，以便銜接六年級分數、小數的研究問題，國中負數、數的運算規則學習內容，因此檢視五年級學生四則運算學習有其重要性。

二、國小學童於四則運算的解題表現之相關研究

陳國雄(2006)研究指出在四則運算解題學生常有下列常見錯誤的情形：四則運算能力不佳、題目理解有誤、無法正確將文字轉譯成算式。其他研究提出四年級學生在解讀四則運算文字題會依靠關鍵字，且有乘除混淆情形(徐偉民、林潔慧，2010)。方建良、黃秀霜(2014)研究則發現學生在四則運算解題易發生錯誤類型有(1)計算錯誤(2)四則運算規則運用能力不佳(3)文字題轉譯能力不足(4)兩步驟併式有誤。綜上所述，學生在四則運算解題常見錯誤不外乎(1)理解題意(2)列式(3)四則運算能力不足，而了解學生解題歷程可更清楚分析學生所遭遇學習難點，進而提供學生所需協助。

三、素養導向評量

素養導向評量的功能為評估、回饋與引導課程與教學之實施。試題的設計有下列兩個基本要素(1)佈題強調真實的情境與真實的問題。(2)評量強調總綱核心素養或領域／科目核心素養、學科本質及學習重點。(國教院，2018；任宗浩 2018)。陳逸倩、李怡穎(2021)也指出設計符應素養試題應從生活情境應用作為出發。謝佩蓉(2018)則提出素養試題應符合下列兩項條件：「在合理的脈絡下問合理的問題」且內涵為「新課綱學習表現與學習內容兩相結合」、「在合理的脈絡下問合理的問題」且內涵為「跨科核心素養」。生活情境或情境脈絡是素養導向試題必要元素(吳正新，2019)。

研究者統整素養導向評量應包含下列(1)試題應包含生活情境或情境脈絡

(2) 試題應強調學科本質、學習內容、學習重點。(3) 試題目的應是評估學生是否具備欲測量之核心素養。

四、數學文字題解題歷程的相關研究

數學文字題的特徵即是使用語言文字呈現數學問題，讓學生使用數學知識和計算解決題目的問題情境，進一步解決真實生活的問題(王瑋樺，2001；陳國雄，2006；徐偉民、林潔慧，2010)，解決數學文字題除了計算能力，還須數學概念理解能力(張景媛，1994)。Polya 在 1957 年的著作「How to Solve It」提出 Understanding the problem、Devising a plan、Carrying out the plan、Looking back 四個解題階段。許家驊(2016)歸納出數學文字題大致分成四個步驟閱讀理解、計畫、執行、回顧，執行時又可細分成列式及計算兩部分。徐偉民、林潔慧(2010)則指出學生解文字題需使用舊經驗解決新問題，經由分析、推理與組織解決文字題。從上述可知，解決數學文字題牽涉多個歷程，研究者參考過去研究將本篇研究解題歷程分為理解問題、擬訂計畫、執行計畫、回顧四階段。

參、研究方法與設計

第一節 研究方法

本研究欲探討五年級學生處理整數四則運算素養導向文字題解題歷程。若僅從學生書面解題紀錄難以完整呈現背後完整的解題歷程與思維，因此本研究採質性研究取向，使用個案研究法。希望除了透過紙筆的解題記錄外，搭配與個案學童晤談，期待能更加完整了解個案學童在面對數學文字題時的解題歷程與思維。

第二節 研究現場與參與者

一、研究現場

研究現場為研究者目前服務之某山區偏鄉學校。學生學習動機不強，且學校位處偏遠，全部學生皆沒有校外補習的介入，全部學習皆仰賴學校提供。

二、研究對象：

本研究依四年篩選測驗及平時學習情形，抽取研究者服務學校五年級學童 3 位作為個案。3 位個案學童的數學學習表現不同，說明如表 3-1。

表 3-1 個案學童背景分析

編號	學習情形描述：
01	從三年級開始為數學學習扶助之個案，學習反應較慢，因此學習時間需要較久。
02	為本次個案中學習成就較高之學童，母親對學業較為要求，因此較為要求學童平時進行課業練習。
03	為數學學習扶助之個案。二年級轉學至本校，二年級學習就較為落後，四年級時就已經是學習扶助個案，學習動機較為低落。

第三節 資料蒐集與分析

本研究目的在了解五年級學童的解題歷程，因此主要研究資料將蒐集個案

學童試題之紙筆紀錄。另外為了解個案學童紙筆記錄無法呈現之解題歷程及想法，因此研究者還會進行個案學童訪談，詳細說明如下。

一、資料蒐集

(一) 數學文字題一份:用以了解個案學童解決文字題運用方法所留下的紙筆記錄，分析如表 3-2。

表 3-2 數學文字題分析

題目	學習內容	生活情境連結分析
(1)學校準備340個木片進行綠巨人課程，第一週課程用掉79片，第二週用掉81片，請問還剩下幾個木片？	R-4-1 R-4-2	綠巨人課程為學校校訂課程。
(2)學校有360瓶保久乳，每6瓶裝成1盒，每4盒裝成1箱，請問可以裝多少箱？	R-4-1 R-4-2	學校有接受保久乳的捐贈，包裝形式如題幹所述。
(3)OO國小有6個班級，每班有4個學生，學校要發給每位學生12個口罩，請問學校需要準備多少個口罩？	R-4-1 R-4-2	學校於疫情期間會定時將縣府配發之口罩發給學生。
(4)高阿姨把1200毫升的紅茶和900毫升的牛奶混合成奶茶後，平分裝成6杯。請問每杯奶茶有多少毫升？	R-4-1 R-4-2	學校廚工會將學校未飲用完之保久乳混合紅茶供學生作為點心。
(5)一箱飲料特價100元，班上8位同學合買16箱飲料送給育幼院，飲料錢8位同學平分，請問每1位同學要付多少元？	R-4-1 R-4-2	雖學生沒有捐贈物資的經驗，但本校常受到捐贈，因此學生對於捐贈的情境還算熟悉。
(6)7-11 進貨 700 包餅乾，第一週賣掉 123 包，第二週賣掉 132 包，第三週賣掉 145 包，請問 7-11 經過這三週還剩幾包餅乾？	N-5-2 R-5-1 R-5-2	本校附近商店偏少但有便利商店，學生課餘時間也常至便利商店進行消費。
(7)蘋果 3 顆賣 120 元，媽媽購買 12 顆蘋果，媽媽付 1000 元，請問可以找回多少錢	N-5-2 R-5-1 R-5-2	透過題幹情境的敘述，學生應能連結至媽媽買東西給學生之情境。
(8)OO國小到科教館校外教學，學生共有20人參加，每個人需要付門票70元、保險30元，另外還需另付17850元的遊覽車車資，請問香林國小學生去校外教學的總花費是多少元？	N-5-2 R-5-1 R-5-2	題幹敘述之情境為本學期學生戶外教育狀況，因此題幹符合與真實情境做連結。

(二)訪談

個案學童答題後，研究者再針對題目提出問題進行訪談，以了解個案學童

面對問題的數學思考情況，訪題對應解題歷程如表 3-3。

表 3-3 訪談問題與解題歷程對照

問題	對應解題歷程
1.小朋友，你看到這個題目，題目在問什麼？	理解問題
2.你可以說說看這一題你為什麼想要這麼做？	擬訂計畫
3.這個數字代表什麼意思？	執行計畫
4.你的這個算式是什麼意思呢？	執行計畫
5.最後你的這個答案代表什麼意思？	回顧

二、資料分析

(一) 資料閱讀及轉譯

本次研究蒐集資料將文字題紙筆記錄反覆閱讀，並將訪談資料轉譯成逐字稿，將兩項資料搭配反覆檢視及分析。

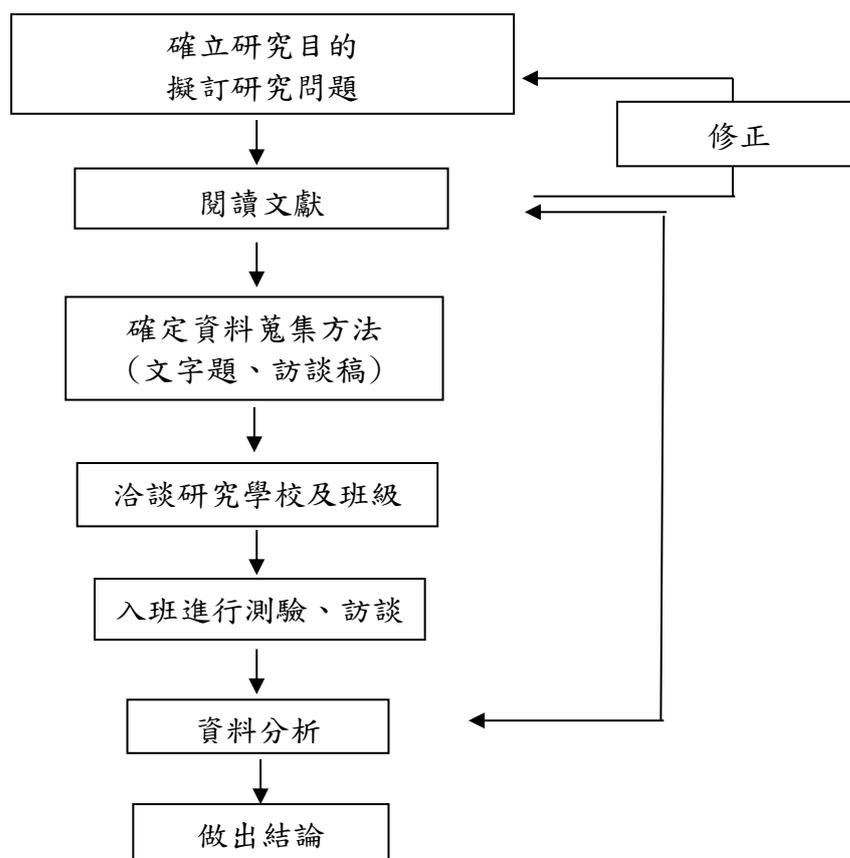
(二) 資料編碼與分析

將轉譯後的資料反覆檢視後，進行分類以及編碼，以進行系統性的分析、比較。資料代碼如表 3-4

表 3-4 資料代碼

編碼	解讀方式
S1-1	研究對象 S1 在第 1 題題目的訪談轉譯資料

三、研究流程圖



肆、研究結果

研究者整理個案學童的數學文字題的作答與訪談紀錄後，將各紀錄依照解題歷程分類後進行資料分析結果如下說明，高/低成就個案學童及解題歷程表現對照表如表 4-1。

一、理解問題

高、低成就個案學童在解讀素養導向試題有不同的情形。高成就個案學童在理解題意的過程傾向整句進行解讀且嘗試用自己的話說明，會省略情境因素而針對後續解題所需要之訊息進行重點摘要。高成就個案學童 S2 在老師詢問題目意思時回答：「是他第一週跟第二週用掉了這些，然後... 學校準備 340 個要問剩多少啊」(S2-1)；「他說 6 個班，每個班 4 個學生、發 12 個給每一個同學。他說，學校有多少個口罩分給這些學生。」(S2-3)。分別省略題目部分情境敘述，並且嘗試轉譯成自己的語句。低成就個案學童會直接重複題目敘述，或是採用關鍵字進行理解題意，上述策略導致不管題目是否有情境融入，低成就學童都難以理解題意。不同低成就個案學童的理解題意策略有些許不同。S1 除了會複誦題目外，也會採關鍵字理解題意，基本上每一題重複題目後，接著採取最後一句。「ㄉ... 剩下幾個木片啊。」(S1-1)；「問你還剩下幾包餅乾。」(S1-6)。S3 在理解題意皆採取題目敘述原封不動再說一次。「學校裡有 360 瓶保久乳，每 6 瓶裝成 1 盒，每 4 盒裝成一箱，請問可以裝多少箱」(S3-2)。

二、擬訂計畫

不同學習成就個案學童在「擬訂計畫」階段深受「理解問題」階段的影響。高成就個案學童因考慮題目完整敘述且能正確理解，因此在列式過程較容易符合題意。S2 在理解題意階段說：「是他第一週跟第二週用掉了這些，然後...學校準備 340 個要問剩多少啊」，「他說剩下幾個是用 340 去減這 2 個。」(S2-1)，並且有些題目會嘗試用較簡單的方式設定解決方法，例如第六題便嘗試用加法解決連減的問題，「是 700 減 123 加 132 加 145」(S2-6)。S1 則因使用關鍵字解讀的方法導致有些題目無法列出正確的算式。「他不是說要發給每個學生 12 個？」(S1-3)因看到發、平分該題個案學童便使用除，但本題應該是使用乘；「對，然後再加這個 16。」「因為他們要再買 16 送給育幼院。」(S1-6)，個案學童看到第六題「再」買 16 箱就直接使用加。S3 皆採題目覆誦，但因題意不能理解導致無法列出算式，如第 2 題、第 7 題直接空白。亦有發生對四則運算的印象使用猜的方式進行列式，在第一題詢問 S3 列式想法時，可能發現之前列式有誤「還剩下要用減阿」、「因為他說用掉阿，越除越小阿。」(S3-1)。

S1 解題紀錄

3. 香林國小 6 個班級，每班有 4 個學生，學校要發給每位學生 12 個口罩，請問學校需要準備多少個口罩？

$$6 \times 4 = 24 \div 12 = 2$$

5. 「一箱飲料特價 100 元，班上 8 位同學合買 16 箱飲料送給育幼院，飲料錢 8 位同學平分，請問每 1 位同學要付多少元？」

$$100 \div 8 + 16 = 28$$

S3 解題紀錄：

1. 學校準備 340 個木片進行綠巨人課程，第一週課程用掉 79 片，第二週用掉 81 片，請問還剩下幾個木片？

$$\begin{aligned} 340 - 19 \times 81 \\ = 261 \times 81 \\ = 180 \end{aligned}$$

A: 180 個

三、執行計畫

在執行階段，高、低成就個案學童執行成功率有所差異。高成就個案學童在成功計畫後較能針對擬訂的計畫正確執行，獲得題目要求之答案。低成就個案學童就算正確執行前兩階段，也容易因四則計算能力不佳導致答案錯誤。

S1 解題紀錄

8. 香林國小到科教館校外教學，學生共有20人參加，每個人需要付門票70元、保險30元，另外還需另付17850元的遊覽車車資，請問香林國小學生去校外教學的總花費是多少元？

$$17850 + 20 \times (70 + 30) = 17850 + 20 \times 100 = 19850$$

$$= 17850 + 2000 = 19850$$

A: 19850 元

S3 解題紀錄

6. 7-11 進貨 700 包餅乾，第一週賣掉 123 包，第二週賣掉 132 包，第三週賣掉 145 包，請問 7-11 經過這三週還剩幾包餅乾？

$$700 - 123 - 132 - 145$$

$$= 587 - 132 = 455$$

$$= 455$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 123 \\ \hline 587 \\ - 132 \\ \hline 455 \end{array}$$

A: 455

四、回顧

至於回顧階段，可以發現高成就個案學童對於每個數字的意義都能夠了解，低成就個案學童則偏向數字為算式的結果。研究者認為高成就個案學童對於自己執行階段的每步驟都能回到題目本身了解其意義。「就是 360 可以裝成幾箱。」(S2-2)；「一個同學要負責的錢」(S2-5)。低成就的個案學童則較難以將數字或步驟回到題目本身，容易陷入開始執行算式後文字題變成計算題。「440 就是媽媽買 12 顆蘋果減 5，再減 1000 元的答案」(S1-7)；「2100 代表 1200+900 等於的答案。」(S3-4)；「587 就是 700 減 123」(S3-6)。

伍、結論及教學建議

從紙筆及訪談資料顯示，高成就的學童在解題歷程四階段都能正確執行。低成就學童在解題四階段都有其困難點，此發現與許家驊(2016)提出學生在解決四則運算問題須熟悉四則運算基本概念及運算方法外，還須經歷文字題轉譯解題心智歷程才能解決二步驟四則混合問題，因此學生容易在四則混合運算中出現學習困難吻合，詳細結論如表 5-1。

表 5-1 高/低成就學童及解題歷程表現對照表

	理解問題	擬訂策略	執行策略	回顧
低成就學童	1. 直接重複題目敘述，不容易用自己的語言進行說明。 2. 使用關鍵字理解。 → 因使用上述兩個理解策略，不管題目是否有情境敘	1. 不理解題意直接空白。 2. 列式時會因理解題意不完整，導致列出的算式有時會與正確題意有所誤差。 3. 列式受到過往運用四則	就算前兩階段能成功執行，也很容易無法正確計算導致	容易將數字解讀為算則之答案，無法將數字回到題目進

	述，低成就學生都不容易正確理解問題。	運算經驗影響：預期數字應該會變大選擇用乘或加；預期數字應該會變小則選擇減或除。	錯誤。	行解讀。
高成就學童	1. 傾向理解題目整句敘述，並嘗試用自己的話說明。 2. 重點摘要後續解題所需訊息，省略題目情境敘述，較不受情境影響理解題意。	1. 列式較符合題意。 2. 會嘗試使用較簡單的解題方式。	較能正確執行所擬訂的策略。	對於解決問題的每個歷程、數字都能正確回顧其意義。

依據研究結論，研究者提出高/低成就學童教學建議如下：

低成就學童在解題四個歷程都需要老師進行協助，可以從下列四點著手：

1. 針對理解題意進行加強。老師協助學童在面對試題時，學習找出解題所需訊息，減少試題情境要素帶來的額外解讀負擔。以及讓學童多嘗試用自己的話說明題目，或利用畫圖策略解釋題目，用以提升低成就學童對文字題題意的理解。需要特別注意學童是否會採用關鍵字理解題意，應協助改掉此習慣。
2. 加強文字轉譯成算式的能力。從研究結果可以得知低成就學童容易列出不符合題意的算式，當學童能正確理解題意，增進其文字轉譯成算式的能力，低成就學童應能正確列出符合題意之算式。
3. 四則運算的基本能力。從紙筆紀錄中可以發現，即使低成就學童正確列式但容易因四則運算能力不佳導致錯誤執行解題，因而答案錯誤。
4. 提升數字與題目的連結。低成就學童在解題過程中數字難以與題目連結，連帶影響檢核答案是否符合題目的合理性。因此老師在教學過程應鼓勵學童多多說明計算過程每個數字回到題目是何種意義，提升連結。

高成就學童本身在面對試題並沒有太多解題困難，老師可以將目標放在進一步提升高成就學童解題能力，因此建議在高成就學童正確解決四則運算的文字題後，老師可以鼓勵高成就學童思考有沒有其他不同解題策略，並從中找出最容易的方法，協助學童發展數學文字題解題的不同思維。

陸、主要參考文獻

- PISA 國家研究中心(2022)。PISA2022 數學評量架構。台北市：國立臺灣師範大學。
- 王瑋樺(2001)。國小三年級數學學習障礙學生加法文字題解題歷程與補救教學之研究(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學。
- 方建良、黃秀霜(2014)。國小四年級低成就學生學習整數四則運算教材及其迷思概念之研究。提升中小學補救教學成效之理論與實務研討論壇，教育部。
- 任宗浩(2018)。素養導向評量的界定與實踐。載於蔡清華(主編)，課程協作

與實踐第二輯(75-82 頁)。臺北市：教育部。

吳正新(2019)。數學素養導向評量試題研發策略。中等教育，70(3)，11-35。

DOI:10.6249/SE.201909_70(3).0024

徐偉民、林潔慧(2010)。利用教學模組進行國小四年級四則運算兩步驟文字題
補救教學之行動研究。屏東教育大學學報-教育類，34，211-242。

陳國雄(2006)。國小四年級學童整數四則運算問題的解題策略與錯誤類型之研
究(未出版之碩士論文)。國立屏東教育大學。

許家驊(2016)。國小二步驟四則混合文字題解題歷程技巧學習診斷評量之編製
發展與實測分析研究。教育心理學報，48(2)，185-209。

DOI:10.6251/BEP.20151104

教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學
校-數學領域。台北：教育部。

國家教育研究院(2018)。素養導向「紙筆測驗」要素與範例試題(定稿版)。教
育部。<https://reurl.cc/RvXple>

國家教育研究院(2020)。十二年國民基本教育課程綱要-數學領域課程手冊。新
北市：國家教育研究院。

謝佩蓉(2018)。108 課綱第四學習階段國語文閱讀素養線上評量之建構。教育
科學研究期刊，63(4)，193-228。DOI:10.6209/JORIES.201812_63(4).0007

George Polya. (1957). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.
Princeton University Press.

Exploration on The Problem-Solving Process of The Literacy-Based Arithmetic Word Problem of Integers in Fifth Grade Students

Dai-Yang Wu¹ Ru-Fen Yao²

¹Chiayi County Alishan Siang-Lin Elementary School

²Department of Education, National Chia Yi University

Abstract

The study aims to explore the process of solving literacy-based arithmetic word problems of integers by fifth grade students. The researcher selected three 5th grade students from the service school as case students. One of them is high-achieving student, and two of them are low-achieving students. The research adopts case study method. The results of the study found that high-achieving students tend to interpret complete sentences and try to use their own words to explain the meaning of the questions. They make a key summary of the question, and omit the literacy situation description that is not needed for problem-solving. High-achieving students can operate successfully in the four problem-solving phases: understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, looking back. Low-achieving students repeated the questions completely, or use key words to understand the meaning of the questions. However, affected by the strategy in understanding the problem, regardless of whether the questions are integrated into the context of literacy, understanding the meaning of the questions is a big challenge for low-achieving students. Because of difficulty in understanding the questions phase, they devise error plans easily. Due to poor arithmetic ability, even if low-achieving students operated the first two phases successfully, they would fail to calculate the right answer easily in the carrying out the plan phase. In the looking back phase, it was found that the low-achieving students could not connect the number with the questions, resulting in the inability to understand the meaning of each number.

Keywords: arithmetic operations on integers, literacy-based, mathematical word problems

高中數學教師數學素養概念之先導研究

楊景成^{1,2} 溫嫩純²

¹臺中市立大里高中 ²國立彰化師範大學科學教育研究所

中文摘要

教育部於 2014 年頒定十二年國民基本教育課程綱要(以下簡稱 108 課綱)，並於 2019 年實施，並以素養導向教學與評量作為此次教改之核心概念。為探察高中數學教師對於數學素養的內涵之認識情形，研究者針對 25 位高中數學教師進行晤談，以了解高中數學教師對於數學素養之理解與詮釋。以現象圖學分析結果發現，大多數研究參與者的數學素養概念可依照 108 課綱之核心數養內容分為知識、能力與態度三個向度。知識向度可區分為數學知識與跨領域知識，可分為學校學習與生活應用兩個屬性，能力向度在不同領域裡展現，包含：(一)學校學習：計算、閱讀、解題、工具與溝通，(二)生活應用：表達、邏輯判斷和觀察。態度方面則著重在學校的學習態度。研究對象教師也提及目前 108 課綱推行對於培養學生數學素養之困難及應改善之處。

關鍵字：數學素養，現象圖學，高中數學教師

壹、緒論

一、研究動機與背景

教育部於 2014 年頒布，並於民國 108 年實施十二年國民基本教育課程綱要(以下簡稱 108 課綱)。108 課綱以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景，激發學生學習的渴望與創新的勇氣，善盡國民責任並展現共生智慧，成為具有社會適應力與應變力的終身學習者，期使個體與群體的生活和生命更為美好(教育部，2014)。其中說明核心素養的意涵：「核心素養」是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。「核心素養」強調學習不宜以學科知識及技能為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展(教育部，2014)。由此觀之，108 課綱期許學生跳脫學校學科知識的窠臼，展現習得知識的力量，將所學應用於未來社會生活中。現階段大多數高中數學教師是在傳統升學教育體制下養成，對於「數學素養」一詞如何解讀呢？一般而言，高中數學教師對於非傳統教學方式接受度較低(呂玉琴，溫世展，2001)，高中數學教師能否體認在 108 課綱中，教師在教學與評量方面所要面對的挑戰(吳靖國，2022)?促使數學素養導向教學及評量在教學實務的落實，最重要的前提必先了解高中數學教師心中對於數學素養的概念。

二、研究目的

本研究欲探究現職高中數學教師(包含正式教師及代理、代課教師)對數學素養概念的認知，透過半結構式的晤談，以現象圖學理論分析晤談逐字稿，形塑高中數學教師對於數學素養概念脈絡。囿於篇幅限制，本研究之待答問題如下：

(1)高中數學教師對於數學素養之概念為何？

貳、參考文獻

一、數學教育改革的關鍵人物—數學教師

高中教育承接基礎教育並奠基未來高等教育的準備，在國家競爭力的提升、社會多元發展、或個人生涯規畫都是非常重要的關鍵階段(潘慧玲、周麗玉、陳佩英，2011)。數學教育改革歷程中，部分教師對於教育改革核心價值的迷思或誤解，教師基於過去教學經驗與個人理念，與教育改革理念往往產生衝突、妥協或靜觀其變的反應(Churchill D.,2006；Prendergast M. & Treacy P. 2018)，對於推動教改的核心概念認識不清，將無法確實改變教學方式與評量型態以達成教改的目標(Innabi, & Sheikh, 2006)，經常習慣性落回傳統的講述式教學(Chávez, 2019)。這凸顯教師自身持有之教育觀及實務教學經驗與教育改革推行內涵之間的磨合正是教育改革成敗關鍵。教育改革也常使教學增加複雜性，數學教師對於數學素養的不同理解，導致教師對於教育改革產生疑慮或抗拒(卯靜儒，2014；王為國，2019； Martinie et al, 2016)。

教育改革的實質目標並非侷限於課程內容或綱要，而是敦促教師心中的專業教學知能及對於改革主軸認知進行與時俱進的質變，最終將改變體現在課室教學中以提升學生之素養(Gellert , Espinoza, Barbè, 2013)。研究顯示以學生為中心的探究教學方式確實能夠提升學生的數學素養，但若數學教師沒有清晰的概念與確實的教學實踐，則無法進行適當的引導，效果反而適得其反(She, & Stacey, & Schmidt, 2018) 改變未必保證成功，最重要的就是數學教師心中對於改革的認知與力行。

理解現場教師自身關於教育的諸多想法及對於改革內容的認知，否則課室中的教師仍以習慣的傳統教學方法，將致使改革徒具素養導向的口號，而缺乏實質改革的具體作為(März V. & Kelchtermans G., 2013；Shann Wei-Chang, 2021)。時值108課綱數學素養導向教學與評量推行之際，確實有必要進行數學教師關於數學素養概念及素養導向評量方式之研究。

二、數學素養

現代學校教育應當使學生可以在其他領域中應用數學知識，而且數學的學習

也要讓學生感受到學習數學的樂趣，學生也要能夠體會數學是一種強大的溝通工具(Cockroft, 1982)，讓學校教育與生活結合的趨勢也漸漸成為全球教育發展的主流，數學素養的概念也在教育演化中逐漸成形。

「數學素養」一詞由西方教育引進，不同學者賦予的名稱也有些差異，包含 numeracy(Madison & Steen,2008)，指現代人應當會在生活中運用數學知識，欣賞數學之美並能解讀每日生活訊息中的數學內容。有學者主張數學老師的授課過程中應當讓學生有充分學習數學的機會，並以 mathematical proficiency 作為數學素養的名詞(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)。經濟合作暨發展組織 OECD(The Organization for Economic Co-operation and Development, OECD) 提出數學素養為 mathematical literacy，其論述為：個人能夠在不同情境脈絡中，明確表達、運用和詮釋數學的能力，包含數學推理和使用數學概念、程序、事實和工具來描述、解釋和預測數學現象…，並且針對個體在生活中的需求來運用或者投入數學活動，以成為一個積極的、關懷的、以及具備反思能力的國民(OECD, 2013； OECD, 2017)。多數歐盟國家採用 Mathematical Competence (Paulo A.,2001 ;Niss M. Højgaard T.2019)，指一個人在給定的情境下能夠準備好適當地對於特定數學挑戰做出反應。也有學者提出 Quantitative Literacy(QL)，建議現代公民在處理個人的、國家的和周遭世界的事物時所應具備包含運算、測量、使用地圖、統計…等能力和辯證的涵養(Steen, 2001)。

綜合前面幾位研究者的闡述，有學者主張 numeracy、mathematical literacy、mathematical proficiency、mathematical competence 和 quantitative literacy 的核心概念其實都是類似的，主要就是現代人身處現代社會中，能將生活中遇到的個人的、社會或國家的問題提出適當且有建設性的數學模式來解決(Jablonka E,2003; De Lange,2007)。綜觀學者們對數學素養的論述，從數學知識的學習、操作能力的運用及面對生活情境下問題的反應態度，將印象中生硬的數學從學校學科知識轉化為社會上日常生活的素養，也逐漸將情意面向的因素納入(游自達, 2016)。

國內學者建議數學素養的內涵應包含：學習並發揮數學思維的特長、充實並活用基本的數學知識、建立健康的對待數學的態度、善於利用計算器與數位工具(李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏, 2013)。108課綱數學領綱中對於數學素養則列出領域核心素養在不同教育階段的具體內涵(可參考pp3-5, 教育部, 2018)，例如：與態度相關，數-E-A1，具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活；與知識和運算技能相關，數-J-B1，具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度(教育部, 2018)。看似明確的文字敘述，在各自擁有不同教育理念的數學教師心中，對於數學素養有沒有其他的解讀？每位數學教師求學歷程中，師資培育的訓練及實務教學的經驗與理念上，可能持有不同的觀點，對於教育改革揭示的派典與理論或有不同見解，導致教師們對教改的悲觀期待而

無法在課室中確實執行，這也是各國教育改革最核心的根本問題(Johnson P., Freemyer J. V. and Fitzmaurice O., 2019; Hughes S. and Lewis H., 2020)，據此，探知數學教師對於數學素養概念的認知乃目前教改的當務之急。

參、研究方法

一、研究對象

本研究欲了解現職高中數學教師對於 108 課綱推行之數學素養的概念，故研究對象為台灣地區的現職高中數學教師，包含正式及代理教師共 25 位。教學年資平均為 19.48 年，眾數為 18 年。公立學校教師 22 位，私立學校 3 位，大學學歷 1 位，碩士學歷 23 位，博士學歷 1 位。

二、研究設計與流程

本研究採用現象圖學研究分析。先與研究對象進行半結構式晤談，錄音並轉為逐字稿，最後進行資料分析。由於疫情關係，聯繫不易，研究時間在 2021 年 2 月到 2022 年 12 月進行。前 5 位教師，採面對面晤談，因為疫情關係，後面 20 位教師，採電話晤談，晤談時間約 20-30 分鐘。每位教師編號前面 ST 代表 senior high schoolteacher 高中教師，後三碼為流水號，例如 ST005 代表第五位受訪的高中數學教師。晤談問題如下：

- (1)就您過去的教學經驗以及您對目前 108 課綱在推行的數學素養的了解，您會如何說明何謂數學素養？
- (2)什麼樣的教學方式比較能夠培養學生的數學素養？
- (3)就您所說明的數學素養內容，應該用什麼樣的評量方式才能評量出學生的數學素養呢？

三、資料分析

每次晤談後將錄音檔轉譯為逐字稿，並以電子郵件寄回給晤談對象，並請晤談對象確認內容。逐字稿定稿之後由研究者進行分析，並同時邀請另一位科學教育學者進行同步分析，兩筆分析資料，進行比對、討論，以修正編碼之類目與內容，最後與一位熟稔現象圖學研究法的科學教育專家共同討論並歸納出最後之編碼類目。現象圖學(Phenomenography)為質性研究法的一種，對於人類共同知識、生活經驗或概念的一種質性研究法(許翠華、韓晶彥、王凱微，2009)。

現象圖學不僅僅是一種質性的研究方法，也可以成為質性研究的研究設計，並能作為質性研究的理論架構，現象圖學通常透過與研究對象的晤談所蒐集的文字資料，若有必要可輔以問卷等質性資料進行分析，將研究對象所感受經驗的世界、知識或概念，透過現象圖學的分析整理出有脈絡可循的架構(Marton, 1981; Tight, 2016)。

肆、研究結果

以 108 課綱總綱說明的核心素養來看，李國偉等學者所建議的數學素養內容也包含在知識、能力、態度三個範疇中：知識充實並活用基本的數學知識；能力—學習並發揮數學思維的特長、善於利用計算器與數位工具、充實並活用基本的數學知識；態度建立健康的對待數學的態度（李國偉等人，2013）。108 課綱數學領域召集人張鎮華教授主張的數學素養內涵也可以知識、能力來含括；知識數學學科知識的素養；能力應用到學習、生活與職業生涯的素養、正確使用工具的素養、有效與他人溝通的素養（張鎮華，2017）。研究者與共同編碼者及學者專家討論後決定，分析主軸以 108 課綱揭示之核心素養內容：知識、能力與態度為主要編碼，再將研究對象所提到的內容綜合歸納為此三大類目。藉由分析逐字稿內容，發現多數研究對象認為數學素養內容可歸屬在知識、能力和態度三個向度。由晤談內容可歸納數學教師的看法，分析結果如下表(1)。

一、知識

數學是學校教育的一門重要學科，包含了許多的數學知識，數學方法也在其他領域的問題中應用，有基本的數學知識及相關其他領域知識才能系統地理解生活中的問題。

表(1)：高中數學教師數學素養概念編碼

向度	屬性	類目	內容
知識		知識	數學知識 跨領域知識
能力	學校學習	計算能力	基本計算能力
		閱讀	數學文本與題目
		解題	解文字題 跨領域文字題
		工具	數學本身之工具性 電腦軟體之應用
		溝通	數學內容 與他人之間
	生活應用	表達	以符號表徵關係與物件
		邏輯判斷	生活中的活動
觀察			
態度	學校教育	學習態度	學習態度

1. 數學知識：

ST003：第一個就是數學學科知識的素養，也就是說我們必須讓他們打基礎的時候，必須讓他們學到學科的定理跟定義……。

ST011：首先是對數學基本知識的認知，比如說實數是什麼東西，

一個數學名詞的定義對他有沒有了解。

2. 跨領域知識：

ST002: 在課程方面，能夠跟其他方面的學科，能夠有所結合，…適合應用在物理方面的時候，能夠跟物理老師稍微做一個簡單的結合，跟化學有關的話，跟化學做一個結合。跟生物有關的話就跟生物做一個結合。

ST008: 還有各學科的融合。…可能不是單純牽涉到數學這個領域，有可能是地球科學，也有可能是物理方面的，

二、能力：許多研究對象認為數學素養是一種能力，而能力內容包含學校學習的部分和生活上的應用。

ST021: 一般來講，我們強調的是所謂的能夠帶著走的能力，那就是素養。

ST023: 因為新課綱的素養有一個副標語或者副 Slogan 是帶著走的能力，那我不覺得所謂帶著走的能力完全是在學業上。

1. 學校學習

(1) 基本計算能力：一般學生從小接觸數學，大多數學生會認為數學總是需要計算，許多高中數學教師覺得計算能力仍然是學校數學教育的重要內容。

ST002: 一個高中生，起碼的計算能力，起碼的他將來在社會上的應用。

ST007: 舉個例子來說，他必須要會有加減乘除的計算能力。

(2) 閱讀：PISA 評量試題內容敘述文字相對較多，也造成閱讀量增加，閱讀能力對於數學素養確實有顯著的影響(林素微, 2019)，部分研究對象也同意數學素養的推廣也必須伴隨閱讀能力的訓練。

ST006: 第一個是閱讀能力，第二個是閱讀能力轉化成數學概念，第三個是數學概念的應用能力，我看的是這三個部分。

ST022: 能力的話他要有閱讀，因為現在的東西還有學生生活中的資訊量太大了，他們要學會閱讀。

(3) 解文字題：在數學教學實務上，數學領域的教材內容大多在解題，許多研究對象認為解題是具備數學素養的能力之一。

ST008: 數學素養應該說是傳統數學應用題加上一些比較有一點設計過的題目。

ST024: 當然素養強調的是跨領域，我們在化學上面也好物理方面

也好，這些部分都有數學相關的部分，包括他們在運作的時候的模式就是數學模式。

(4)工具：面對資訊快速增長的現代生活，有相當多且便利的工具可使用，部分研究對象認為數學本身的工具性，解決生活上數量、圖形問題時使用軟體工具的能力應該是現代數學素養的內涵之一。

ST011：數學素養應該就是說數學跟生活上的連結吧。然後數學素養是指可以帶著走的能力。就是使用生活周遭的像計算機，可能就是簡單的程式。像是 Mathlab，或是，C++那一類的。

ST013：數學是一個語言，他不是純粹的科學工具而已，所以我們必須培養學生有透過數學這個語言來理解認知這個世界，界定他遇到的問題，描述他遇到的問題，以及透過數學這個工具解決問題，這樣才會有數學素養。

(5)溝通：張鎮華(2017)主張有效與他人溝通是數學素養的一個重要面向，與 OECD(2019)的理念接軌，也與其他學者的見解相同(Colwell J. & Enderson M. C., 2016)，有部分研究參與者也有相關的說明。

ST020：他要把我們看到的東西他要做定位，定位的話他必須要用到坐標系，接下來他必須要描述，他必須要有語言、文字。…你必須要有語言才能溝通。你要有文字才能把它寫下來，當然你要有幾何概念才能將它畫出來。

ST022：就是用我們數學學習到的一些知識或工具，來解決生活上或是學習上的問題，或是我們用這些工具，可以有效地跟其他人做溝通，這大概就是我們所謂的數學素養。

2. 生活應用：PISA 評量問題強調生活情境的融入，108 課綱中亦設定陶養生活知能為總體課程目標之一，期許學生在生活中能夠中能融會各領域所學，統整運用、手腦並用地解決問題(教育部，2014)。

(1)表達：在 108 課綱中的數學領綱裡說明數學領域的課程目標第二點提到：培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力(教育部，2018)，有幾位研究對象也有同樣的看法。

ST012：所謂的數學素養，目前我的想法是他可以運用到生活經驗的一種能力，…簡單來講，應該就是可以應用的能力，它可以把數學知識應用到生活上的一種能力，就稱為數學素養。

ST016：數學素養其實是比較廣泛，這個問題比較大，我覺得只要是把數學知識應用到生活上的，…，就是說在我學習數學的過程中，不再只是解題，而是說數學能夠跟我們的生活結合

，讓學生覺得學這門數學科目是有用的。

(2)邏輯判斷：數學教育的課程中，數學知識體系的建立，解題過程的脈絡很重要的一部分在訓練學生的邏輯判斷能力。

ST015：你可以去判斷說我這個東西應該是買A或是買B，或者是買C，同樣的東西他們可能搭配的價格會不一樣，那你就去判斷說到底A、B、C哪一個對自己比較有利。…那就是一種素養。

ST019：…這就是生活中的問題，我運用我知道的數學知識怎麼去判斷說為什麼公里數會差這麼多？不同廠牌的汽油，為什麼有差距？…就是這種對於日常生活上的事情，問題，做邏輯的分析，我覺得這個都是算數學素養。

(3)觀察：數學領綱說明的數學核心素養具體內涵中明列出：數S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹 證明的思維特徵 及其價值。可見觀察亦為數學素養的重要內涵。

ST010：其實數學素養，就是教學活動中讓學生能夠觀察。利用我們的數學概念觀察周遭的事物，然後解決問題的能力。

ST023：如果是在學業上，具備數學素養的人當然是在數學方面表現會比較高一點，會多一點，或者是他觀察事物，看待一件事情，他可以用不同的角度去理解，這是數學上的部分。

(三)態度：數學領綱(教育部，2018)訂定之數學領域課程目標第一項：提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。本研究的參與者關於態度的表述較少，且主要關於在學校的數學學習態度。

ST002：他的態度方面，我是認為有兩個方面。第一個學東西的務實態度。…，將來從事任何一個行業來講，要能夠按照邏輯方面的按部就班，…這應該是學生要具備的數學素養。

ST005：我是覺得學生的態度很重要，…如果態度不OK的話，…這種要看出他的素養或是從考試要看出他的素養，其實是有些難的。

伍、結論與建議

一、結論

本研究綜合 25 位高中數學教師對於數學素養概念的論述發現，高中數學教師對於數學素養的概念可以藉由 108 課綱關於核心素養的說明分為知識、能力與

態度三個向度，能力向度又可分為學校學習與生活應用兩個屬性，見表(1)。本研究中，多數高中數學教師認為素養就是能力，各種關於數學在解題與生活應用方面的能力，包含計算能力、閱讀、解題、工具和溝通，在生活應用方面有表達、邏輯判斷與觀察等等，這與 OECD(2019)指出的數學基本能力相當吻合(OECD, 2019)。Genc M.和 Erbas A. K.(2019)的研究說明中學數學教師對於數學素養的詮釋也包含數學知識、解題、數學思考，推理和論證、天分(Genc M.和 Erbas A. K.,2019)，天分在本研究中並未出現。Bolstad O. H.(2020)的研究顯示，中學數學教師在數學教學實務上仍以培養學生解文字題的相關能力為主，情意部分較少提及(Bolstad O. H., 2020)，與本研究結果相當一致。

一般而言，學生在學校學習中對數學科大多持負面態度(Ng,Chi-hung C.,2018；Lee C. Y. & Fok P. K.,2022)，國內數學教育也多半著重在傳達數學知識和解題技巧，這可能是本研究中，高中數學教師關於態度方面的論述較少的原因之一。

二、建議

我國的升學制度從國中畢業的會考，到高中升大學的學力測驗及分科測驗對於學生學習數學有相當大的影響，在陶養學生的數學素養方面是一個頗大的影響因素，有幾位研究參與者也提到了這個問題：

每年的各種國家考試動向，在在影響著學生、家長和老師看待各個學科的思路。數學是一門可以培養知識、能力與態度的領域，抑或僅是一門升學的科目，終將影響數學教師在課室中的實務教學，更長遠的將影響每位學習數學的學生，在腦海中留下的數學素養種子，發芽茁壯或乾涸而滅？教育當局及有關的政策制訂者在升學制度的變革，題型的設計、課程實施的方式都應謹慎以對，並與現場教師進行充分的溝通說明，以釐清數學教師的專業領域知識及教學知能之傾向，並確實理解各級學校軟硬體設備與資源在支持素養導向教與學的推行是否足夠，俾使推行教育改革能事半功倍。

研究者在研究期間邀請許多高中數學教師參與，有許多教師婉拒，而婉拒的理由之一是：我不知道數學素養的答案。可以明顯地感覺到，部分數學教師似乎認為數學素養的內涵有一個「標準答案」，這是數學學習過程中的副作用，即便身為數學教師依然無法跳脫傳統教學的想法，這也是教育改革上一個相當大的隱憂。

本研究針對高中數學教師對於數學素養概念的闡述進行分析，在研究對象與內容上不宜過度推，若欲研究其他領域的相關議題則須做適度調整。

參考文獻

中文部分

呂玉琴、溫世展(2001)。國小、國中與高中教師的數學教學相關信念之探討。

國立台北師範學院學報，14，459-490。

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏(2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部

林素微(2019)。中學生閱讀策略使用與數學素養的關聯及其意涵。測驗學刊，66(3)，213-248。

卯靜儒(2014)。改革即改變嗎？教育改革理解路徑之探索。教育學刊，42，1-37。

教育部(2014)。十二年國民基本教育課程綱要。臺北市：教育部。

教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要--國民中小學暨普通型高級中等學校，數學領域。臺北市：教育部。

游自達(2016)，數學素養之意涵與其變遷。國家教育研究院教育脈動電子期刊。2016(5)。

潘慧玲、周麗玉、陳佩英(2011)。高中教育政策白皮書。臺北市：教育部。英文部分

Bolstad O. H.(2020). Secondary teachers' operationalisation of mathematical literacy, *European Journal of Science and Mathematics Education*, 8(3), 115-135

Chávez L., V. (2019). On the making of a new mathematics teacher: professional development, subjectivation, and resistance to change. *Educational Studies in Mathematics*, 100:177-791. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9869-5>

Churchill D. (2006)。Teachers' private theories and their design of technology-based learning. *British Journal of Educational Technology* Vol 37 No 4,559-576

doi:10.1111/j.1467-8535.2005.00554.x

Colwell J. & Enderson M. C. (2016). "When I hear literacy": Using pre-service teachers' perceptions of mathematical literacy to inform program changes in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 53,63-74.

Gellert, U., Espinoza, L., Barbè, J. (2013). Being a mathematics teacher in times of reform. *ZDM*, 45(4), 535-545. DOI 10.1007/s11858-013-0499-1

Genc, M. & Erbas, A. K.(2019). Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Mathematical Literacy. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 7(3), 222-237.

Hughes S. & Lewis H. (2020). Tensions in current curriculum reform and the development of teachers' professional autonomy, *The Curriculum Journal* 31 (2), pp. 290-302. DOI: 10.1002/curj.25

Innabi, H.& Sheikh, O., E.(2006). The Change in Mathematics Teachers' Perceptions of Critical Thinking after 15 years of educational reform In Jordan. *Educational Studies in Mathematics*, 64:45-68.

- Jablonka, E.(2003) Mathematical Literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. K. S. Leung (Eds.) Second International Handbook of Mathematics Education (pp.75-102). The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Johnson P. , Freemyer J. V. and Fitzmaurice1 O.(2019). The Perceptions of Irish mathematics Teachers Toward a Curriculum Reform 5 Years After Its Implementation, *Front. Educ.* 4:13. doi: 10.3389/educ.2019.00013
- Lee, C. Y. & Fok, P. K.(2022). “Why Doesn’t ‘Jonny’ Like Mathematics?” The Voices of Senior Secondary Students in Hong Kong, *Education Journal*, 50(1),1-30.
- Madison, B. L. & Steen, L. A.(2008). Evolution of numeracy and the National Numeracy Network. *Numeracy*, 1(1), 1-18. : Article 2. Retrived from <https://digitalcommons.usf.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=numeracy>
DOI: <http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.1.1.2>.
- Marton, F.(1981). Phenomenography – Describing Conceptions of The World Around Us. *Instructional Science*, 10, 177-200.
- Martinie, S. L., Kim, J. H., & Abernathy, D. (2016). Better to be a pessimist : A narrative inquiry into mathematics teachers’ experience of the transition to the Common Core. *The Journal of Educational Research*, 109(6), 658-665.
- März V.& Kelchtermans G.(2013). Sense-making and structure in teachers’ reception of educational reform. A case study on statistics in the mathematics curriculum, *Teaching and Teacher Education*, 29, 13-24.
- Ng Chi-hung, C.(2018). High School Students’ Motivation to Learn Mathematics: The Role of Multiple Goals, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16:357-375.
DOI 10.1007/s10763-016-9780-4.
- Niss M. & Højgaard T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics* , 102:9–28.
- Paulo A.(2001), Mathematical competence for all: Options, Implications and Obstacles. *Educational Studies in Mathematics* , 47, pp125-143. °
- Prendergasta M. & Treacyb P. (2018). Curriculum reform in Irish secondary schools – a focus on algebra. *Journal of Curriculum Studies*, 50, NO . 1, 126- 143.
<https://doi.org/10.1080/00220272.2017.1313315>
- Shann Wei-Chan(2021). Transition to the Literacy-Oriented Mathematics Curriculum, *Journal of Curriculum Studies*, 16(1),1-16.
- She, H. C. & Stacey, K., & Schmidt, W. H.,(2018). Science and Mathematics Literacy : PISA for Better School Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16 (Suppl 1):S1–S5.
<https://doi.org/10.1007/s10763-018-9911-1>

- Steen, L. A.(2001). The Case for quantitative literacy. In L. Steen(Eds),
Mathematics and democracy: The Case for quantitative Literacy (pp. 1-22).
Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.
- Tight, M.(2016). Phenomenography: the development and application of an
innovative research design in higher education research. *International Journal of
Social Research Methodology*, Vol. 19, No. 3, 319-338.

A Pilot Study of High School Mathematics Teachers'

Conceptions of Mathematical Literacy

Jing Cheng Yang^{1,2} Meichun Lydia Wen²

1 : Taichung Municipal Dali Senior High School

2 : Graduate Institute of Science Education of National Changhua University of
Education

Abstract

The Ministry of Education promulgated Curriculum Guidelines of 12-Year Basic Education (hereinafter referred to as 108 Curriculum) in 2014. The 108 Curriculum was implemented in 2019. The core concept of the educational reform is literacy-oriented teaching and assessment. In order to explore the high school mathematics teachers' understanding of the connotation of mathematical literacy, the researcher interviewed 25 high school mathematics teachers. All the transcriptions were analyzed based on Phenomenography. It was found that the concepts of mathematical literacy of most participants can be divided into three dimensions: Knowledge, Capability and Attitude. It was in line with the core competency in 108 Curriculum. The Knowledge can be divided into mathematical content and interdisciplinary knowledge. Capability could be divided into two attributes: (1) school learning: calculation, reading, problem solving, tools and communication; and (2) life application: expression, logical judgement and observation. The aspects of Attitude focuses on learning attitude at school. The participants also mentioned some barriers of the implementation of 108 Curriculum.

Key Words: mathematical literacy, Phenomenography

高職生素養內容的數學溝通技能表現之評量分析

蔡麟傑¹ 謝佳叡²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 p327harry@gmail.com

² 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 paris@tea.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在透過數學溝通技能表現評量，來瞭解學生在數學溝通技能方面的表現。研究對象為臺北某高職二年級電機電子群和機械群各一班，共計45名學生。本研究將數學溝通技能分成擷取/檢索、統整/解釋、表徵/表達三個子技能，並搭配數學建模歷程的形成、運用、詮釋三個歷程階段面向，編製「素養內容之溝通技能表現評量問卷」作為研究工具，探討學生在三個數學溝通子技能方面的表現。問卷包含封閉式與開放式建構反應題共13大題（32小題），內容涵蓋各溝通子技能與數學建模歷程，每個子項目都至少包含9題小題。資料蒐集完成後，根據本研究設計之溝通技能評分指引進行學生作答反應編碼，每個作答反應均由兩位評分者評閱。

研究的分析結果發現：（一）整體來說，學生在擷取/檢索的溝通表現較好，而在表徵/表達的溝通表現較差；（二）同時考量建模歷程項目，學生在形成階段的擷取/檢索之表現較佳，而詮釋階段的表徵/表達以及運用階段的表徵/表達之表現較差；（三）各子技能間之相關係數均呈現高度相關，且彼此間具有顯著差異。從研究結果來看，學生在數學溝通過程中，表徵/表達能力表現相對較差，因此建議教師應該多鼓勵學生在溝通過程中將他們的想法具體表達出來，並提出理由加以支持，並透過多元的教學策略和方法，幫助學生在互相討論的過程中，建立更加清晰的溝通模式，以增進學生之間的合作和理解，提升其溝通技能水平。

關鍵字：21世紀技能、素養評量、數學溝通技能

壹、緒論

108課綱總綱以核心素養做為主軸，所謂核心素養是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度（教育部，2018），其中的核心素養意提倡的三面九項中，「溝通互動」就是其中的一個面向，該面向中的項目「符號運用與溝通表達」更直接貼合數學溝通的意義。數學領綱則根據本項總綱之各階段核心素養為內涵，結合數學領域的基本概念，論述數學領域核心的具體內涵（教育部，2018）。

如NCTM（2000）所述，在溝通豐富的環境中，鼓勵學生反思自己的想法，並在通過書面和口頭的討論後，會使想法變得清晰透澈，而獲得知識。從PISA的觀點來看，溝通涉及人與人之間的交流，但溝通除了從人與人或人際關係能力的面向，更是一種個人內在的能力與知識。因為要能理解別人的訊息，接收者需要具備溝通所涉及的知識；若是要表達訊息給他人，傳訊者不但需具備溝通所涉及的知識，更要了解溝通的對象所涉及的知識，才知道如何為溝通對象製作最好的溝通內容（OECD，2020）。這些都顯示溝通技能對教師進行數學教學或是學生進行數學學習都是很重要的技能，對於數學核心素養的評量表現

也有著重要的影響。研究者目前在臺北市某高職學校服務，也發現高職生對於素養試題的表現往往不如預期，即便是小學的數學內容，在考試時也經常無法好好呈現他們的想法，因此本研究目的是透過數學素養試題的解題，來瞭解高職生在數學素養試題的溝通技能表現，並分析高職學生在溝通子技能及素養溝通技能之間是否有相關性，希望能提供更多教學上的訊息，進而提供教師教學之參考。

貳、文獻探討

一、數學溝通技能的內涵

Merriam-Webster (2020) 辭典將「溝通」定義為「通過符號、信號或行為的共同系統，在個體之間交換訊息的過程」，由此可見，溝通必須有被傳輸的訊息、必須有訊息傳遞的對象，以及必須有共同系統，而溝通是一個交換訊息的過程。而數學溝通就是當這個符號、信號或行為的共同系統，或是傳遞的訊息是「數學內容、概念或想法」。林碧珍 (1991) 認為數學溝通是一種可以促使數學概念理解的有效方式，有助於個體對數學的理解。單維彰 (2008) 也提到，除了透過自我與情境、自我與他人之間的聽、說、讀、寫不同的方式之外，個體也可以利用口頭、文字、圖表等工具，將自身的數學概念表達出來，除了建立有效性的溝通外，也希藉由溝通的歷程使學生進行建設性的討論，進一步達成共識。

一般而言，課堂上的數學溝通重點在於使學生願意在課堂中與同儕或師長進行口語溝通，因為他們相信「說」對於學習是好事，可以引發學生內省，老師也不必花心思猜測學生的內心世界與腦中的數學結構 (NCTM, 2000)。從功能來看，數學溝通大致分成**理解**數學資訊 (數學是溝通的對象) 與以數學語言**表達**想法 (數學是溝通的工具) 兩類是常見的分類方式，因此數學溝通能力經常被界定成「能瞭解別人以書寫、圖形、口語中所傳遞的數學資訊；以及能以書寫、圖形、口語方式，使用數學語言表達自己的意思」(Niss 和 Højgaard, 2011; 教育部, 2010)。

二、數學溝通技能的評量

根據PISA對於溝通的觀點，是一種個人內在的能力 (OECD, 2020)，也就是溝通包含內在的反思，這也使得溝通在培養思考上也有關連。若從數學溝通的意義與解題歷程相連結，那溝通就與解題有了聯繫。甚至Polya在1945年初版的《怎樣解題 (How to Solve It)》解題歷程四階段中，第一個就是瞭解題意。Paridjo和Waluya (2017) 也提出解決數學問題時必須進行數學溝通，因此透過數學評量同時也可以檢測出數學溝通技能，亦即數學評量本身也是數學溝通的評量，兩者有著高度相關。

在現有的數學溝通技能的相關研究中，已發展不少檢測溝通能力的工具與評量方式，有的研究是以問卷的方式檢視學生的書面溝通能力，如洪碧霞、林素微、江秋坪和張秋芳 (1996) 提出的數學溝通能力測驗、Cai、Jakabcsin和Lane (1996) 以及林原宏和李清韻 (2004) 的溝通能力評量；有的是建議透過口頭說明和活動演示觀察，如NCTM (1993)；也有透過數學寫作的方式，看教學日誌。而因應108課綱，許多研究也針對不同領域提出素養導向發展模式，如任宗浩 (2018) 根據新課綱提出素養導向紙筆測驗試題基本要素，包括佈題應強調真實情境與真實問題、以及評量強調總綱核心素養或領域核心素養、學

科本質及學習重點等。若聚焦在數學領域上，吳正新（2019）研發符合108課綱的素養導向評量工具，並根據評量結果發展學生在數學素養導向評量表現標準。而吳正新等人（2021）更提供完整的數學素養導向評量的研發方法，包含素養導向試題研發方法、評分規準的製訂、自我檢核的流程與方式，不過，共通點都必須先發展溝通能力指標，作為研究工具設計的依據。本研究主要參考吳正新等人（2021）所作的數學素養導向評量的研發方法，並從中挑選符合溝通技能的試題，並加以改編成同時適合作為溝通技能的試題，詳細說明請參閱下一節的研究方法。

叁、研究方法

本研究主要鎖定在數學溝通技能，研究工具所使用的試題主要是來自素養導向試題研發人才培訓計畫兩期之試題，但在題目的編排上會儘量減低學生因數學內容認知不足而產生的干擾。以下針對研究設計、研究工具、研究對象及資料處理做說明。

一、研究設計與工具

本研究設計採調查研究法的問卷調查方式進行。問卷試題設計架構包含兩個向度，其中一個向度是以 PISA2021 的形成、運用與詮釋等數學建模歷程元素，另一個向度是謝佳叡（2022）所提出之三個溝通子技能：擷取/檢索（access/retrieve，以代碼A表示）、統整/解釋（integrate/interpret，以代碼I表示）、表徵/表達（represent/express，以代碼E表示），各子技能的說明如表1。

表1 溝通技能評量的子技能

子技能	說明
擷取/檢索	能從題目提供的資訊中，找出明顯呈現的部分資訊
統整/解釋	能將不同區塊間的資訊作有意義的統整或解釋
表徵/表達	能選擇適當的表徵方式，對形成數學問題的想法、運用數學知識的想法或詮釋數學結果的想法具體表達

由上述兩個向度形成素養之溝通技能評量二維架構，共9種類型，如下表2，並採用平衡不完全區塊設計進行測驗等化，依據共同試題將所有題目的參數放在同一量尺上，使試題參數經連結後可互相比較。

表2 素養溝通技能的9種類型

溝通技能	數學建模歷程		
	形成	運用	詮釋
擷取/檢索(A)	A1	A2	A3
統整/解釋(I)	I1	I2	I3
表徵/表達(E)	E1	E2	E3

評量的編制主要選用素養導向試題研發人才培訓計畫兩期之題本（國家教育研究院測驗及評量研究中心，2019、2020），並透過專家會議重新挑選、改寫設計完成數學素養之溝通技能表現評量問卷，每種類型至少3至4題，合計13個題組，32個問題。每一小題表現分為表現水準1或表現水準2兩類，表現水準1可分為0、1兩種等級，表現水準2可分為0、1、2三種等級，各題之類型如表3。

表3 素養溝通技能評量之問題類型細目表

題組	內容	題號	類型	表現水準
一	元宵猜燈謎	G01Q1	A1	1
		G01Q2	A3	1
		G01Q3	I2	1
二	迪士尼樂園的門票價格	G02Q1	I2	2
		G02Q2	I1	1
		G02Q3	E3	2
三	列印設定	G03Q1	E1	1
		G03Q2	E2	1
四	進口燃煤	G04Q1	I3	1
		G04Q2	A2	1
五	衛生紙	G05Q1	A2	1
		G05Q2	I3	1
六	水庫大進補	G06Q1	A1	2
		G06Q2	E2	1
		G06Q3	E3	1
七	古早味蛋糕	G07Q1	I1	1
		G07Q2	E3	1
八	一起來運動	G08Q1	E1	2
		G08Q2	I2	2
九	紙盒展開圖	G09Q1	A3	1
		G09Q2	I2	1
十	飲料外送	G10Q1	E1	1
		G10Q2	I2	2
		G10Q3	E2	2
十一	教室大掃除	G11Q1	I1	1
		G11Q2	I2	2
十二	肺炎大爆發	G12Q1	A3	1
		G12Q2	I2	1
		G12Q3	E3	1
十三	熱量消耗	G13Q1	A1	2
		G13Q2	A2	1
		G13Q3	I3	1

在研究工具的效度上經內容效度，本研究題本初稿編製後，由七位數學教育專家學者進行內容審查，包含一位數學教育教授及六位現職教師，共同評估評量內容之專家檢視，就各題組內容設計之適切性、題幹敘述及各項指標加以檢核，並依據專家學者建議，作為擬定及修改題項內容參考，以建立評量之內容效度。而信度分析部分，在收集資料後，本研究採Cronbach's Alpha進行內部一致性分析，評量 α 係數為.903，具有很好的信度水準。

二、研究對象與樣本選取

本研究之研究對象為高職學生。因考量人力、物力、資源及時間等因素，研究樣本取樣採方便取樣，就研究者本身所任教之臺北市某高職之兩個班級進行施測，包含電機電子群與機械群各一班，合計45名學生，學生入學會考成績介於B~B+。學生問卷填答雖以評量方式進行，但採非速度測驗進行，學生有充分時間完成整份評量。

三、資料處理

本研究根據溝通技能的子技能內涵，同時搭配數學內容制訂評分指引，並依據指引進行學生作答反應編碼。為求評分之客觀性與一致性，每個作答反應均由兩位評分者評閱，每一份作答反應均有兩個分數，若分數有差異，則在進

行討論取得共識後評定，評分一致性高達九成以上。每一個道題目皆分成表現水準1或2。表現水準1編碼最高分為1等級，可分為0、1兩種等級，表現水準2最高分為1等級可分為0、1、2三種等級。

評分完成後，針對各子類型的試題整併並計算各類型的平均值（平均得分率），計算得分率時採各題權重相等方式進行。完成得分換算後，以統計軟體 SPSS 28.0.1.1 進行敘述統計、顯著性考驗平均數檢定與相關性檢定。

肆、發現與討論

本研究旨在瞭解高職學生溝通技能表現，經統計分析高職生在溝通技能表現層次與認知特徵，茲將表現分析及學生答題表現臚列於下：

一、溝通技能之表現分析

根據閱卷結果分析如表4，三個溝通子技能的平均值（平均得分率）為擷取/檢索 .68、統整/解釋 .61、表徵/表達 .54。顯示學生在從題目提供的資訊中，找出明顯呈現的部分資訊的能力較好，而學生在選擇適當的表徵方式，對形成數學問題的想法、運用數學知識的想法或詮釋數學結果的想法具體表達的表現較差。

各子技能間，相關係數均呈現高度相關，且達顯著差異，分析結果如表5。從表中可知，相關程度以統整/解釋及表徵/表達兩個子技能（I & E）為最高，顯示學生若能將不同區塊間的資訊作有意義的統整或解釋，對形成數學問題的想法、運用數學知識的想法或詮釋數學結果的想法具體表達的表現也較好，但若僅能在從題目提供的資訊中，找出明顯呈現的部分資訊，在表徵表達的能力相對沒那麼高。

若將電機電子群及機械群兩班學生在三項溝通子技能進行獨立樣本T檢定結果，如表6，可以看出兩班學生在三項子技能平均分數均沒有顯著差異。就研究者教學經驗上，兩班學生在數學成就上有明顯差異，但在溝通技能上發現並沒有差異，也能就此推論出，在不同程度的學生上，本研究工具可以不受數學能力的不同，也都能有效檢測出三個技能的差異。

表6 兩班學生溝通子技能檢定表

	變異數等式 Levene 檢定		平均值等式的 t 檢定				
	F	顯著性	t	df	顯著性 (雙尾)	平均值 差異	標準誤 差異
A	.60	.44	.49	43	.63	.03	.07
E	.39	.53	.49	43	.62	.04	.08
I	.32	.58	.24	43	.82	.02	.07

註：A：擷取/檢索；I：統整/解釋；E：表徵/表達。

表4 整體學生溝通技能之表現分析表

溝通技能	平均值	標準偏差
擷取/檢索	.68	.22
統整/解釋	.61	.23
表徵/表達	.54	.27
總計	.57	.21

表5 溝通技能間之相關性分析表

項次	相關性	顯著性
A & I	.84	<.001
I & E	.85	<.001
A & E	.79	<.001

註：A & I：擷取/檢索及統整/解釋；

I & E：統整/解釋及表徵/表達；

A & E：擷取/檢索及表徵/表達。

二、素養溝通技能之表現分析

若考慮數學建模歷程進行溝通技能分析，結果如表7所示。表現最佳的是形成階段的擷取/檢索(.74)，而詮釋階段的表徵/表達(.44)和運用階段的表徵/表達(.55)的表現則較差。值得一提的是，在詮釋階段的統整/解釋(.67)，學生的平均得分高於運用階段的統整/解釋(.58)。這可能有兩個原因：一是在運用階段的表達/表述題目中，學生作答時未能得分，導致平均得分較低；二是在詮釋階段的統整/解釋題目中，學生只需要進行簡單的說明或列式運算，就能判斷某個人所提出的想法是否正確。相比之下，運用階段的統整/解釋需要更高的運算能力，因此得分較低。這也顯示，學生在溝通技能方面，如果減少因數學內容認知不足而產生的影響，就能表現得更好。

表8為素養溝通技能間的相關係數和成對樣本T檢定的顯著性。結果顯示各技能間均存在顯著差異，而各子技能間均呈現明顯正相關。這些發現表明，未來的教師在進行溝通技能的教學時，不需要考慮問題的類型，因為各技能都有其獨特的特點和表現方式。

表7 素養溝通技能之表現分析表

溝通技能/數學建模歷程	平均值	標準偏差
擷取/檢索	形成	.74
	運用	.64
	詮釋	.66
統整/解釋	形成	.61
	運用	.58
	詮釋	.67
表徵/表達	形成	.65
	運用	.55
	詮釋	.44

表8 數學建模歷程下之溝通技能間之相關性分析表

	A1	A2	A3	I1	I2	I3	E1	E2
A2	.533 <.001	--						
A3	.433 .003	.420 .004	--					
I1	.417 .004	.561 <.001	.496 0.001	-- <.001				
I2	.655 <.001	.624 <.001	.638 <.001	.636 <.001	--			
I3	.367 .013	.582 .000	.402 .006	.474 .001	.413 .005	--		
E1	.360 .015	.496 .001	.581 <.001	.462 .001	.617 <.001	.363 0.014	--	
E2	.552 <.001	.645 <.001	.586 <.001	.558 <.001	.717 <.001	.427 0.003	.723 <.001	--
E3	.469 .001	.528 <.001	.561 <.001	.547 <.001	.660 <.001	.379 .010	.337 .024	.472 0.001

註：A：擷取/檢索；I：統整/解釋；E：表徵/表達。1：形成；2：運用；3：詮釋。

三、以素養導向評量作為數學溝通技能表現之評量

素養導向試題的設計旨在評估學生的學科素養，其中重點不僅在於知識本身，還包括學生如何應用知識來解決問題或進行溝通表達。本研究採用素養導向試題作為溝通技能評量的工具，然而，最首要面臨的挑戰是如何區分學生的數學能力和數學溝通能力。因此，本研究進一步進行相關性分析，比較學生在本次素養溝通技能評量和三個學期的定期考試成績之間的相關性。結果顯示，二者呈現中度正相關，相關係數為0.55，顯著性小於0.001。這說明學生的數學成績和本研究所使用的評量工具之間存在相關性。這可能是因為學生在數學能力較強時更傾向於參與評量，並願意分享自己的做法。

進一步比對在校成績優異但在本次溝通評量表現較差的A生，其在校平均成績為90.3，而其在素養溝通的成績為擷取/檢索 .78、統整/解釋 .73、表徵/表達 .65。圖1為A生在其中二個問題的作答反應，上題主要希望學生觀察並判斷統計資料不適合用長條圖呈現的原因，學生在此題能說明「大約值」或「區間值」的資料或「數據相差太大」不適合用長條圖呈現，但該生卻回答國家人數不同的錯誤解釋。而在下題中，評量學生繪製水庫總蓄水百分比的堆疊長條圖的能力，該生能正確完成。由此顯示學生具備繪製長條圖的能力，但對詮釋數學結果的想法無法正確表達。

下表是某電視台新聞主播整理的統計資料：

國家	確定感染人數 (統計至112年3月17日)
美國	105,766,484
巴西	37,145,514
義大利	大約 25,000,000~26,000,000
英國	24,423,396
俄羅斯	大約 22,500,000
西班牙	13,778,467
臺灣	10,214,898

十二、問題3
我的作法：
國家人數不同

主播想用長條圖來呈現這組資料，但主管認為並不合適。請問為什麼長條圖不適合用來呈現這組資料？請說明你的理由。

梅雨可以緩解各水庫的缺水情形。
下表是108年5/18至5/22期間，6個水庫蓄水量的統計資料：

地區	水庫名稱	增加蓄水量 (萬噸)	增加蓄水百分比(%)	5/22總蓄水百分比(%)
北部	石門水庫	1100	4.2	37
	寶二水庫	460	6	51
中部	明德水庫	260	12	64
	日月潭水庫	1600	5.6	67
南部	曾文水庫	4850	4.9	18
	南化水庫	2210	13.4	26

六、問題2

圖1 A生作答反應節錄

針對在校成績較差 (22.9) 但此次溝通評量表現較佳 (擷取/檢索 .78、統整/解釋 .77、表徵/表達 .80) 之B生，圖2為該生之作答反應，題目是希望學生根據表格資料進行推論，回答「合理」，並正確利用任二欄的資訊提供合理說明，能力較好之學生，多半能以體重差以及消耗熱量的差，並計算兩者差的比例來判斷正確性，然而該生僅就表格之內容分別就體重及消耗熱量進行解釋，能運用數學知識的想法或詮釋數學結果。

根據衛生福利部國民健康署的資料顯示，運動 0.5 小時所消耗熱量與運動項目、體重有關，關係如下：

運動0.5小時所消耗的熱量 單位：大卡				
運動項目	體重 單位：公斤			
	40KG	50KG	60KG	70KG
騎腳踏車	80	100	120	140
溜直排輪	102	128	153	178
慢跑	164	205	246	287
籃球	166	207	249	290
游泳-蛙式	126	160	189	220
跳繩	252	315	378	441

小明說：「從表中可以發現，同樣是騎腳踏車 0.5 小時，體重每增加 1 公斤會多消耗 2 大卡」。小明的說法是否合理？請說明你的理由。

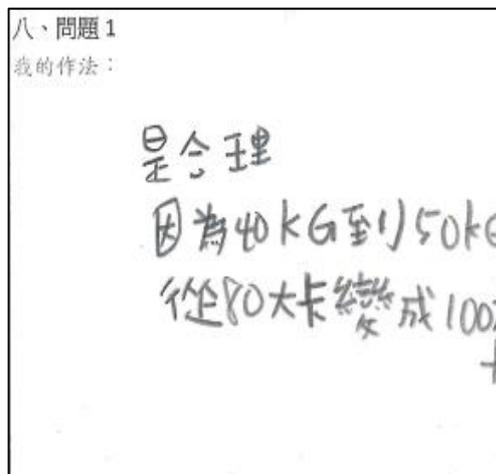


圖2 B生作答反應節錄-1

圖3為B生另一題之作答反應，題目中評量學生根據題目要求計算列印投影片部分內容所需的紙張數量，學生要能寫出正確答案(120張)，並能提供合理的計算或說明。然該生在第一步驟利用該式子表達11頁的資料，雙面列印共需6張，進而求得正確答案，該生能力無法以餘數多1頁的方式來表達，但仍能以適當的表徵方式，對數學問題的想法具體表達。

使用印表機列印時，我們可以利用「雙面列印」及「一張多頁」的功能來節省紙張用量。老師有一份 145 頁的教學投影片。

雙面列印	一張多頁
單面列印 僅於頁面的單面列印	每張 1 頁
雙面列印 從長邊翻頁	每張 2 頁
	每張 4 頁
	每張 6 頁

老師準備以「雙面列印」及「每張 1 頁」的方式列印教學投影片中第 61~71 頁的內容給班上 20 位同學。請問老師需要準備幾張空白紙張？請說明你的理由。

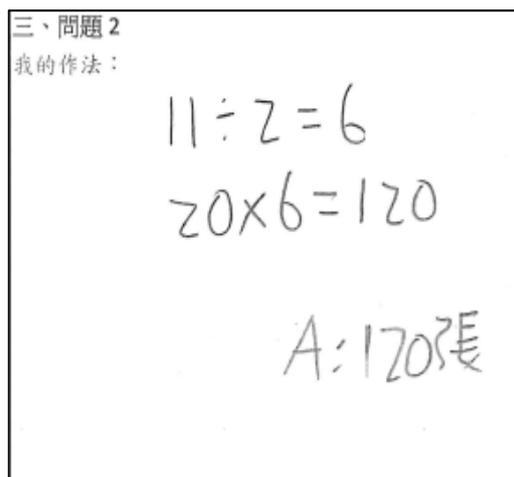


圖3 B生作答反應節錄-2

綜上所述，以素養導向評量作為數學溝通技能表現之評量仍有問題需要克服，但在數學建模歷程與數學溝通之間的聯繫，還是能區分數學能力與數學溝通之間的差異，尤其本研究工具降低了數學內容認知不足所造成的干擾，因此

學生在評量過程有足夠的數學知識來進行數學溝通。

伍、結論與建議

研究者發現，無論再哪一個數學建模歷程，學生在統整/解釋的溝通技能表現較差，因此建議教師多鼓勵學生溝通過程中能對形成數學問題的想法、運用數學知識的想法或詮釋數學結果的想法具體表達，更能提出自己想法的理由，並鼓勵學生對他人的想法做質疑或說明，經由各種不同的類型，讓學生在互相討論的過程中，溝通更加明確。

有關數學溝通的評量模式，目前仍未有一定的標準，本研究是以溝通技能及數學建模歷程作為評量發展，但施測後發現，部分題目在溝通技能的檢測尚有一定的限制，未來能對評分指引再做修正。

參考文獻

- Cai, J., Jakabcsin, M. S., & Lane, S. (1996). Assessing Students' Mathematical Communication. *School Science and Mathematics*, 96(5), 238-246.
- Merriam-Webster. (2020). Communication. Merriam-Webster online dictionary. Retrieved from <https://www.merriam-webster.com/dictionary/communication>
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.). (2011). Competencies and mathematical learning. *Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (Tekster fra IMFUFA, no 485). Roskilde: Roskilde University, IMFUFA.
- OECD (2020). PISA 2022 Assessment and Analytical Framework. Retrieved from <https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2021-assessment-and-analytical-framework.htm>
- Paridjo, P., & Waluya, S. B. (2017). Analysis Mathematical Communication Skills Students In The Matter Algebra Based Nctm. *IOSR Journal of Mathematics*, 13(01), 60–66. <https://doi.org/10.9790/5728-1301056066>
- 任宗浩 (2018)。素養導向評量的界定與實踐。載於蔡清華 (主編)，**課程協作與實踐第二輯**，75-82。臺北市：教育部中小學師資課程教學與評量。
- 吳正新 (2019)。數學素養導向評量試題研發策略。**中等教育**，70，11–35。
- 吳正新、林裕峯、吳添寶 (2021)。**素養好問題：素養導向評量研發指南**。
- 林原宏、何欣玫 (2005)。因數與倍數之解題溝通能力測驗編製及其實證探究。**測驗統計年刊**，13，171-208。
- 林碧珍 (1991)。國小兒童對於乘除法應用問題之認知結構。**新竹師院學報**，5，221-288。
- 洪碧霞、林素微、江秋坪、張秋芳 (1996)。國民小學三、四年級數學標準參照測驗題庫建立之研究。**中國測驗學會測驗年刊**，43，81-102。
- 單維彰 (2008)。PISA 的數學溝通評量。**科學月刊**，39 (1)，12-13。
- 教育部 (2010)。**國民中學九年一貫課程綱要數學學習領域**。
- 教育部 (2018)。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域**。

Analysis of Mathematical Communication Skills Literacy-Based Assessment in Senior Vocational High School

Lin-Chieh Tsai Chia-Jui Hsieh
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

Abstract

This study is to understand the performance in mathematical communication skills performance through the Mathematical Communication Skills Performance Assessment. The subjects of the study were 45 students in the electrical and electronic group and the mechanical group of a second-year vocational school in Taipei. In this study, mathematical communication skills are divided into three sub-skills: access/retrieve, integrate/interpret, and represent/express, which are matched and aimed at the three process stages of formation, employ, and interpret of the mathematical modeling process. The Mathematical Communication Skills Literacy-Based Assessment was used as a research tool to explore student performance in the three mathematics communication subskills. The assessment includes closed-ended and open-ended constructed response questions, a total of 13 major questions (32 sub-questions), covering each communication sub-skill and modeling process, and each sub-item includes at least 9 sub-questions. After the data collection is completed, the students' responses are coded according to the communication skills coding guidelines in this study, and each response is coded by two raters.

The analysis results of the study: (1) Overall, students performed better in access/retrieve, but poorer in represent/express communication; (2) Considering mathematical modeling process items at the same time, students' access/retrieve in formation is better, and represent/express in employ and represent/express in interpret is poor; (3) The correlation coefficients between the sub-skills are highly correlated, and there are significant differences among them. From the results of the study, students' represent/express skills are relatively poor in the process of mathematical communication. Therefore, it is suggested that teachers should encourage students to express their ideas in the process of mathematical communication, and provide reasons to support them. Teaching strategies and methods help students to establish a clearer communication mode in the process of discussing with each other, so as to enhance cooperation and understanding among students and improve their communication skills.

Key words: 21st Century Skills, Literacy Assessment, Mathematical Communication Skills

探討教師觀點下之數學素養試題指標與判定標準

張好甄¹ 謝佳叡²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 j20536@gmail.com

² 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 paris@tea.ntue.edu.tw

摘要

培養數學素養成為國內數學教育的熱門議題，教師需瞭解數學素養的定義與核心概念，調整數學素養教學與評量設計。儘管國內外有許多學者提出對於數學素養的看法，但目前對於數學素養導向試題的界定尚未有一個明確的定義，教師可能面臨難以設計適合的教材，以及發展適合學生的數學素養導向試題。本研究旨在從數學教師觀點探討數學素養導向試題應具備何種特徵，試圖建立數學素養導向試題的指標與判定標準，以幫助教師在進行命題時更能緊扣住素養評量之核心精神與目標。

本研究採用問卷調查方式，選用主張是數學素養導向試題之題目形成問卷，試題來源包含 PISA 公告試題、臺灣 2011 數學素養評量樣本試題、臺灣國家教育研究院公告數學素養導向試題以及 111 年國中會考數學參考試題本，透過系統性抽樣選取 25 題題組試題作為數學素養問卷試題本。本研究之問卷蒐集採立意取樣，蒐集一線有教學經驗之數學教師共 150 位，針對問卷試題本之試題進行評分及書寫數學素養試題觀點，以質性與量化統計分析對於問卷資料進行分析。研究發現教師認為數學素養試題之特徵包含：能彰顯生活中數學的價值、數學概念應用、能有適當啟發、真實情境、使用數學工具與邏輯推理等特徵。研究並透過紮根理論研究法及探索性因素分析整理出數學素養試題之指標與判定標準分別為圖表判讀分析、具重要解題資訊、真實情境中的數學、運用數學工具，以及試題具有數學結構。

關鍵字：數學素養、數學素養導向試題、教師觀點、問題特徵、判定標準

壹、緒論

一、研究背景與動機

近年來，培養數學素養成為國內數學教育的熱門議題，為符應十二年國民基本教育課程綱要之理念與目標，教師需瞭解數學素養的定義與核心概念，調整數學素養教學與評量設計。儘管國內外有許多學者提出數學素養的觀點，但針對數學素養教學與試題的界定尚未有明確的標準，因此教師在設計課程與評量時難以掌握重點概念，發展適合學生的數學素養導向試題。

隨著 108 課綱實施近四年，有關數學素養的理念及推廣，各教育單位積極辦理相關增能研習，國內學者與學校也組成共備社群討論數學素養教學與評量設計，各教科書出版商也推出數學素養教材及試題提供教師參考，這些參考試題無論是字數、情境取向、問答方式、題材選取、評分方式等等皆不盡相同。近年來為符應新課綱核心素養精神，無論是教學或評量，教師須在數學課堂中融入素養題材，在評量中設計數學

素養導向試題，但現今國內外對於數學素養的定義並為形成共識，且每個人看待數學素養試題的觀點也不相同，在教學與評量上難以達到相同品質。若能從一線數學教師的觀點中找出大多數教師認為的數學素養試題特徵，這樣的試題會是什麼類型？教師們對於數學素養的界定又是如何？如果能夠從教師觀點中歸納出關於數學素養試題的指標與判定標準，這樣的標準會是什麼樣貌？

二、研究目的與研究問題

根據上述研究動機與背景，本研究旨在從數學教師的觀點探究數學素養試題的指標，進而找出數學素養試題的判定標準。為更具體展現研究目的，本研究的研究問題可以陳述如下：

在數學教師觀點下，對於數學素養隸屬程度與數學素養試題特徵為何？

在數學教師觀點下，數學素養導向試題具備的指標元素與判定標準為何？

貳、文獻探討

國內外關於「數學素養」的界定各有說法，部分教育單位或機構所提出的數學素養定義偏向學理主張，部分則以課程實用主張。有關學理主張部分，例如 PISA 所提出的數學素養 (Mathematical Literacy) 是指個人在面對生活、學校、工作與社會環境時，有能力辨識、理解、探索數學在不同情境問題的意義，並且能夠運用數學進行邏輯思考判斷，進一步加以解釋 (OECD, 2002)；美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]) 也以 Mathematical Literacy 作為數學素養的代表字詞，界定數學素養是個人具備數學能力，能夠以數學進行溝通交流，並且能夠瞭解數學價值 (NCTM, 1989, 1991)；歐洲聯盟 (European Union [UK], 簡稱歐盟) 提出數學素養是個人依實際生活情境需求，能夠統整所學知識、技能及態度的涵養，成為積極參與民主的現代公民，並且自我實現 (葉坤靈, 2017)。課程實用主張部分，例如英國在 2013 年的國家課程規劃中以數學素養為目標，培養學生利用數學進行推理的能力，提供數學方法讓學生認識周遭世界，如財金素養、科學評析、科技與工程；日常生活與職業等相關議題 (林福來等人, 2013)；荷蘭的數學教育強調數學要與真實世界連結，推行現實主義數學教育，荷蘭數學家 Hans Freudenthal 認為數學教育應重視數學化 (Mathematisation) 的過程，瞭解如何以數學處理現實問題，並找出數學的解，更重要的是能以數學的觀點發現結果的侷限性 (黃家鳴, 2000)；芬蘭在 2004 年的國家核心課程綱領 (Finnish National Board of Education, 2004) 提出數學教學是提供發展數學思維和訓練使用解題方法的機會 (林福來等人, 2013)。

除了數學素養定義，國內外學者提出關於數學素養的要素，例如 PISA 試題中包含內容知識、數學識能及建模歷程三個數學素養要素，其中內容知識為數學學習內容，可以分成數與量、改變與關係、空間與形狀及資料與不確定性四大類；數學識能為解題過程中所使用到的能力，如運用符號、使用數學工具、推理與論證等能力 (OECD, 2016)；建模歷程為透過數學語言或工具將生活情境問題轉成數學問題的建模過程，包含形成、運用、詮釋與評估四個歷程 (OECD, 2016)。美國數學家 Steen (2001) 以 Quantitative literacy 作為數學素養一詞，提出數學素養包含數學信心、文

化欣賞、解釋數據、邏輯思維、做決策等十個數學素養組成要素。林福來等人(2013)提出以「知、行、識」三個方面詮釋數學素養的內涵。左台益(2018)提出以「知、用、觀、學」四個面向探討數學素養導向的教材設計。上述學者所提到的數學素養組成要素雖各有見解，整體而言涵蓋了數學本質、數學應用、利用數學結果進行解釋進而評估，最後達到情意面向的欣賞與終身學習的層次。

關於數學素養評量試題，任宗浩(2018)對於素養導向評量的界定建議以兩項基本要素作為依據，分別是佈題強調真實的情境與真實的問題，以及評量需強調總綱或領域科目之核心素養、學科本質及學習重點。吳正新(2019)認為數學素養評量試題應有別於以往紙筆測驗僅重視學習內容，傳統數學試題著重計算或為了未來學習更高階數學知識而設計，數學素養試題之命題可以從學習內容、生活情境，以及從數學家建立數學知識的角度出發。綜合上述專家學者觀點可知，生活情境與情境脈絡是發展數學素養導向評量的必備要素，不只評量學習內容，更重視學生的認知、情意態度與生活應用的學習表現。

本研究旨在探討教師觀點下之數學素養試題的特徵，因此教師需理解數學素養內涵，關於教師對數學素養的觀點與態度，劉玉玲(2017)依據數學素養的四大目標提出教師應具有的數學素養之看法，包含教師須瞭解數學思維的抽象性(以簡馭繁)、邏輯性(有條理分析與推論)及創新力(引導學生發揮數學思維)三種特色，教師應充實並活用基本數學知識，建立健康對待數學的態度，且善用計算機等數位工具。

綜合上述可發現，數學素養與數學素養導向試題的定義與界定，仍有待討論的空間，關於數學素養試題的判定也尚未發展出明確的指標。因此，本研究蒐集一線教師以及專家學者，整理出數學素養試題指標與判定標準。

參、研究方法

本研究旨在從數學教師觀點探討關於數學素養導向試題的指標與判定標準，為釐清教師判斷數學素養試題隸屬程度的考量因素與認同程度。本研究以問卷調查方式，選用主張含有數學素養成分的試題形成問卷，蒐集教師對於數學素養試題的觀點。並透過紮根理論研究法整理出數學教師認為數學素養試題之特徵及評分標準；另採用量的統計研究法分析教師所勾選的數學素養試題隸屬程度，運用探索性因素分析，希望找出數學教師在判斷數學素養試題時的重要考量因素。由質性分析與量化分析結果相互比較與對應，驗證質性與量化研究方法所得的結果是否一致，並試圖建構出一套數學素養試題之指標，作為檢核數學素養試題的判定標準。

本研究之研究對象為已受過數學素養設計試題培訓課程以及有經驗之輔導團國中教師 32 位與國小教師 30 位、由數學學科中心推薦對於受過 108 課綱核心素養相關課程培訓的高中數學教師 50 位、師資培育機構修過教育學程之國中數學職前教師 33 位、具數學教育專業背景大學教授 4 位及國家教育研究院數學素養命題培訓計畫研究專員 2 位，共 151 位。

本研究的研究工具為數學素養導向試題問卷，問卷內容包含選擇題及開放式問題。試題來源透過系統抽樣選取 PISA 試題 15 題，臺灣 2011 數學素養評量樣本試題(上)(下) 22 題，111 年國中會考數學參考試題本 14 題，國家教育研究院公告範例

試題 3 題，共 54 題。從選取出來的數學試題中，以質性方法記錄各試題內容及試題特徵，依照題目所具備之特性作為篩選試題形成問卷試題本之依據，包含字數的多寡、各種表徵的使用與表徵數量、題目的問答方式、是否在題目中給予新的定義、資訊的選擇、常識的運用、數學的本質以及情境等標準進一步篩選出 25 題形成問卷試題本。問卷內容共分成兩個部分：第一部分針對各題之數學素養導向隸屬程度採用 Likert 七點量表計分方式進行勾選，從完全贊同 7 分至完全不贊同 1 分，此部分僅單純針對各題勾選，問卷試題的題型架構如表 1；第二部分為蒐集對於勾選數學素養導向試題隸屬程度之判定標準，以及認為數學素養導向試題應具備之特徵，使用敘述式或條列式給予回饋，書寫於問卷試題本三分之一處、三分之二處與最後一頁。教師填寫問卷試題本時，針對數學素養導向試題之隸屬程度進行勾選，不需解題，並根據其勾選時對於數學素養導向試題之判定標準，以敘述式或條列式給予回饋。

表 1：問卷試題題型架構圖

題目來源	問卷題號	題目形式	問題情境
PISA2006 試題	10、14、15	選擇、開放式	生活、個人、建築生活
2012 預試試題	16	選擇	生活、個人
會考參考試題本	3、4、6、7、8、9、 11、12、13	選擇、封閉式	數學文字、生活、個人、建築藝術
國教院初稿示範題	1、2	選擇、封閉式	生活、個人
國教院定稿示範題	5	封閉式	教育
臺灣素養試題（上）	17、18、19、20	選擇、封閉式、開放式	生活、個人、建築藝術
臺灣素養試題（下）	21、22、23、24、25	選擇、封閉式、開放式	生活、個人、社會、科學

本研究流程分為六個階段，分別為文獻探討準備階段、研究工具發展階段、問卷實測實驗階段、問卷資料分析階段、理論發展階段與撰寫研究結果階段。問卷資料分析除了進行量化統計記錄問卷所勾選之數學素養導向隸屬程度，同時以質性記錄數學素養導向評分標準與數學素養導向試題特徵，以紮根理論研究法發展數學素養導向試題之判定標準與原則，並比較質的研究與量的統計分析對應情形；理論發展階段建構出最終數學素養判定標準與其指標。

肆、結果與討論

一、數學素養試題之數學素養隸屬程度分析。

由各試題素養隸屬程度百分比可發現教師對於部分試題之數學素養隸屬程度的評分結果較為一致，而有部分試題之評分結果較分散。無論試題來源及類型，其各項分數皆有教師勾選，且大部分題目之最高分及最低分都有，顯示各試題皆有老師認同是素養試題，也有老師認為不是素養試題。從數學素養隸屬程度評分結果之平均值中，挑選平均值高分前 5 題如表 2 以及平均值低分前 5 題如表 3 進行分析。平均值高分前 5 題，其中有 2 題來自國家教育研究院數學素養範例試題，2 題來自 111 年會考數學參考試題本，1 題來自臺灣 2011 素養評量樣本試題，此 5 題同時也為標準差最小之 5 題，顯示教師對於這 5 題的評分一致性較高，且普遍認為這 5 題較符合數學素養試題。而平均值最低分的前 5 題，其中有 3 題來自 111 年會考數學參考試題本，2 題來自國家教育研究院數學素養範例試題，平均值最低的前 5 題同時也為標準差相較

其他試題大，顯示教師在判斷這 5 題的評分一致性較低，有教師認為是數學素養題，也有教師認為不是數學素養題。

表 2：教師與專家對於題目隸屬程度之百分比、平均值、標準差（平均前 5）

題目來源	會考數學試題	國教院題	國教院題	素養樣本題	會考數學試題
問卷題號	12-2	5-1	15-2	22-1	7
題目名稱	熱量分辨	消防員	郵資	奢侈稅	傳單印刷費
贊同(%)	90.1	92.1	92.7	88.7	88.7
普通(%)	6.6	2.0	2.6	6.0	4.6
不贊同(%)	3.3	6.0	4.6	5.3	6.6
平均值	6.06	6.05	5.98	5.85	5.84
標準差	1.15	1.27	1.23	1.26	1.22

表 3：教師與專家對於題目隸屬程度之百分比、平均值、標準差（平均後 5）

題目來源	國教院題	會考數學試題	國教院題	會考數學試題	會考數學試題
問卷題號	2-2	6	2-1	8	4
題目名稱	吸血鬼問題	空間展開圖	吸血鬼問題	二次函數問題	坐標問題
贊同(%)	51.7	38.4	23.8	20.5	15.2
普通(%)	11.9	17.9	26.5	13.9	15.2
不贊同(%)	36.4	43.7	49.7	65.6	69.5
平均值	4.19	3.91	3.48	2.91	2.74
標準差	1.77	1.73	1.69	1.77	1.63

二、數學素養試題特徵與評分標準分析。

為瞭解數學教師眼中關於數學素養試題之特徵與評分標準，本研究運用紮根理論針對問卷中之開放式問答資料進行分析。首先對問卷內容進行開放式編碼，將教師與專家書寫的文字、句子、名詞進行分解，轉換為開放式編碼；其次，利用開放式編碼所建立的類別與次類別之間的關聯性，尋找類別間的因果關係形成主軸編碼；針對主軸編碼之結果，歸納形成選擇性編碼。由問卷資料中分別對教師所填寫之數學素養試題特徵與評分標準進行分析，結果顯示教師認為數學素養試題之特徵前 10 個如表 4。其中超過 30% 教師提到的分別為：「能顯現生活中數學的價值」、「淺顯易懂的數學概念應用」與「真實情境與真實數據」。

表 4：數學素養試題之特徵

特徵	說明
能顯現生活中數學的價值(66%)	突顯數學與日常生活問題的關係、生活上有需要解決或評估的問題、能顯現數學價值、試題情境需考慮檢測對象。
淺顯易懂的數學概念應用(46%)	含有數學知識、結構、工具、概念、計算等、數學問題不因加入情境而變複雜、情境試題淺顯易懂、試題提供必要且足夠的專業知識情境或解題資訊。
真實情境與真實數據(30%)	非為素養設計的人工數學問題。
能有適當啟發及延伸思考(24)	能使學生思考、能引起學習動機、對學生有適當啟發、試題可用於教學且能進一步延伸探討。
評量目標清楚且提問有意義(16%)	評量目標清楚、能顯現數學目標、提問有目的。
情境合理有脈絡且題幹敘述完整(16%)	情境合理有脈絡、答案有意義、題幹敘述完整。
跨領域與議題融入(12%)	跨領域、跨學科、融入議題、結合科普知識、需具備

特徵	說明
	生活經驗。
使用數學工具與邏輯推理(12%)	運用計算機等數學工具、運用邏輯推理分析。
題組連貫但各題答案互不影響(6%)	題組題之引導的子題少、題組連貫但各題答案互不影響。
多元解法與開放式問答(4%)	解法不只一種、試題可開放式作答、能夠運用數學方法所得到的結果與他人溝通。

而教師對於數學素養試題之評分標準如表 5，包含試題與日常生活情境相關、真實情境、試題含有解題資訊、善用數學工具解題、合理易懂情境、非純數學解題、試題具有數學結構、能產生解題動機、考量閱讀能力、跨領域、題材新穎度、圖表判讀，以及能評測整合能力。這些都是教師們用來判斷是否為素養試題的可能標準。

表 5：教師對於數學素養試題之評分標準

評分標準	說明
日常生活情境相關	生活中出現的比例、數學與日常生活的連結程度、與情境脈絡有關的數學問題。
真實情境	具實際情境意涵、非刻意包裝的數學問題、數據適切性。
試題含有解題資訊	題幹敘述是否為解題必要條件、試題是否有提供解題方向、題目沒有過多雜訊、可從題目條件判斷適切答案。
善用數學工具解題	能否轉譯為數學語言、對數學定義、符號、概念的掌握與理解、運用數學原理、方程式等計算、數學建模能力。
合理易懂情境	試題依課程程度及教育階段而定、題意清楚合理、不考慮數學本身難易度、有意義的答案。
非純數學解題	適當數學計算、非純計算、代公式、快速解法等。
試題具有數學結構	所測驗的數學能力是否需要該情境、數學學科知識也是素養、試題含有數學知識。
能產生解題動機	學生會遇到需解決的生活問題、學生想知道且在意的問題。
能評測整合能力	評量目標明確、能使用適當工具做判斷、含有抽象思考、推理能力、能依數學知識判定結果。
跨領域	跨領域、跨學科、融入各種題材、有學術情境。
題材新穎度	有別於傳統試題、非偵錯題、非坊間試題。
圖表判讀	試題結合圖表、圖表雜訊少、善用圖表呈現資訊、以圖表化繁為簡。
考量閱讀能力	適量文字敘述、閱讀文本設計考量閱讀量、容易閱讀理解。

三、數學教師對於判斷數學素養試題之重要考量因素。

為了探討教師與專家對於數學素養題評分之重要考慮因素，將各題勾選之結果，先經過 KMO 取樣適當性檢定及巴氏球形檢定， $KMO=0.837$ 、Bartlett 球面性檢定卡方值為 4235.314，自由度為 861，顯著性 $=0.000<0.001$ ，已達顯著水準，結果顯示資料為適合進行因素分析。經過檢定之後，續以因素分析中的主成分分析來擷取共同因素，依據固有值大於 1 作為選取共用因素個數的原則，結果共選取 5 個主要因素，總計可解釋全部變異之 55.244%。再經過最大變異數轉軸法 (varimax)，對選出的因素進行轉軸，使各因素之代表意義更明顯且更易於解釋，其結果詳表 6。

透過因素分析之結果，搭配前述紮根理論研究所形成之 13 項評分標準，徵詢專家意見並對以上五個主要因素命名，說明如下。

因素一主要來自 12 小題，其中 3 題來自 111 年國中會考數學參考試題本、6 題來自 PISA 試題、3 題來自臺灣 2011 數學素養評量樣本試題。分析以上試題內容，並對應質性分析所得之結果，發現每題皆含圖表資訊或解題時需透過試題中的圖表進行判讀，故將因素一命名為「圖表判讀分析」。

因素二包含 9 題，其中 8 題來自臺灣 2011 數學素養評量樣本試題、1 題來自 111 年國中會考數學參考試題本。以上試題發現每題試題之題幹敘述皆含必要解題資訊，解題過程須依照題目條件判斷適切答案，故將因素二命名為「具重要解題資訊」。

因素三包含 7 題，皆為臺灣 2011 數學素養評量樣本試題。由以上試題發現此 7 題皆非純數學計算題或非單純代公式即可得出結果之試題，試題多來自真實情境鋪陳，題材有別傳統試題與坊間常見例題，部分試題如買文具、奢侈稅等與日常生活買賣商品等題材融入有關，部分試題如地震規模、輻射外洩等生活常識有關，綜合上述特性，將因素三命名為「真實情境之數學」。

因素四包含 11 題，其中 5 題來自國家教育研究院範例試題、5 題來自 111 年國中會考數學參考試題本、1 題為 PISA 試題。將上述試題對應質性分析所得結果，發現部分試題提供解題所需公式或關係式，部分試題與日常情境相關且情境合理有脈絡容易理解，文字敘述清晰無過多雜訊，解題者僅需將題目情境運用數學概念或語言轉換成數學式，透過簡單計算即可求得答案，故將因素四命名為「善用數學工具解題」。

因素五包含 3 題，此 3 題試題中含有較多且明確的數學條件與數學結構，無過多情境包裝，僅需透過數學知識概念即可判斷解題，本研究將因素五命名為「試題具數學結構」。

表 6：教師與專家對於題目的隸屬程度重要考慮因素

因素	題號	因素負荷量	題號	因素負荷量	固有价值	解釋變異量(%)
圖表判讀 分析	16-1	0.702	14-1	0.575	13.696	14.397
	17-2	0.653	12-2	0.535		
	15-2	0.651	20-1	0.474		
	14-2	0.644	15-1	0.410		
	16-2	0.641	11	0.404		
	17-1	0.638	13-1	0.371		
具重要解 題資訊	18-1	0.721	19-1	0.521	3.329	11.318
	21-1	0.718	20-2	0.504		
	18-2	0.687	23-1	0.430		
	21-2	0.615	23-2	0.390		
	13-2	0.549				
真實情境 之數學	25-1	0.821	22-1	0.571	2.413	11.194
	25-2	0.771	22-2	0.563		
	24-2	0.629	19-2	0.511		
	24-1	0.627				
善用數學 工具解題	1-1	0.702	2-1	0.494	1.889	10.475
	1-2	0.633	5-1	0.473		
	7	0.611	3	0.449		
	10	0.584	12-1	0.448		
	5-2	0.564	4	0.096		
	9	0.557				

因素	題號	因素負荷量	題號	因素負荷量	固有值	解釋變異量(%)
試題具數	8	0.845	2-2	0.457	1.876	7.860
學結構	6	0.726				

四、數學素養試題之指標與判定標準。

以教師對於數學素養試題的評分標準之紮根理論及因素分析所得結果，針對數學素養隸屬程度平均值最高分前 5 題及最低分前 5 題之試題內容進行分析，發現最高分前 5 題中有 4 題須搭配圖表資料判讀，試題中含有重要解題資訊，雖不全然為真實情境，但試題情境與日常生活相關，如產品包裝資訊、郵資、稅金計算等等，解題過程需理解試題情境並將情境轉成數學式，運用數學計算所得結果進行判斷；最低分前 5 題與課本基本題與傳統數學試題較為相似，其中僅有 2 題提供圖示，分別為平面坐標圖及三角柱，試題所提供之解題資訊多為數學符號與公式為主，此 5 題皆無真實情境或日常生活相關之題材，以單純測驗數學概念為主。

依據上述研究，綜合紮根理論研究所形成之 13 項數學素養試題評分標準與因素分析所得教師判斷數學素養試題之 5 項重要考量因素，整理出關於數學素養試題之 5 項指標，分別為：(1) 圖表判讀分析：試題結合圖表呈現資訊、(2) 具重要解題資訊：包含必要解題條件、解題方向，並且能從題目條件判斷適切答案等、(3) 真實情境中的數學：具實際情境意涵，包含日常生活情境、跨領域等議題融入，同時能引發解題動機，並且依課程或教育階段而定、(4) 運用數學工具：能將情境轉換成數學，運用數學知識進行解題、(5) 試題具有數學結構：試題中含有數學知識、提供明確數學條件。

伍、結論與建議

關於數學素養試題之特徵，有 30% 以上教師認為數學素養試題能顯現生活中數學的價值、試題具備淺顯易懂的數學概念應用，以及試題來自真實情境與真實數據，此外，部分教師認為數學素養試題對學生能有適當啟發及延伸思考，試題情境合理有脈絡並且提問有意義、評量目標清楚，數學素養試題可以跨領域命題或議題融入。從解題面向來看，解題善用數學工具與邏輯推理分析、作答設計可開放式作答，以多元解題策略判斷答案。從問卷資料中發現教師對於數學素養試題之評分標準可分為 13 項，分別為日常生活情境相關、真實情境、試題含有解題資訊、善用數學工具解題、合理易懂情境、非純數學試題、試題具有數學結構、能產生解題動機、能評測整合能力、跨領域、題材新穎程度、圖表判斷，以及考量學生閱讀能力。從教師判斷試題之數學素養隸屬程度量化分析結果，對應紮根理論分析所得之數學素養試題特徵，發現評分較高之試題有別於傳統數學計算題，多與日常生活相關、試題含有圖表資訊、解題方式需先理解試題情境並轉成數學式，運用數學計算所得結果進行判斷。將各試題之數學素養隸屬程度勾選結果進行探索性因素分析，萃取出教師評分之 5 項考量因素，對應質性分析結果，分別為圖表資料分析、具重要解題資訊、真實情境之數學、善用數學工具解題，以及試題具數學結構。

本研究的研究工具為數學素養問卷試題本，試題選用 PISA 試題、國家教育研究院公告範例試題、臺灣 2011 數學素養評量樣本試題及國中會考數學試題，主要施測

對象以青少年學生為主，雖有部分試題可以讓國小及高中學生進行評量，但從問卷資料可知部分教師認為數學素養試題需考量學生的教育程度及先備知識，因此希望在問卷試題本中所選用的試題可以將各教育階段試題比例平均。因應 108 課綱培養核心素養能力，教師在評量設計時可以適當搭配圖表資訊，培養學生圖表判讀能力；佈題盡量避免試題出現過多雜訊，可適當融入真實生活情境，引發學生解題動機；試題搭配有脈絡之情境設計適當解題條件與方向，培養學生從題幹中尋找有意義的解題線索，透過解題訓練從生活中找尋解決問題的方法。

陸、參考文獻

- Finnish National Board of Education (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved 20130814, from http://www.oph.fi/download/47672_core_curricula_basic_education_3.pdf.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston VA: Author.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2002). *Programme for International Student Assessment*.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics, and financial literacy*. Paris, France: Author.
- Steen, L. A. (2001). The case for quantitative literacy. In L. A. Steen (Ed.), *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy* (pp. 1-22). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.
- 任宗浩 (2018)。素養導向評量的界定與實踐。載於蔡清華 (主編)，**課程協作與實踐 第二輯** (75-82頁)。臺北市：教育部中小學師資課程教學與評量協作中心。
- 吳正新 (2019)。數學素養導向評量試題研發策略。**中等教育**，70(3)，11-35。
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華 (2013)。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究整合型研究之子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告 (NAER-102-06-A-1-02-03-1-12)。新北市：國家教育研究院。
- 黃家鳴 (2000)。現實情境作為數學學習的起點：荷蘭經驗。**數學教育**，11，34-46。
- 葉坤靈 (2017)。由歐盟核心素養的評量省察我國中小學核心素養評量之相關議題。**臺灣教育評論月刊**，6(3)，7-14。

Determination Indicators and Standard for Mathematical Literacy Questions from the Mathematical Teachers

Yu-Zhen Zhang Chia-Jui Hsieh

Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Abstract

Mathematical literacy is the most popular issue of mathematics education in recent years. School mathematics teachers need to design mathematical literacy question (MLQ) to evaluate their students' mathematical literacy. Although scholars in many countries have proposed definitions for the idea of mathematical literacy, these definitions do not exact say the same thing. The purpose of this study was to explore the characteristics and indicators of mathematical literacy questions (MLQs) and tried to set up evaluation standard for MLQs to help teachers design them.

The methodology of grounded theory research, questionnaire method and factor analysis approach were used in this study. We collected most MLQs released and declared by Taiwanese education authorities or research institutes, such as the samples of MLQs of Comprehensive Assessment Program for Junior High School Student 2022 (CAP 2022), Taiwan 2011 Sample of MLQs, and released questions of PISA 2012 (OECD, 2013). The questionnaire of MLQs systematic sampling to select 25 questions as the questions in this questionnaire. The participants of the study were chosen with purposive sampling and 151 sets of questionnaire data were collected and analyzed. The participants of the study included professors of mathematics education (experts), in-service school mathematics teachers trained in MLQs Design Project, pre-service junior high school mathematics teachers, and senior high school mathematics teachers. The results show that teachers believe that the MLQs emphasize the relationship between mathematics and lives. The indicators of MLQs including relevance to daily life situations, capability of interpreting graphic materials, application of mathematical concepts, capability of multiple problem-solving, logical thinking, innovation, and readability.

Key words: Mathematical Literacy, Mathematical Literacy Questions.

探究兩位國民小學師資生的小數教學信念

郭懿純¹、李心儀²

¹ 臺北市立大學教育學系學生 weiyichun@gmail.com

² 臺北市立大學教育學系教授 sylee@utapei.edu.tw

摘要

本研究主要目的為探究二位國民小學師資生的小數教學信念，就數學知識、學習氣氛、如何評量、師生關係、自我認同等五個層面採訪談法分析研究結果，結論如下：

- 一、兩位訪談對象認為自身的小數知識會影響小數教學方法。
- 二、兩位訪談對象認為好的學習氣氛在小數的教學上是重要的。
- 三、兩位訪談對象認為可根據小數評量結果改善小數教學方式。
- 四、兩位訪談對象認為教師可為小數知識傳授者也可為小數學習的引導者，目的皆是讓學生能夠自行建構小數知識。
- 五、兩位訪談對象對於小數教學有不同的方式。

關鍵字：小數、師資生、國民小學、教學信念

壹、緒論

一、研究背景與動機

過去導師曾讓班上同學分享自身教育理念，可以在一些同學的試教過程看到他們習慣的教學方式，讓人不禁想了解，國民小學師資生的小數教學信念。研究者在過去數學學習方面充滿興趣，對自身而言解數學題目一直是有趣的過程，因此想藉由小數為主題探討國民小學師資生的教學信念，透過晤談了解國民小學師資生對小數的教學信念，以此完成此篇論文。

二、研究目的

本研究目的為探究二位國民小學師資生的小數教學信念。

貳、文獻探討

一、數學教學信念

信念會影響一個人的思考與行動，有著不同信念的人在做出行為的時候也會有不同的表現，在教學方面，信念也會影響一位教師的教學成效，其中可能代表著一位教師的教學觀點。教學信念是教師在教學歷程中對於歷程中所有的相關因素及變相所持有且信以為真的觀點。這些觀點是由個人所持有各種信念單位組織而成的系統。其內涵包括對自我概念、課程發展、教材教法、教學理論、教學方法、教師教學活動、學生學習活動等方面的信念(林進材，1997)。教學信念是指教師對於教學歷程中相關變相的思考、對教學相關問題的基本看

法。例如教師對教育目標、課程、教師角色、學生角色、知識、學習等等的信念，都可以包括在其中(廖居志，2000)。在 Dellinger, Bobbett, Olivier, & Ellett(2008)的研究指出，教學效能具有類化性，所謂類化性，是指學生對於學習相關活動，會因為情況類似而感到自信，而產生類化的效能感，以此說明在學生的學習活動中，共同的學習有助於提升個人的學習效能，而由全班同學一起學習的班級氣氛可能對學習自我效能感有影響。教學信念除了影響教師教學行為，對學生的行為與學習成效也有直接或間接的影響，對近年來大部分研究者來說，教學信念的意義著重在整個教學歷程，包含教學理念、教學目標、教學課程、教學方法、班級經營、學生個別差異、師生角色及互動、結果評量。

根據以上文獻探討，此研究的訪談大綱分為五個項目：數學知識、學習氣氛、如何評量、師生關係、自我認同，藉由這五個項目設定訪談大綱，以分析國民小學師資生對小數教學信念的了解。

二、國民小學小數

有些教師認為小數是整數位值的延伸，但以現今教科書而言，小數的概念皆是由分數的概念進行教學，在學習上不純依照整數的模式來學習。小數的意義可說是根源於整數和分數的概念而連結起來的，要了解小數的意義，應從分數的「部分與整體」關係，和整數的位值概念關係兩方面來著手(劉曼麗，1999)。小數和整數最大的不同是小數位值離小數點越遠數值就越小，而整數則相反，是離小數點越遠者數值越大。而在分數的部分，國小的教材是以分數作為學習小數的先備知識，在了解分數的意義之後，建立小數的符號和意義，將小數點後面的數字以十分位、百分位、千分位進行讀寫，是引用分數十分之一、百分之一、千分之一的概念，而小數和分數的值皆是用來表達 0~1 之間的值。學生在學習小數的概念時，經常受到整數與分數的概念影響，小數的學習較為複雜與抽象，在學習上常會比較困難。最為顯著為小數點的位置，學生在小數的大小判讀容易忽略小數點，或是代入整數的思考模式，對「0」的意義不清楚，例如搞不清楚 10 和 0.1 的大小區別。

以上文獻探討說明國民小學小數的學習對於學生來說是較為困難的，因此此篇研究將教學信念的研究限於小數範圍。

參、研究方法

一、研究對象

研究對象一-O 同學：北市某大學大三學生，有師培資格，目前正在修習數學教材教法。透過事前的了解，O 同學對於小數的喜歡程度為很喜歡，因為能夠在其中獲得成就感，在過去小數學習中成績一直穩定在班級前三名。而 O 同學對於小數單元的學習認為，數學的單元之間都是息息相關的，所以如果沒有讀懂必定會對其他單元的運算造成影響。

研究對象二-S 同學：北市某大學大三學生，有師培資格，目前正在修習數學教材教法。透過事前的了解，S 同學對於小數的喜歡程度為沒有很喜歡，他說明因為在過去學習小數的時候在小數乘法的部分很容易出錯，有部分是因為過去學習沒有把觀念釐清，因為經常計算錯誤感到挫敗，所以對於小數並沒有到很喜歡，但認為小數為日常生活中一定會用的數學計算，所以也必須將它學好，同時也從生活中練習從而熟悉。S 同學也認為小數是一個比較難學習的單元，因為某些單元可用實際的物品來替代，將算式具象化，但他認為小數比較難達到這個方法，所以在理解上也會需要花比較多的時間或方式去理解小數的概念。

二、研究方法

本研究進行一對一半結構性訪談，進行逐字稿記錄，收集晤談內容的完整資料，用以事後分析。訪談過程依照擬定的訪談大綱進行，以了解本研究目的。為確保本研究之編碼者間信度，另有一位編碼者協助分析資料，若有兩人不一致者，則進一步討論至達成共識。

表 1-1

半結構性訪談大綱

·數學知識

- 1、你認為小數的教學知識是如何形成的？
- 2、你認為小數學習是一種問題解決過程嗎？為什麼？
- 3、你覺得如何才可以讓學生啟發思考，了解小數的概念？

·學習氣氛

- 4、你覺得學生在怎麼樣的學習氣氛中學習能夠增加數學小數的學習效果？
- 5、你會如何營造愉快的學習小數氣氛？
- 6、你覺得好的學習氣氛與學習環境對學生在小數的學習上會造成什麼影響？

·如何評量

- 7、你覺得小數評量的結果對改善教學有何影響？
- 8、你認為依據評量的結果，給予怎麼樣的回應能夠增加學生學習小數的信心？
- 9、你覺得對於學生的個別差異，教師可以如何改變教學的策略，以充分進行小數的教學？

·師生關係

- 10、你覺得在進行小數的知識與觀念的教學時，教師應該扮演的是什麼樣的角色？

·自我認同

- 11、試著描述自己在小數教學上的特質以及反思。從老師教學的角度、從學生學習的角度。

肆、研究結果與討論

一、O 同學訪談結果分析：

表 2-1

	你認為小數的教學知識是如何形成的？
	O：教師從分數的概念轉成小數說明 0.1、0.01……分別為 1/10、1/100……，藉由題目和分數的概念區分 0~1 之間的數，並說明小數是無限的。
	你認為小數學習是一種問題解決過程嗎？為什麼？
數學知識	O：是的。我覺得小數學習的過程是計算、思考、推論、解題、表達，和科學研究中探究問題的方法類似，最終目的是為了解決問題。
	你覺得如何才能讓學生啟發思考，了解小數的概念？
	O：我覺得可以從生活帶入，讓學生可以在日常生活中看到小數的存在，讓數學具象化。

在 O 同學對於數學知識的訪談中了解，他對小數的理解偏知識面，藉由概念的轉換說明小數知識，也將之視為問題解決過程，以解題為導向的知識教學，而引起動機的方式是從生活帶入，可知 O 同學將小數當成解決日常生活問題的方式，讓學生常看、常用，以增加對小數學習的興趣和能力。

表 2-2

	你覺得學生在怎麼樣的學習氣氛中學習能夠增加數學小數的學習效果？
	O：有好的獎勵制度，會促使學生有積極向上的學習心態。 研究者：獎勵制度之外，你覺得懲罰制度如何？ O：如果把獎勵制度視為正增強，懲罰制度就是一種負增強，對我來說兩者都能夠增加學生學習小數的效果。
	你會如何營造愉快的學習小數氣氛？
學習氣氛	O：可以從遊戲中活動，藉由實作，親自操作，計算小數的題目，從這之中讓學生有被肯定的感覺。
	你覺得好的學習氣氛與學習環境對學生在小數的學習上會造成什麼影響？
	O：愉快的氣氛和環境其實有蠻大影響的。很多學生對小數會因為不了解所以不喜歡，進而更不願意去了解，但如果在環境上可以讓學生感覺到小數存在於生活中，他們更容易去了解，也促使他們想了解，就會去學習。

在 O 同學對於學習氣氛的訪談中了解，他對小數的學習氣氛偏向愉快且鼓勵的教學方式，重視獎懲制度帶來的良性競爭，能夠提高學生對小數的學習效果。而愉快的學習氣氛除環境帶來的影響，O 同學也認為教師可以透過教學設

計，例如帶遊戲等等的方式讓學生快樂的學習，可知 O 同學認為在跳脫數學純粹解題的模式時，能夠讓上課方式變得有趣也有意義。

表 2-3

你覺得小數評量的結果對改善教學有何影響？

O：小數是中高年級的課程，他的學習效果有一部分可能會因為先備知識的學習而受影響，先檢討評量是否合目的性，接著從評量的好壞去評斷是否應該換方式進行教學，總言之我認為是可以藉由評量的結果進行小數教學的改善。

你認為依據評量的結果，給予怎麼樣的回應能夠增加學生學習小數的信心？

如何評量 O：先澄清問題，我覺得鷹架很重要，學生可能要先清楚自己的問題在哪裡，教師透過錯誤的部分進行檢討，引導學生建構正確的觀念，當最後觀念正確解題能夠順暢學生自然能得到學習小數的信心和成就感。

你覺得對於學生的個別差異，教師可以如何改變教學的策略，以充分進行小數的教學？

O：做大面向的教學，避免零碎的記憶和背誦，比較可能可以平衡學生的個別差異。

在 O 同學對於如何評量的訪談中了解，他對小數教學非常重視過去的學習經驗和先備知識，即基礎觀念的部分。在這部分的訪談題目以評量為主，O 同學會根據評量的結果判斷如何改善教學，可知在他的教學中評量為重要之一部分，而他的回答反映了他對教學的調整通常以檢討最基本的概念有無混淆為主，先澄清概念不清的地方在哪再進行檢討與調整。而從他認為當學生最後觀念正確，答題正確能夠讓學生自然的增加對學習小數的信心和成就感，可知在他的教學中，他認為評量結果的好壞除了可用來調整教師教學內容，也會影響學生對小數學習的自信和動機。而對於個別差異的部分，O 同學認為大面向的教學可能可以平衡學生的個別差異，可知他對基礎概念的教學非常重視，將大的基礎觀念分成不同課程進行教學，可以讓學習程度好的同學在學習之後有時間和能力加深學習至較有難度的小數題目，也可以讓學習程度沒有那麼好的同學有足夠的時間去消化整個大觀念。

表 2-4

你覺得在進行小數的知識與觀念的教學時，教師應該扮演的是什麼樣的角色？

師生關係 O：我會比較偏向引導式的教學，就像前面提過的鷹架作用，注重學生自己的發現，也連結過去的教學如分數，更能夠讓學生快速釐清小數相關的觀念，教師扮演的角色類似引導者。

在 O 同學對於師生關係的訪談中了解，O 同學在教學上偏好處於引導者的角色，複習過去分數的觀念，引導學生發現其與小數的關聯，了解小數的觀念，以此進行解題與表達。

表 2-5

試著描述自己在小數教學上的特質以及反思。從老師教學的角度、從學生學習的角度。

自我認同

O：可能沒有太多的教學經驗，小數的知識對我來說太簡單了，很難理解不懂的人到底是哪裡卡住了，是怎麼想的。以小數的加減為例，我可能會把他當作一般數字的加減去計算，只在過程與答案出來後注意小數點的位置或是否進位要把最後的零扣掉。可以幫上面評量的問題做補充，在這時候可能就可以以評量的結果來釐清學生大多數會卡住的觀念和計算錯誤在哪邊。

在 O 同學對於自我認同的訪談中了解，他對自己的小數學習是有自信的，但相對的在教學上便缺乏了一些對學生想法的理解。O 同學會透過評量來改善，從學生可能會犯的錯誤去了解學生對小數的不理解是出在哪一個部分，有此也可以看出對 O 同學來說評量相當重要。

二、S 同學訪談結果分析：

表 2-6

你認為小數的教學知識是如何形成的？

S：先備知識就是分數，從舊觀念帶入新觀念，再進行加減乘除、應用題的計算以熟悉小數的題目。

你認為小數學習是一種問題解決過程嗎？為什麼？

數學知識

S：是的。小數是日常生活中常見到的數，在結合 108 課綱的素養導向之前可能還是偏解題為主，且小學階段學習小數的目的是能夠解決日常生活中的問題，而非培養「小數專家」，因此我覺得小數的學習就是一種問題解決的過程，解決生活上的問題。

你覺得如何才可以讓學生啟發思考，了解小數的概念？

S：啟發思考像是引起動機，我覺得可以從日常生活中會用到的，像是買東西的折扣等等，知道生活是有機會使用的。

在 S 同學對於數學知識的訪談中了解，他認為小數知識是從舊觀念進入新觀念，解題為手段，目的是解決生活上的問題。不管是學習的過程還是熟悉小數知識的方法都是以日常生活所用為目標，可以看出 S 同學對小數知識的建構是以生活所用為主，也藉此引起學生學習動機。

表 2-7

你覺得學生在怎麼樣的學習氣氛中學習能夠增加數學小數的學習效果？

S：我覺得學習氣氛和學習效果好像沒有太大的關聯。

研究者：那你認為什麼是能夠增加小數學習效果的呢？

S：學生的成就感吧。

學習氣氛

你會如何營造愉快的學習小數氣氛？

S：把班上學生分成小組討論，能力好的可以去帶別人，同學間互動可以是開心的，而不是純粹的聽教師講課。而這些分組討論也可以不侷限在一組內，最後可以做分組的競賽，在競爭中大家一起變好。

研究者：那你認為小組的共好或分組的競爭能夠讓學生產生成就感嗎？

S：可以。

你覺得好的學習氣氛與學習環境對學生在小數的學習上會造成什麼影響？

S：學生能變得積極，就像前面說過的競爭。也因為有討論，小數的觀念對他們能比較熟悉和深刻。

在 S 同學對於學習氣氛的訪談中了解，他對於學習氣氛的營造以將學生分成小組討論為主，符合 108 課綱中的「自發、互動、共好」的概念，讓學生從競爭和互動中教學相長，也能就此獲得成就感，進而增加小數的學習效果。

表 2-8

你覺得小數評量的結果對改善教學有何影響？

S：如果舉例一開始的教學是從分數的概念帶入小數，但學生的評量程度差，就可以知道學生可能是在分數部分沒有學習精熟，就再加深分數的概念，也可以理解為是觀念轉化的過程出了差錯，可以考慮是否應該調整換另一種概念進行教學。

如何評量

你認為依據評量的結果，給予怎麼樣的回應能夠增加學生學習小數的信心？

S：分析評量的過程，即使最後答案是錯誤的，也可以鼓勵正確的部分，就像加法減法，有時可能只是計算錯誤，但學生若在列小數計算的直式時，能夠將小數點對齊，或是乘法在最後的小數點位置正確，都可以給他們鼓勵，那情況相反時也是一樣，在正確的地方進行鼓勵，錯誤的部分再檢討調整就可以了。

你覺得對於學生的個別差異，教師可以如何改變教學的策略，以充分進行小數的教學？

S：給予不同的題目，將不同類型(擅長不同東西)的學生分成一組，透過討論教學相長，學生可以了解其他人的思維模式。或是將大重點分散在不同堂課教學，程度好的可以把此重點學的更精細，程度不好的同學也不會因為一堂課重點太多而無法學習。

在 S 同學對於如何評量的訪談中了解，評量對於他來說是一個檢測教學是否有效的方式，若學生的評量結果不佳，便會從中檢討教學的過程、概念的解說是否正確或需要加強，在面對評量結果不甚理想的學生時不會以批評態度應對，而是鼓勵其做得好的部分，這一點與上述提到他對提高學生的成就感相當重視的想法雷同，從鼓勵學生來讓他增加學習小數的信心。面對個別差異 S 同學的方式是將不同程度的學生組在一起，同樣藉由討論的方式，一齊提高整體的小數解題能力。

表 2-9

你覺得在進行小數的知識與觀念的教學時，教師應該扮演的是什麼樣的角色？

師生關係 S：教師就像陪伴者，雖然有知識的教學，將舊觀念帶入新觀念，但知識的建構還是由學生自己透過題目的練習去學習和熟悉。

在 S 同學對於師生關係的訪談中了解，他對教師的角色偏向引導者與陪伴者，學生的學習還是以自己的練習為主。

表 2-10

試著描述自己在小數教學上的特質以及反思。從老師教學的角度、從學生學習的角度。

自我認同 S：我覺得小數是很連貫、需要思考的，若是低年級對數沒有足夠的理解，對分數不理解，或是加減乘除的基礎概念不夠熟悉，在學習小數就容易卡關，無法融會貫通。我們現在的教育還是很在意分數，儘管會慢慢改變，但以現階段來說的話，小數若要能夠理解，基礎就要打的平穩，學生理解就會很快。

在 S 同學對於自我認同的訪談中了解，他對學生學習小數很看重過去舊經驗的知識學習，對他來說數學是連貫的知識，如果沒有打好底子，後續學習小數容易變得較為困難，也因為先前提到 S 同學認為學習小數是為了解決日常生活的問題，所以他對融會貫通，正確使用小數知識看的很重要。

從以上結果看出，O 同學對於自身數學學習是較有自信的，相對 S 同學來說，O 同學在傳授小數知識上也會準備的比較有自信，但也因 O 同學一直以來修習數學相關課程經常是順利且感興趣的，他比較無法理解對小數無法精通的學生卡關的地方，而這時就是透過評量去了解。而 S 同學在過去學習數學經常

覺得是有難度的，所以更傾向提升學生學習小數的自信心，將前後觀念做足完整的連結，能夠讓學生更快且更有信心的回答小數相關問題。以下為研究結果的比較

表 2-11

	O 同學	S 同學	相近/相異
數學知識	從分數概念轉換，從日常生活帶入。	從分數概念轉換，目的為解決日常生活問題。	相近
學習氣氛	獎懲制度帶來良性競爭，在遊戲中學習。	小組討論，提高學習成就感。	相異
如何評量	針對學生錯誤的地方修正，並改善自身教學。	針對學生正確的地方鼓勵，並改善自身教學。	相異
師生關係	引導、陪伴者	引導、陪伴者	相同
自我認同	評量是很重要的，透過評量可以改善教學，可以看到學生的短處。	觀念的連結是重要的，打好底子，並讓小數知識融入日常解題，對於融會貫通，正確使用小數知識看的較重要。	相異

伍、結論與建議

一、結論

從以上訪談結果及受訪者自身學習經歷，可以知道 O 同學本身對小數知識是熟悉的，且對於學習小數的經驗也很有自信，在教學上他將小數的知識連結舊的知識講述，善用獎懲制度和遊戲制度來提升學生的成就感、競爭力與學習動機，並以評量的結果評斷學生學習的盲點與自身教學需改善的問題，對於學生錯誤的地方認為只要順著問題將概念釐清便可以獲得正確答案，並在從不會到會的途中獲得學習小數的信心。

在 S 同學的部分，從他的自身學習經歷看出，他對自身小數知識的學習歷程較為缺乏自信，在學習過程是感到比較困難的，但因為認為小數能夠解決生活上的遇到的問題，所以這樣的知識學習是必要的，提升學生學習的自信心能夠讓學生更願意去學習，也在教學過程讓學生了解小數是能在生活上被看到的數學，會使用到的數學，而使學生願意努力去了解小數。在評量的部分 S 同學認為是檢測教學是否適當的一個方式，他也會藉由評量結果去改善自己的教學。S 同學重視過去舊經驗，學生互相討論互相學習，教師扮演引導者的角色，讓學生在愉快、互動、能被鼓勵或看到長處的環境下學習，是 S 同學認為能夠有效學習小數的方法。

綜合以上研究分析，可以得到研究結論如下：

(一) 兩位訪談對象認為自身的小數知識會影響小數教學方法。

- (二) 兩位訪談對象認為好的學習氣氛在小數的教學上是重要的。
- (三) 兩位訪談對象認為可根據小數評量結果改善小數教學方式。
- (四) 兩位訪談對象認為教師可為小數知識傳授者也可為小數學習的引導者，目的皆是讓學生能夠自行建構小數知識。
- (五) 兩位訪談對象對於小數教學有不同的方式。

二、建議

- (一) 本研究對象只有兩位，未來研究可增加更多的研究對象。
- (二) 大部分相關文獻皆以數學教學信念為研究主題，較少針對特定數學主題進行教學信念的研究，未來可針對不同數學主題進行教學信念研究。

參考文獻

- 王秋芳(2019)。國小學生正向情緒、班級氣氛與教師教學信念對學習自我效能趕之多層次研究。教育學系教育經營與管理博士論文。國立臺南大學。臺南。
- 林琬晴(2021)。國民小學師資生數學學習困擾與數學教學信念關係之研究。教育學系課程與教學碩士論文。國立臺中教育大學。臺中。
- 林進材(1997)。從教師教學信念與決定談教學實施與效能。
- 吳竣淵(2010)。國小職前教師於「數學案例研討」情境中數學教學專業發展之探究。數學教育研究所碩士論文。國立嘉義大學。嘉義市。
- 李玉滢(2009)。國小教師覺知三年級數學低成就學生分數學習困難之個案研究。教學藝術研究所碩士論文。明道大學。臺中。
- 李佳燕(2011)。國小教師人權教育教學信念與教學行為關係之研究。社會發展學系碩士論文。國立屏東教育大學。屏東。
- 高齊偉(2016)。教師的數學教學信念改變對學生數學學習態度的影響之個案研究。科學教育研究所碩士論文。國立彰化師範大學。彰化。
- 徐維翎(2019)。國小教師差異化教學信念與自我效能之相關研究。教育學系教育創新與評鑑碩士論文。國立臺北教育大學。臺北。
- 許偉甄(2012)。國小六年級數學補救教學之行動研究：以「小數除法」及「分數與小數四則運算」單元為例。應用數學系碩士論文。國立臺南大學。臺南。
- 蔡金甫(2009)。國小建構取向數學學習的建構與解構。國民教育研究所碩士論文。國立花蓮教育大學。花蓮。
- 賴淑娟(2010)。國小教師教學專業能力、教學信念對創意教學影響之研究。成人及繼續教育所碩士論文。國立中正大學。嘉義。
- 蕭雅卉(2014)。一位國小教師教學信念變遷之研究-華德福教學信念的影響。教育研究所碩士論文。東海大學。臺中市。
- 戴鳳嬌(2014)。新北市國小教師教學信念、工作壓力與教學效能關係之研究。企業管理系碩士論文。龍華科技大學。桃園。

魏伶珍(2015)。生活化情境融入國小一年級數學之行動研究。應用數學系數學科教學碩士論文。國立臺南大學。臺南。

鄭莉蓁(2010)。台北市國小教師教學信念與班級氣氛之關係研究。課程與教學研究所課程與教學碩士論文。臺北市立教育大學。臺北市。

Dellinger, Bobbett, Olivier, & Ellett (2008). Measuring Teachers' Self-Efficacy Beliefs: Development and Use of the TEBS-Self.

Tabachnick, R. B., & Zeichner, K. M. (1984). The impact of the student teaching experience on the development of teacher perspectives.

Exploring Two Elementary Student Teachers' Teaching Beliefs in Decimals

Yi-Chun Guo¹, Shin-Yi Lee²

¹Student, Department of Education, University of Taipei

²Professor, Department of Education, University of Taipei

Abstract

The purpose of the study was to explore two student teachers' teaching beliefs in decimals. What follows were the results.

1. Both of the student teachers thought their decimal knowledge influenced their decimal teaching.
2. Both of the student teachers thought good learning atmosphere was important to decimal teaching.
3. Both of the student teachers thought decimal teaching could be improved based on decimal assessment results.
4. Both of the student teachers thought teachers were not only knowledge instructors but also learning mentors, both of which were to help students construct their own decimal knowledge.
5. Both of the student teachers had different decimal teaching methods.

Key words: decimal, elementary school, student teacher, teaching belief

數學教練在合作學習教學法的應用-

以二年級長度概念為例

謝如山

國立臺灣藝術大學師資培育中心 t0336@ntua.edu.tw

摘要

本研究目的在探討使用數學教練模式，以協助現場教師進行合作學習。數學教練的專業在於協助教師進行現場的改變，進而協助每一位學生的學習。由於目前國內對於數學教練的研究較少，故本研究以數學教練的專業模式進行合作學習法的應用，以二年級長度概念為例，協助新北市某國小二年級教師進行數學教學。研究方法採用課室觀察法與行動研究法。教學過程全程錄影，由教師與學生間的對話發現教師需進行教學引導的方式。

課程設計為二年級長度課程，教師採用山海經的故事，講述龍伯國的巨人，引起學生學習動機，之後進行發展活動進估測與手指實測活動，雖然在教師出現教學困難，但在數學教練的協助下，教學過程可繼續順利。

本研究在進行數學教練的協助，可分為六個面向，一為課程設計，二為教師應用合作學習法，三為協助教師在數學概念上的建立，四為教師的教學語言，五為引導學生進行答案的探究，最後數學教練依教師的人格特質進行協助。本研究可供未來教師在數學教學的改變進行參考，以協助更多教師能提升數學教學的專業。

關鍵字：數學教練、合作學習、長度概念

壹、緒論

一、研究動機與背景

Felux 和 Snowdy (2006) 提到數學教練的專業面向很多元，但他們引述 Marilyn Burns 的想法是「對很多的差異與不同層面，數學教練的共同目標是要藉由教師在數學教學上的改變，能協助每一位學生的學習。」

Knight (2006) 定義教練為一種非評鑑模式，而是一種介於專業發展者與教師間的學習關係，兩者均能分享對於學習的目標，能促進教師教學與學生的學習成就。Koh 和 Neuman (2006) 整理出相關文獻發現教練的十種元素，如是一種即時性的、持續進行的、長時間的進行、能促進教師的反思、能對教提供反

饋的建議、教練能促進學生學習的成效。

所有的模式對於都說明了建立與教師尊重與信任關係的重要性。所有的教練模式也都建議要能有足夠的時間建立與教師的專業關係。這些時間要能投入在合作學習的對話機制中，能讓教練扮演著一種讓教師反思的催化者。所以的模式都強調教練專業發展的角色，也確認教練的任務是在發展數學專業內涵與教學方法的連結，如提問的技巧，還有其他的專業技巧能促進學校教師在教學有很大的進步。

由於國內對於數學教練的相關研究較為匱乏，本研究目的為應用數學教練的認知模式，進行合作學習方法的實務應用。

二、研究目的

本研究目的為應用合作學習法，採用數學教練的認知模式，進行二年級長度教學的應用？

貳、文獻探討

以下分數學教練模式與合作學習法分別論述。

一、數學教練模式

考量數學教練的需求，Woleck (2009)歸納有四種數學教練模式：認知教練模式、專業內涵的教練模式、教學教練模式、教學與專業內涵教練模式。

(一)、認知教練模式

認知教練能協助教練修正他們自己的能力，再來協助修正別人的能力 (Center for cognitive coaching, 2009)。於此種模式中，重點放在教師是如何被協助的，而不是教練本身。對於教師本身在實務上的精進是否有效或沒有效。

教師的教練是一種媒介，界於被改變者的思考來協助他的思維應要如何改變 (Center for cognitive coaching, 2009)。Spark (1990)提出教練的協助是一種歷程，對引發自主的動機和自我導向的學習，教練的功能就是要提供這個旅程。對於教師而言，教練要能有另一對眼睛來協助與提供一種媒介，讓教師看到自己的教學歷程。

(二)、專業內涵的教練模式

West 和 Staub (2003)提出專業內涵的教練模式，就是以專業內涵為特性。如同認知教練模式一樣，也分課前，課室觀察與課後討論三階段。在專業內涵的教練模式的特性是教練與教師的對話是已概念為核心，用能發展教師教學內涵的方法來引導。這些工具包括課程設計的架構，一些學習的原則，與一些數學課程的核心議題等。由於並不涵蓋教學技巧，所以此教練模式的架構，在於建立與教師在數學課程上的對話與學生在課程中學習的情況。

(三)、教學教練模式

Knight (2004)定義教學教練模式是一種即時性的專業發展概念，要能與教師

合作來確認與執行在教學方法的改變。這種工作性質為目標導向性的，並要能執行系統性的專業內涵。數學教練需要確認教師是否要能在教學內涵上進行溝通。數學教練要能在教學方法與實務上與教師建立專業關係，如經由解釋、觀察、探究、支持、反思與模組化的方式。

Knight (2007) 提出專業的技巧需要使用教練的方式進行，最好的策略就是溝通。他認為與教師溝通要能積極的展現傾聽技巧與肢體語言。再者，教練的工作，要做出很多關鍵記錄，觀察表與會議重點，如那些學生發表了那些意見，教師如何回應。學生在討論時的困難，教師可以如何協助解決等，這些記錄方式都是教練要能建立的組織架構。

若從合作學習面向來看，數學教練的教學方法要著重在學生如何經由同學討論的模式來進行。當學生不進行討論時，教練要如何處理？當學生意見不一致時，教練要如何協助？當課程設計無法達成合作學習需求時，教練要如何進行調整。組間巡視的方法，學生發表的儀態，教師與學生相互討論的口氣與語言，都在教學方法的範圍之內

(四)、教學與專業內涵教練模式

SVMI(2007) 提出教學與專業內涵模式的架構，這些包括事前的事前會議，課室的教學觀察，課後的會議，重點在於數學教練如何協助教師引起學生的思考。數學教練的角色會經常變換，要能從協助教師規劃，進而進行教學，再來就是要能領導教師教學，對於教師與行政人員要能從數學的專業發展會議，來提升數學教學的成效。

二、合作學習法的的相關研究

合作學習是一種運用小組方式讓學生一同合作，透過互動、互助與相互支持的過程，藉以提升自己與他人學習的教學方法。自 1970 年代發展以來，其教學成效已獲得許多實證研究的支持，被認為是一種能廣效解決教育問題的有效教學方法，可以強化學生的思考能力，培養學生學習多元文化、民主參與及人際互動的能力，並為未來職場不同專業之間的協同能力建立基礎（Slavin, 2010）。至目前為止，合作學習為各校廣泛被使用的教學方法，「任何不會使用合作學習或只會用口說方式來要求學生『協同』的老師，都可被視為是缺乏教學勝任能力的老師」（Johnson & Johnson, 2010, p. 203），「所有公立學校教師因此有必要了解如何運用合作學習於教學中，並了解該教學策略蘊涵著 21 世紀教室與整個民主生活方式的生命力 泉源」（Schul, 2011, p.88）。在國內，教育部也將合作學習視為十二年國民基本教育活化教學的重要方法，自 101 學年度起持續推動「分組合作學習計畫」，期以協助教師能在課堂中有效實施合作學習（張新仁主編，2019）

參、研究方法

以下依研究對象、研究工具與研究方法分別論述。

一、研究對象

本研究從新北市某國小二年級，課程設計為長度概念，經由教師協同教學進行觀課與議課，進行合作學習協同教學。

二、研究工具

為對數學教練進行專業指標之探究，本研究將採用錄影方式，將主持人與教師記錄對話內容，分析協助向度，以建立合作學習教學的數學教練指標。

本研究採用附件一之教學檢核表，以記錄數學教師所需之協助內容，經由教學檢核表的協助事項，進行向度分類與指標的分析，能從教學基本面向建立數學教練指標

三、課程設計

以下依教學活動設計、教具準備、引起動機、發展活動與綜合活動分別說明。

1. 教學活動設計：二年級長度單元設計四個活動，每個活動均是互相關連的。第一個活動是龍伯國的巨人，介紹公分的公制單位；第二個活動是水晶宮的茶會，透過第一個活動中的故事情境來做進一步的延伸，以應用公分的長度來製做面具；第三個活動是美麗的輕紗，即介紹公尺的公制單位，從具體操作中，找出測量的策略，最後一個活動是好粗的腰疍，來加強學生對公分的概念，並能聯結到公吋的應用。因篇幅所限，僅介紹第一個活動。
2. 教具準備：古氏積木每組一盒、公分刻度尺每人一把。
3. 引起動機：

故事引述自山海經，海上原來有五座仙山，是神仙們居住的地方，因為漂流不定，時常讓出遊的神仙找不到家，因此神仙們上奏天帝，天帝命令海神禺強派了五隻大黑龜背負仙山，烏龜們雖然偶而因為肚子餓了，伸脖子找東西吃，引起地震，但總算仙山不漂流了，神仙們都很高興。不料有一天，有龍族血統的龍伯國（大人國）巨人閒著無聊，到海邊來釣魚，他站起來像山一樣高，手中執著釣竿，像虹一樣長，那些烏龜們餓得慌，一口氣就被他釣走兩隻，帶回家烹煮吃了。於是兩座仙山就被海浪沖到北極，沈沒了！神仙們慌忙搬家，氣得紛紛向天帝告狀。天帝也非常生氣，就把龍伯國的巨人們通通變小了，小得就像盒子裡的積木一樣，免得他們再釣走另外三隻烏龜。各位，請你們量量看，龍伯國的巨人們，現在到底都有多高呢？

4. 發展活動

- (1). 我們想訂購一個一樣大的白板，請各組以姆指、食指長度測量各組白板的

長度。最後教師再以自己的手指測量，讓學生推論：長度必須要有統一的標準。

- (2). 認識公分的長度，學習用公分刻度尺測量。
- (3). 請學生先觀察有幾種長度(顏色)的積木，並認識顏色的名稱、深淺變化。
- (4). 要用什麼工具來量各色積木的長度？如何量？

5.綜合活動

- (1).將所量各種色彩積木的長度記錄在數學簿上，各組並寫在小白板上
- (2). 請學生用積木測量自己手掌各個手指尖到手腕的長度。
- (3). 如果有時間，用四顆骰子擲出一個數字，請學生以積木排出該數字的長度。

四、研究方法

(一) 課室觀察法

運用課室觀察法(周玉真，1999)，本研究將依數學教學的課室教學概念，如班級經營、課程設計、教學流程、學生反應等面向，記錄學生與學生、教師與學生的對話機制，以數學教練進到課室內的角色進行協助。課室觀察以數學教練檢核表進行，如附件一。將所協助之內容面向，擬定可協助的內涵。

(二) 行動研究法

本研究採用行動研究法(蔡清田，2010)，協助教師進行教學專業的改變。行動研究的內涵在於協助教師進行教學的創新與改變。當教師找出教學的困難，經由教學策略的發想，教學策略的執行，再進行檢核，反饋的歷程。於本研究，教學的困難，由教師與數學教練共同來解決。數學教練的職責即為策略的給予，即時進行檢核與回饋，有別於一般的行動研究，是由教學者兼研究者。

經由課室觀察法與行動研究法，期能找出數學教練的專業模式。以能培育出更多的數學專業教師。

肆、研究結果

以下依教師與學生間的對話，分別陳述數學教練介入模式。

一、 建立公分估測概念：

1. 老師：(手拿一塊小白板)，這塊小白板有多長，誰知道？
2. 學生：甲生猜 30 幾，乙生猜 40 幾
3. 老師：30 什麼
4. 學生：公分
5. 老師：如果我要做一個一模一樣的白板，只知道 30 幾 40 幾做的出來嗎？
6. 學生：30 幾，不知道是 30 幾，可能是 31 或 32

數學教練教學建議 1：事前課程設計指導

老師拿出班上每組都使用過的小白板(40 公分 x 60 公分)，讓學生猜猜看有多長。估測的活動是實際測量前的準備工作，從他們所猜測的答案中可以看出他們所估的長度相當接近。其實，學生估測的能力需要生活的量感做起，而不是如民間版本特別設計一估測的單元，來加強學生估測的能力。

二、學生使用手指進行測量

- 7 老師：我們來做個實驗看看，把食指和拇指張開量量看，會不會？像老師就要量 4 次，(現場用手量長度) 看你們量幾次，負責寫白板的人來量。好，我問問看各組，有 5 次、5 次半、6 次、4 次、5 次、4 次半。總共有幾種長度？
- 8 學生：5 種
- 9 老師：用自己的身體測量可得一樣的長度嗎？
- 10 學生：不行
- 11 教師：當我們說這桌子房子有多長多寬，如果要 18 個指頭，可以做出一模一樣的東西嗎？
- 12 學生：不能

數學教練教學建議 2：數學公制概念建立(數學專業)，使用合作學習

學生已經知道每個人的手長都不一樣，所以所量出來的長度也不盡相同。也因為如此，學生知道上面的活動如果是根據每個人的手長所做出的房子，也會有所不同。透過這樣的練習，讓學生知道有一公制單位的重要。而不是規定他們學，讓學生曉得為什麼要學公分，公尺的目的為何。

三、教師教學出現困難

- 13 老師：所以要做一個像這樣大的白板，長度要什麼？
- 14 學生：要量
- 15 老師：量什麼？
- 16 學生：量公分。
- 17 老師：因為你知道公分才這樣說，可是所有的公分都一樣嗎？
- 18 學生：不一樣
- 19 學生：量形狀
- 20 老師：對，要知道是正方形或圓形。不一樣是什麼不一樣？
- 21 學生：公分不一樣，小的東西和大的東西不一樣
- 22 老師：你的意思是量這個東西我會量 100 公分，你量是 50 公分嗎？所有的長度都一樣長？(因為同學都在同一個圈子打轉，所以老師暫停這個部分，說下一個故事)

數學教練教學建議 3：教師陷入迷思，建議直接進行下一活動

老師在這一部份已經不曉得要如何進行下去了，這可能也是一般教師可能會偶爾出現的狀況，其實於第 25 行若深入了解為什麼學生需要使用公分這樣的單位，會引導到大家建立公分共識的目的。如果教學中出現師生共同混淆的情況，進行下一主題也許是較佳的一個處理方式。

23 老師：再更古老時代，在東海上 5 個仙島，這 5 個仙島會因為風吹而越吹越遠，再北方則有一個大洞，水會流進去，所以仙島很危險，仙人就求天帝，天帝就派 5 隻烏龜各背一個島，有一次，兩個大巨人釣魚，竟然把烏龜釣起來煮龜湯喝掉了，仙人們就向天帝告狀，天帝就把大巨人變小，變的像這積木一樣小，(老師拿各色的大小不同積木)有的像這麼小，有的像這麼大，你們量量看，每個積木有多長，要說明顏色。

1. (各組進行活動)

24 老師：有兩組的答案只有 8 種，其他都 10 種，看第 5、6 組的按照長短的順序，從長排到短，分別是橘色 10 公分，藍色 9 公分，褐色 8 公分，黑色 7 公分，深綠色 6 公分，黃色 5 公分，紫色 4 公分，淺綠 3 公分，紅色 2 公分，白色 1 公分。最長的是

25 學生：橘色

26 老師：最短的是

27 學生：白色

數學教練教學建議 4：數學教具實作，建立數學概念

在班上，老師使用的教具是古氏積木。古氏積木以顏色來區分長度。在班上每一組都有一盒，每一盒中有白色積木 60 顆，其它顏色積木各 12 個。在教具的使用中，啟發學生了解每一種顏色的積木有幾公分，而實際用尺量與用眼睛看是不同的。這一活動看似簡單，其實又出現了一些學生的爭執，詳述如下。

28 老師：為什麼第三組比別人多 1 公分？

29 學生：因為他們從 1 開始量

30 老師：我們看尺是從哪裡開始？

31 學生：0

32 學生：我媽媽說從 1 開始算。

33 老師：你媽媽說的沒錯，數數和測量是不同的。(劃一條橫線)你看尺前面沒有東西，後面走多長就寫多長；數數的開始一定是 1 才能數下去。

數學教練教學建議 5：協助解決課程矛盾問題，引導探究

雖然是一個很簡單的操作活動，但是有些同學是從 0 開始，而有些同學從 1 開始，而產生了矛盾。當老師碰到了矛盾現象，需請同學解釋他們如何得到這個答案，當清楚了以後，老師可以做出解釋。從老師的解釋中可以看出，要從零開始量 是正確的步驟，可能在其它學校有很多二年級學生也犯了從 1 開始數的問題，要如何化解這樣的矛盾，老師需多花時間來設計教學。而學生要從 1 開始的概念，而可能源自於數數從 1 開始的觀念，所以在第 1 冊第 1 單元，是否要從 0 開始介紹，是應該要思考的方向。(以下略)

伍、結論

以下可分為教學的省思與數學教練的省思兩部分。

一、教學省思

學生經過實測，知道自己手指的確實長度，下課後紛紛以實測數據比較手掌的大小，引發我的想法：其實應該在這堂課和學生討論「數據」的觀念，明白「理性思考」的要項是「有正確的數據」，而不是「想當然爾」。其實學生已從課後討論中發現測量的優點，他們現在不僅發現同學間的手掌都不一樣大，而且可以說出到底差多少的具體數據，事實上，在課後的很多學習，往往是老師忽略的，這也就是現行的課程標準有可能低估學生學習能力的�原因。學生可從個別差異發現公制單位的重要，而不是使用講述的方式，強迫學生要接受公制概念，這在學生學習的主動性產生很大的反差。

二、數學教練的省思

如 Felux 與 Snowdy (2006)所述，數學教練所需協助的面向有教師的教學觀念、教師的教學方法、教師的教學語言、教師的課程設計、學生的觀念釐清與學生答案的深究。

所以本研究在進行數學教練的協助，可分為一課程設計，二為教師應用合作學習法，三為協助教師在數學概念上的建立，四為教師的教學語言，五為引導學生進行答案的探究，最後就是依教師的人格特質進行協助。而此部分並未於 Felux 與 Snowdy (2006)的研究提及。

其實從數學教練的角度，改變人格特質是最為困難的部分，例如所參與協同的現場教師，已有 30 年的教學年資，在很多在數學教學的想法上會陷入教學迷思，往往進行教學後，不知不覺會陷入教學的矛盾，會產生教學迷思。這時，數學教練需巧妙地介入，協助教師進行個人的教學成長，以協助教學者在教學上產生自信。

參考文獻

周玉真譯 (1999)。如何進行教室觀察 (原作者：Wragg, E.C.)。台北：五南。

張新仁（主編）（2019）。*分組合作學習：自發、互動、共好的實踐*。教育部國民及學前教育署。

蔡清田（2010）。*教育行動研究*。台北：五南。

Center for Cognitive Coaching (2009). Overview of cognitive coaching. Retrieved September 14, 2007, from <http://www.cognitivecoaching.com/overview>.

Felux, C., & Snowdy, P. (Eds.). (2006). *The math coach field guide: Charting your course*. Sausalito, CA: Math Solutions.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2010). Cooperative learning and conflict resolution: Essential 21st century skills. In J. Bellanca & R. Brandt (Eds.), *21st century skills: Rethinking how students learn* (pp. 201-220). Solution Press.

Knight, J. (2004). *What instructional coaching*. Retrieved August 21, 2008, from <http://www.instructionalcoach.org/about.html>.

Knight, J. (2006, April). Instructional coaching: Eight factors for realizing better classroom teaching through support, feedback and intensive, individualized professional learning. *The School Administrator*. Retrieved November 18, 2009, <http://www.aasa.org/SchoolAdministratorArticle.aspx?id=9584>.

Knight, J. (2007). *Instructional coaching: A partnership approach to improving instruction*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Koh, S., & Neuman, S. B. (2006). *Exemplary elements of coaching*. Ann Arbor: University of Michigan Research Oaks, CA: Corwin.

Schul, J. E. (2011). *Revisiting an old friend: The practice and promise of cooperative learning for the twenty-first century*. *The Social Studies*, 102(2), 88-93. <http://doi.org/10.1080/00377996.2010.509370>

Slavin, R. E. (2010). Co-operative learning: What makes group-work work? In H. Dumont, D. Istance, & F. Benavides (Eds.), *The nature of learning: Using research to inspire practice. Organisation for Economic Co-operation and Development*. <http://doi.org/10.1787/9789264086487-9-en>

Spark, D. (1990). Cognitive coaching: An interview with Robert Garmston. *Journal of Staff Development*, 11(2), 12-15.

Silicon Valley Mathematics Initiative (SVMI). (2007). *Pedagogical content coaching*. Retrieved October 15, 2007, from <http://www.noycefdn.org/documents/math/PedagogicalContentCoaching.pdf>.

West, L., & Staub, F. C. (2003). *Content-focused coaching: Transforming mathematics lessons*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Woleck, K. R. (2009). *Moments in mathematics coaching*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

The Study of Mathematics Coaching with Cooperative learning Approach-An Example of Length Concept in 2nd graders

Hsieh, Ju-Shan

Teacher Education Center, National Taiwan University of Arts

Abstract

The aim of the current study is to apply mathematics coaching to help in-service teachers in primary school to utilize the cooperative learning approach. Mathematics coaching is to assist teachers to improve their instruction to foster students' learning. Due to lacking of the empirical research in mathematics coach in Taiwan, the analysis apply the model of mathematics coaching with cooperative learning to explore the length concept in 2nd grade level. Both the classroom-observation and the action research methodologies were adopted. The full instruction was videotaped to reveal the dialog between teacher and students.

The design of the curriculum is the concept of length. Teacher adopted the story from the book of "the classic of mountains and seas" to describe the giants in Dragon Country to lead students' learning motivation. Later, teacher continue the activity of development to estimate the length and use finger to measure the length of table. Although teacher met some problems, the instruction was completed by the support of mathematics coaching.

Six aspects can be demonstrated from the expertise of mathematics coaching. First is the design of curriculum. Secondly, mathematics coaching help teacher to implement cooperative learning approach. Thirdly, mathematics coaching improve instructor in the concept of mathematics profession. Fourthly, mathematics coaching assist teacher to enhance their instruction language. Fifthly, mathematics coaching promote students to explore problems. Finally, mathematics coaching need to take proper language to change teacher based upon their personality traits.

Key Words: mathematics coaching, cooperative learning, the concept of length

數學素養導向下的數學核心與本質數學關聯性探究

蔡育知

國立臺灣大學應用力學研究所 ugeesana@gmail.com

摘要

我國推動素養導向課程已歷數年，其中各領域核心素養更是課程內容的核心，為能有效協助教師釐清數學多版本課程規劃的意義，並嘗試解決多版本跨考評量的問題，以討論法、文獻探究法與分析法進行數學核心與本質數學等關聯討論之基礎研究，達成(一)釐清數學核心、核心數學、本質數學與數學本質等概念意義；(二)架構本質數學於數學(領域)核心的轉化及其對應關係；(三)提出本質數學與(共同)核心數學一致下呈現的素養課程觀點之研究目的，相關關聯結構之提出，以及對我國後期中等教育階段數學課程數學核心之對應，除協助教學現場數學教師更清楚核心課程的基礎關聯性外，亦可應用於考招制度的提出建議，提供現場教師參考。

關鍵字：核心素養、數學核心、本質數學、後期中等學校

壹、緒論

在素養(competence 或 literacy)教學倡議下，國民教育課程綱要經歷諸多變動，包含自 2013 年成立課綱研修小組；2014 年 11 月發布課程綱要；2018 年各領域課綱陸續發布；於 2019 年逐年實施後；歷 2021 年 2 月修正後，仍持續更修中。當中高級中等教育(含五專前三年)，區分為高級中普通型高級中等學校、技術型高級中等學校、綜合型高級中等學校、單科型高級中等學校四種不同類型，數學領域課程綱要更區分普通型高級中等學校、技術型高級中等學校、綜合型高級中等學校三類型分別制定。

其中高級中等學校課程綱要數學領域的制訂，亦為素養教學倡議下，將不同類型高級中等學校區分不同就學傾向，分別不同類型的數學學習軌道進行。其中普通型高級中等學校大致區分成「數學 A→數學甲」、「數學 A→數學乙」、「數學 B→數學乙」或「數學 B」，技術型高級中等學校則傾向以群科屬性為背景，區分為「數學 A 版本」、「數學 B 版本」與「數學 C 版本」，綜合型高級中等學校則列出學習重點與數學核心素養提供教師教材設計參考。唯上述各類型高級中等學校(含五專前三年)，不論是何類型高中，均以後期中等教育共同核

心課程指引是為核心課程之基準。

面對上述課程教學型態的變革，以及各類不同學習軌道的數學課程，數學教師不僅需備妥素養教學的設計課程能力，並明瞭與過往課程之差異外。在教學現場更往往須面對同一年齡層學生，卻須預備不同數學課程內容，不同數學類別應用的多版本授課模式。此外，當班級有學生想於大專以上入學考試選擇雙邊跨轉升學時，往往發現由於大專以上入學測驗考招制度依據課程綱要數學學習內容命題並制定考試，故相關測驗在課程綱要數學領域訂定課程分成多種版本下，數學測驗範圍亦以各版本區分。因而使得想雙邊跨轉考試的學子，在面對高級中等階段的數學測驗時，往往較其他學科費更多次數且多時進行同是數學測驗的測驗，呈現單一數學科目考多次數學之多工情形以及困擾，此些相關問題往往一時難以清楚答覆。

為了能有效掌握上述素養教學多變的情形，教學現場教師傾向將焦點轉而放在能掌握數學核心及方法，並從本質出發，希冀能透過數學核心及方法的妥善掌握，能以本質核心因應萬變。此外，測驗工作者除希望能從核心命題外，亦希望能傾向一致性的考試進一步延伸解決大學入學考試數學考試的困擾。然由於各高級中等學校階段數學課程綱要所指稱核心數學，於意義上或價值上有其差異性，故若能從本質上有效的釐清各高級中等學校階段間核心數學的意義內涵、邊界以及其含括關係，將有助於我們對於核心數學有更清楚的認識。因而筆者引入本質數學的概念，並探討核心數學與本質數學的關聯，促進當中的理解，進而推及應用，以下會對此有進一步說明。

貳、研究動機與目的

本文即在國內的素養教學環境氛圍下，試圖釐清素養教學之核心數學，並嘗試從理解不同類型高級中等學校核心數學意義下，探求本質數學於其中所扮演的角色以及意義，希望能透過本文發現核心素養下的數學核心與核心數學，並建立本質性的關聯，進而提出有助於目前教育現場現象問題的解決之方。

一、研究動機與背景

究核心素養在課程綱要的轉化及其與學習重點的對應關係如圖 1，而根據後期中等教育共同核心課程指引之規劃，其定位相應於提供各領域核心素養對應之具體核心課程，唯實務上呈顯複雜的情形下，若能從基礎面更清楚環境政策所提的核心素養、科目核心，以及其之於學科本質的切入點與關聯，將更能適切處理當中的導致紛雜的元素，有助於數學教師在面對不同類型數學教材時的自我定位，進而從核心提出專科以上學校入學考招時的共同解套，使目前單一科目於考招時是以多工進行的情形有進一步改善。

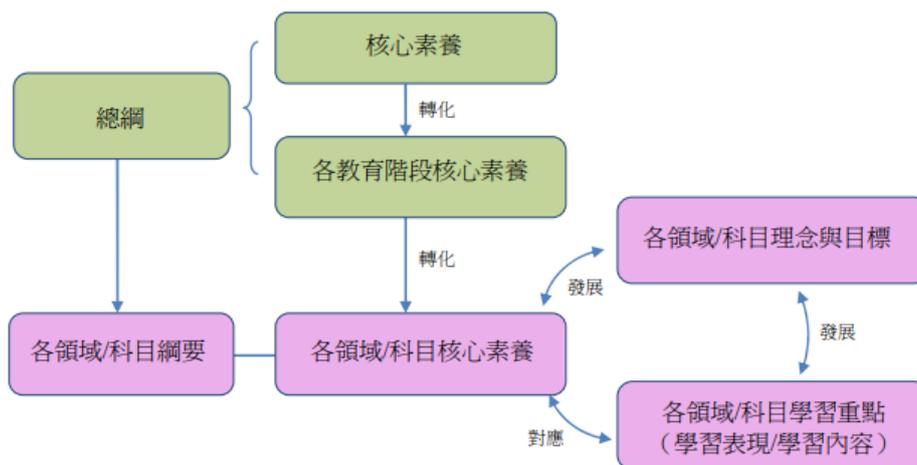


圖 1 核心素養在課程綱要的轉化及其與學習重點的對應關係(教育部，2014)

因此界定本文為數學教育之基礎研究，為探求數學科目核心與本質目的而進行，在學科素養導向教學倡議的環境中，試圖於相對複雜的現象提出簡易的辨析法，故嘗試從形而上概念意義釐析的視角，以意義釐析切分後建立關聯架構(參圖 3)，所整理之研究目的概述如下。

二、研究目的

本研究為領域核心素養相關之本質性探究，為在素養課程導向的環境背景，透過討論法及文獻分析法等探求與數學核心相關之關聯性研究，為達到以下研究目的：

- (一)釐清數學核心、核心數學、本質數學與數學本質等概念意義；
- (二)架構本質數學於數學(領域)核心的轉化及其對應關係；
- (三)提出本質數學與(共同)核心數學一致下呈現的素養課程觀點。

透過上述研究目中，數學領域核心部分可參考圖 1 所示，為各領域核心素養範疇，影響課程內容及課程設計甚鉅。故希冀透過上述研究目的的達成，本文得有助於協助教師釐清並面對當前領域教學環境中關於數學核心所述之意義，進而得素養教學現況中，能更適切的掌握領域核心素養概念，進而得切合本質的提出根本性的解決策略。

叁、重要概念詮釋

「核心數學」(Core Mathematics)是指在數學學科素養養成的教育過程中，學生必須學習的基本概念和技能，它是學生掌握和應用數學知識的基礎，也是進一步學習高等數學和應用數學的必要前提。常見的核心數學，概念內容包含基本算術、代數、幾何、數論、微積分、線性代數等，學生需要在這些概念上建立扎實基礎。而「數學核心」(Mathematical Core)則是指學科中於數學工具的核心內容，以群科專業所提的數學核心，為群科專業所運用到之主要數學方

法、工具或技術，相關包括比例、測量、排列、統計、矩陣數值、微分方程、小波等，對於幫助學子掌握並應用數學於現象中至關重要。而若論及於數學專業學科所指稱之數學核心，則即數學學科內的核心的基本理論和概念，此部分於建立數學基礎至關重要。以微積分學科為例，微積分基本定理即為核心數學。

此外，數學本體實在論的觀點中，數學對象的存在具有獨立的客觀存在性，而可客觀探討其本質與價值。一般而言，「數學本質」(Mathematical Essence)泛是指數學的基本本質和精神，呈現數學學科的本質特徵和核心價值，所關注的是數學的普遍原理和方法論，例如數學的邏輯和證明方法，以及對模式和結構的抽象和推理等。而「本質數學」(Essential Mathematics)則延續數學本質內容的討論，指呈現數學本質特徵與精神的數學核心概念和原理，作為數學基礎並可架構出數學的骨架，包括數論、代數、幾何、解析學等。此外，為能符合為公眾公益並符合本研究動機與目的，在此本文必要初步排除相對性個人觀點，以人性本質出發所需基本數學的「本質數學」說法，必要以數學本體實在觀點。

一、課程總綱中的核心素養

核心素養是指一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。素養一詞，主要係指 *competence* 與 *literacy* 之意涵，是一種能夠成功地回應個人或社會的生活需求，包括使用知識、認知與技能的能力，以及態度、情意、價值與動機等；且核心素養的內涵涉及一個成功的生活與功能健全社會對人的期望。(教育部，無日期)

根據上述英文字面意含，十二年國民教育課程總綱所述之素養教學，意義上以「能力」及「脈絡下的認識閱讀與對話」教學為導向，亦即能力導向之教學，著重於知識、態度及能力的培養。此外，總綱明列「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」三大核心素養面向，並從「心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與美感素養」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」、「多元文化與國際理解」九項目(教育部，2021)，從核心素養具體的內容與行動可看出，總綱之素養有別於傳統素養所指「基本內在涵養修為」的內涵界定，而以知識、能力、談話之於核心面向之建立。其中數學素養則取 *literacy* 之意涵，素養教學著重於知識面向中建構其讀說寫之能力。相對於過往課程設計從認知、情意與技能三方面之最大區別，可看出為脈絡文化性對話之興起，而情意精神的傾向弱化。

二、數學領域素養與數學核心下之核心數學差異

基於上述意義所提數學素養下的核心數學，為建立在脈絡之下的工具使用，故分別就其社會常模下，提取所需用到的數學工具，而就不同的社會模態屬性，考量會對應不同的核心數學內容，此部分以技術型高級中等學校依群科屬性區分為數學 A 版本、數學 B 版本與數學 C 版本為代表。以園藝景觀科學生與電機工程科學生為例，園藝景觀科學生適用於數學 B 之數學課程，而電機工

程科學生則適用數學 C 之數學課程。然此觀點下所取之多忽略社會模態的成長變動性，除框限社會因而限縮數學內容外，並弱化數學的主體可能影響社會之層面。

而從另一數學核心的觀點所取出之核心數學內容，則以學科內容本質為基礎，考量認知學習階段及邏輯性，將於環境會應用到的數學工具，及數學學科知識囊括後，提取該數學知識的核心概念，再根據不同學習階段認知所能學習，權衡該內容於數學知識建構的基礎性及重要性後，以邏輯性的編序學習次序，亦參採過往知識建構歷程進行。這部分的課程可參考國民中小學數學領域課程各階段內容，以及普通型高級中等學校課程綱要數學領域，可看到普通型高級中等學校學生於 10 年級學習數學完成後，以不同認知情形分授數學 A 或數學 B 課程。唯此觀點多忽略數學學科外所需數學工具的基礎數學內容，亦忽略學習過程於個別學生往往有相當多認知以外的變因，因而往往於執行上會有相當多個別性的於個別不適用，此外在實用性以及能適切銜接性上，往往有諸多未能顧及的情形。

三、本質數學為本之核心數學

若回到數學本質內涵，基於數學學科存在的事實說明數學本質的已存在狀態。姑且不論數學的特徵，必然存在可稱為本質數學的基礎內涵，可作為建構數學的基礎。亦即，具備所有本質數學的內容可生成各數學分支，並理解相關應用。本質數學內容不僅可作為如數論、代數、幾何、解析學等系理基礎，應用層面的數學亦從本質數學生成。因此，不論特定社會模式下所需的數學，或數學學科內容本質所需的數學，定存在本質數學內容是該核心數學的基礎，亦可稱其為核心數學之核心內容。

例如澳大利亞課程的基本數學核心(Essential Mathematics Core)於高級中等學校階段；或如我國的國民教育課程。由於我國國民中小學國民教育階段乃義務教育階段，在當中的數學知識內容均扮演著奠定每位國民未來數學涵養基礎角色的立場上，國民中小學教育階段數學授課內容以本質數學為主，以能於生活自然使用，或於各專業方面作為基礎知識，而能有效進一步學習加深加廣或應用延伸。

肆、研究方法與關連

一、研究方法

本研究以現象問題解決為目標，基於課程概念的釐清為目的希望探求本質意義，故屬於為學科教學的基礎研究，主要探討領域核心素養相關之本質性概念、意義，以及其關聯的情形，故不採取實驗研究，而是基於理解立場，採用討論法、文獻探究法、課程內容或邊界分析法等方式進行本探究。當中關於關聯結構建立之部分，搭配連結於我國數學領域課程綱要，以協助更清楚看到其與現象之關聯且務實於現象。而為能有效應用於我們所關注的現象，如學生於

大專以上入學測驗考招及教師課程設計多變問題，以下說明以高級中等教育階段課程綱要數學領域內容為主要對象示例，方便理解關聯結構於實際課程之對應情形，促進進一步應用於我們所關注的現象問題。

二、核心與本質數學的關聯及應用

延續蔡育知(2021)於臺灣高中(職)數學課程各版本數學與後期中等共同核心數學課程的關聯(如圖 2)相關說明，本文進一步以後期中等共同核心數學課程為本質數學出發的立場，提出本文關聯對照(如圖 3)。圖中所述「核心數學」、「數學核心」、「本質數學」等概念之說明，可參考第叁章重要概念詮釋之完整敘述。

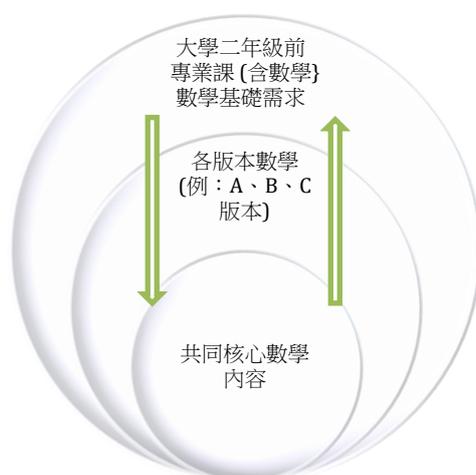


圖 2、各版本數學與共同核心數學之關係圖(蔡育知，2021)

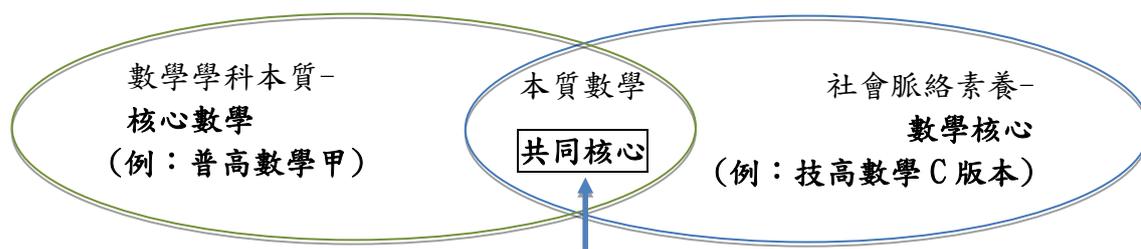


圖 3、數學核心與本質數學關聯圖

在本質數學與共同核心數學若能達一致性，且其內容概念必要具可代表性的情形下，教育現場面對我們所看到的現象問題，如前述學生希望於大專以上入學測驗考招時可參與不同類別系所的選擇的狀況時，考試單位除將不同群科的數學考試時間錯開的作為外，若希望相關數學入學測驗考試能適切評量，且學生所經歷的考試內容重疊性以及同工操作重複耗時情形不要有，亦可考慮改

以共同核心命題的基礎試卷，配搭加考類別輔考試卷，亦即不同學習路徑或不同群科所需之數學，輔考測驗內容的選取可參考表 1。表左欄呈現園藝景觀科所習數學 B 之數學課程內容當扣除掉共同核心課程重疊之部分，中間欄位表電機工程科學習數學 C，扣除掉共同核心課程重疊之部分，右方欄位則呈現若園藝景觀科學生跨轉電機工程科的數學所需的數學銜接補強差異單元。

表 1：跨科學習課程差異表(Tsai, Yu-Jr 與 Li, Shao-Ying, 2021)

數學 B 版 扣除共同核心	數學 C 版 扣除共同核心	數學 C 版與數學 B 版 差異單元
函數圖形	函數圖形	空間向量
平面向量	平面與空間	(三角函數的應用)
圓與直線	圓與直線	一次聯立方程式
數列與級數	數列與級數	矩陣
方程式	三角函數的應用	線性規劃
二元一次不等式	方程式	二次曲線
三角函數的應用	一次聯立方程式	微分
	矩陣	積分
	二元一次不等式	
	線性規劃	
	二次曲線	
	微分	
	積分	

輔考試卷之數學內容範圍，可參考上表於各版本的含括關係概念做法，作為不同學習路徑或不同群科屬性命題範圍之參考。唯上表 1 所呈現的結果，從差異單元亦發現我國數學課程，會呈現如數學 C 課程可包含數學 B 課程、數學 B 課程可包含數學 A 課程之現象，然若單純從人經歷不同社會脈絡所需數學工具角度出發，其所需具備之數學核心多以人類環境及專業群科區別，在不具認知階層性下，完全包含現象並不易發生，顯示各版本數學教材有再細緻處理之空間。

伍、研究結果及應用

本論述以討論法、文獻探究法與分析法等方式對於素養導向之核心數學課程進行名詞釋義的本質性探究，希冀達成(一)釐清數學核心、核心數學、本質數學與數學本質等概念意義；(二)架構本質數學於數學(領域)核心的轉化及其對應關係；(三)提出本質數學與(共同)核心數學一致下呈現的素養課程觀點。希望能從本質的更清楚運用於教育現場，而能對教育現場之現象提出較佳的解決策略。從第三章重要概念詮釋段落，以及與數學核心與本質數學關聯圖(參圖 3)，是可於概念結構上詮釋數學核心的關聯性，透過適度抽象的形而上本質性探討可釐析目前我國數學核心概念及其對應關係，唯對於數學本質是否基於邏輯是

否有情意等精神性之發現，而可作為課程進行時的情意基礎根基，為尚待開發的議題。

當中本質數學與(共同)核心數學一致的情形，則恰如我國於後期中等教育共同核心數學課程當初設計之架構，相關不僅可作為數學學科領域專門基礎，且亦於各專門領域所需之數學工具應用層面亦適用於本質數學生成，唯我國後期中等共同核心數學課程之內容，是否於具各學習路徑且於各群科類別均具相對代表性，且當中每個概念亦具本質數學特性則是目前有待討論的議題。而數學核心以此結構立基角度出發，不僅有助於教師在素養課程推動下，著重數學核心與核心數學發展課程免於混亂外，亦可運用於專科以上學校考招入學共同命題部分以基礎試卷，並加考輔考試卷的模式進行，測驗內容的選取可參考第四章段落所述(如表 1)。而透過核心數學、數學核心、本質數學與數學本質的意義釐析與詮釋與對話，除對課程本質構念，並相對對不同類型高中數學課程綱要相對清楚認識與共同核心之關聯外，於課程本質特性的討論過程，亦額外發現素養課程的推動相對於過往課程設計，在課程設計的情意性這方面是有差異的，因而教師可針對此部分的優缺點，在領域課程精神情意建立的加添課方面補強考慮增刪作為輔助，提供現場教師及相關測驗評量者參考。

參考文獻

- 教育部(2004)。後期中等教育共同核心課程指引。2023 年 4 月 4 日，取自 <https://edu.law.moe.gov.tw/LawContent.aspx?id=GL000165>
- 教育部(2021)。十二年國民基本教育課程綱要-總綱(民 110 年 2 月修正版)。民 112 年 4 月 4 日，取自 <https://cirn.moe.edu.tw/Upload/Website/11/WebContent/35923/RFile/35923/96147.pdf>
- 教育部(無日期)。十二年國民基本教育領域/科目課程綱要。2023 年 4 月 4 日，取自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>
- 教育部(無日期)。十二年國民基本教育課程綱要問答集。教育部國民中小學課程與教學資源整合平臺。2023 年 4 月 5 日，取自 <https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=11&mid=1821>
- 國家教育研究院(2014)。十二年國民基本教育課程發展指引。2023 年 4 月 5 日，取自 <https://ws.moe.edu.tw/001/Upload/23/refile/8006/51083/c1f743ce-c5e2-43c6-8279-9cc1ae8b1352.pdf>
- 蔡育知(2021)。從 STEAM 跨科觀點初探臺灣高中(職)數學課程。2021 第三十七屆科學教育國際研討會。中華民國科學教育學會與國立彰化師範大學科學教育研究所。彰化：國立彰化師範大學。
- Tsai, Yu-Jr* and Li, Shao-Ying (2021). Mathematical curriculums for five-year junior college programs in Taiwan. *The 14th International Congress on Mathematical Education*. The International Congress on Mathematical Education and East China Normal University, School of Mathematical Sciences. Shanghai: East

2023 年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集
*2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th International
Conference on Technology and Mathematics Education*
China Normal University.

Exploring the Relationship between Mathematical Core and Essential Mathematics in a Mathematical Literacy-based Context

Yu-Jr Tsai¹

¹ Institute of Applied Mechanics, National Taiwan University

Abstract

Literacy-based curricula have been promoted in Taiwan for several years, and the core competencies in various domains have become a central focus of the curriculum. To effectively help teachers understand the meaning of multi-version mathematics curriculum planning and to address the problem of multiple-version cross-examination assessment, this study used legal research, literature review, and analysis to explore the relationship between core mathematics and essential mathematics. The objectives of this study were: (1) to clarify the concepts of mathematical core, core mathematics, essential mathematics, and mathematical essence; (2) to establish the transformation of essential mathematics to the mathematical core and its corresponding relationships; and (3) to propose a research objective that presents the view of literacy-based curricula under the consistency of essential mathematics and core mathematics, as well as the related structural connections, and the correspondence between essential mathematics and the mathematical core in upper secondary education mathematics curricula. This study not only helps mathematics teachers understand the fundamental interrelationships between the core curriculum but also provides suggestions for improving the examination and admission systems.

Key words: Core literacy, mathematical core, essential mathematics, upper-secondary education

素養導向評量

應用真實評量於國小學生統計概念

謝如山

國立臺灣藝術大學師資培育中心 t0336@ntua.edu.tw

摘要

因應 108 年數學素養國家政策，本研究目的為依數學素養導向，即以真實評量以探究國小學生在統計概念的表現。真實評量的優勢在於與生活結合的真實性。參與者為桃園縣某國小四至六年級學生，四年級有 93 位，五年級有 95 位，六年級有 95 位學生參與，共有 283 位學生。質化方法依評分標準的四等分制進行學生解題策略分析。四年級與六年級學生，於統計圖表的表現近似。從研究結果發現，教師僅需使用適當的教學策略，學生於四年級進行統計圖表的學習是適當的，不需延至高年級學習。本研究建議有教師應將真實的生活情境帶入數學課程，以落實數學素養的學習趨勢；其次，可使用多重計分的標準可釐清學生的認知學習概念，可看到學生多元解題的策略。

關鍵字：真實評量、統計概念、數學素養

一、研究目的

本研究目的為探究國民小學四至六年級學生，在真實評量於統計概念的學習成效，是否會因年級不同而有不同的表現？

貳、文獻探討

一、真實評量的相關研究

Wiggins (1998) 對真實評量定義了一些指標。首先，真實評量需有真實性的特色；其二，需要學生來「做」這個主題；第三，其他人可以複製或模擬來進行測驗；第四，對於一個複雜的問題，能有效的評量學生多方面的技巧；最後，學生能從教學或課程中，有更好的練習或學習機會。

真實評量是一種新的評量方法 (Hodgman, 2014)，真實評量可有不同的評量面向，如撰寫紀錄、檔案評量，觀察方法或是活動的方式來進行 (Mundia, 2020; Sasmaz-Oren & Ormanci, 2011)。重要的是，真實評量是真實發生在生活的情境，情境具有挑戰性，也會更有難度，每個活動也會互相關聯，可依此來發展出測驗與活動 (Martin et al., 2016; Olfos & Zulantay, 2007)。

國內對於真實評量的應用，有從科技面來探討真實評量的應用(陳立庭，2017)與幼兒園的教學評量 (張靜文，2012)。

真實評量有三個主要的特性 (Palm, 2008)。第一就是過程與結果。真實評量可以看到認知的歷程，學生如何建構知識、歷程的展現與成果的產出；有些教師認為結果很重要，有些則認為過程與結果一樣重要；而真實評量重視的是歷程與結果，學生所專注的解題歷程可將生活與學校結合，而此目標與國家的課程目標一致。第二個特性是情境，在真實的情境下學生可以進行教學活動，這些活動會在生活中發生；當課堂給予時間限制時，意味著學生在真實的生活中，可能面臨到同樣的情況，會在侷限的時間內做出決定，所以情境就是生活；在學習與教學的過程，真實評量可以促進學生有效的學習。最後，就是圖表的說明，當學生從題目中的圖表的活動說明，可以應用在學校之外的生活情境，也就是說，學生可以生活的資訊表格化，以更有效地解決問題。

二、統計概念的相關研究

統計是一種對資料的蒐集、分析、與解釋的一門技術與科學 (戴久永，1979)。譚寧君 (2000) 指出統計的學習應有以下四個步驟：

1. 資料蒐集：即是對群體資料的再組織，群體的蒐集可由小群體到大群體；可由單純的群體到複雜的群體。
2. 整理資料：直接透過觀察、調查、實驗或記錄而得到的資料稱之為原始資料，此時資料往往只能代表事實存在的現象，故應將原始資料分類、歸納、

整理或重組以形成更經濟且有效的資料。

3. 表徵資料：資料的表徵方式是一種溝通工具，其呈現方式的適切與否直接關係到訊息是否暢通。一般的表徵方式為將資料簡化、整理成表格或圖像。

4. 解釋資料：群體被掌握或確認後，其所代表的訊息便透過資料的分析，予以適當傳遞，故群體的內容物，透過分數、比較、找出資料類型或計算等方法，以了解資料的分佈情形，最後與統計圖形或表格相互連結，並解釋資料所傳達的訊息。

教育部（2018，p7）在統計課程的學習，明訂「所有學生都應能運用基本統計量描述資料，能運用機率與統計的原理，推論不確定性的程度；選修數學甲、數學乙的學生能進一步理解隨機變數的分布，其中數學甲的學生更要理解幾何分布。」由此可見統計的課程於學生在選擇大學相關科系的重要。

其實，在臺灣推動統計素養課程前，Gal（2000）提出具有統計素養的國民，亦會有正向的態度和信念，可用較生活化的角度和信念去評價官方的數據資訊。統計素養可廣泛地視為人們解釋和嚴謹計算統計資訊、資料關係或隨機現象的能力。

參、研究方法

以下依研究對象、研究工具、評分標準與統計方法分別論述。

一、研究對象

本研究從桃園縣某國小取樣 4、5 與 6 年級，每一年級有三個班級參與施測，四年級有 92 位，五年級有 95 位，六年級有 95 位。

二、研究工具

依真實評量的特性，測驗編制以生活結合的方向進行設計。數感測驗題為檢視學生的數與計算的概念，要求學生能正確的進行加減法計算。對應之數學指標為「D2-2 能將分類資料整理成長條圖，並抽取長條圖中有意義的資訊加以解讀。」（教育部，2018）。研究者所編製的統計概念題型如下：

柯南做了一份學生飯後水果調查，他問學生：「你們飯後比較喜歡吃香蕉、百香果還是芭樂？」

（一）、你覺得柯南的問題是否恰當？請說明你贊成或否定的理由？

（二）、請問男女生分別最喜歡吃哪一種水果？哪一種水果最受全班學生的歡迎？

（三）、柯南記錄下統計的結果，如表格所示，請根據柯南的統計數據，幫他製作一個簡單易懂的調查統計圖。

（四）、請依照這個統計圖，設計出一個數學問題來問同學

三、評分標準

本研究自行設計真實評量試題，三個子題的設計分別為應用、分析、評鑑與創造等向度。題目設計三個子題，每一題組以 4 分制進行評分，最高為 4 分，最低為 1 分，以進行設計。得 4 分者完全正確，3 分者為少部份錯誤，2 分等級者為部份正確，1 分者為完全錯誤，評分標準如表 1。

表 1 評分標準

分數	評分指標
4	完全正確、清楚 能使用適當的策略與步驟來完成解題 能展現出學生有清楚的概念與解題的邏輯 學生的解釋很清楚 學生能使用圖像或其它方式來表達解題的過程 能正確與合理的回答三個子題問題
3	部份正確、清楚 某些問題能清楚的回答，但並不完整 學生在某些概念是很清楚的，但並不是完全清楚 有些學生的解釋很清楚，但需再多些解釋才會更加完整 學生的圖像或是其它的表現方式，對解題並未有明顯的幫助 有些答案是正確的，但有些答案是錯誤的
2	少數正確、清楚 有些解題的過程省略或是不正確，僅有少部份的答案是正確的 少量的證據顯示學生了解這些概念和步驟 學生的解釋和表現很難理解，有些解題的過程需再多做說明 學生的圖像或是其它的表現方式，對解題可能無關 大多的答案都是不正確的
1	不正確，不完整、不清楚 所有的問題都是錯誤的 學生並未了解關鍵的數學概念 學生的解題策略與方法令人無法理解 學生的圖像或是其它的表現方式，對解題無關 所有的答案都是不正確的

四、研究結果

以下為各子題的結果分析：

(一)、你覺得柯南的問題是否恰當?請說明你贊成或否定的理由?

於本子題的目的是要檢視學生是否對於本題目的邏輯題出問題，不論是贊同或反對均可。可看出四年級學生的表現與五、六年級的表現相當，每班均有約 20 人以上同學答對。於此可看出，班級同學對於邏輯批判的題型均有能力回答。於贊成者的理由與反對者之理由，請參表 8。

表 8 聰明的柯南第一子題的解題策略分析

年級班別 答題分布	四年級			五年級			六年級		
	409	410	411	501	502	505	602	603	610
答對者(贊成與反對者)	24	24	23	25	21	16	23	20	26
贊成且回答得有道理 合邏輯 (贊成總數)	(17)	(11)	(16)	(17)	(15)	(11)	(12)	(11)	(17)
1.可以尊重到每個人 不同選擇	1	1	6	2	3		3	1	1
2.可以讓水果不會被 丟掉			1						1
3.可以知道他們到底 有沒有吃水果			2						
4 因為飯後吃水果很 健康	1	5	6			3		2	2
5 因為我不喜歡飯前 吃水果			1						
6 可以知道每班每人 喜歡吃的水果	13	4		10	5	4	2	4	2
7.少數服從多數	1								
8.因為班上同學是奇 數,一定會有最後一 個人來當最後一票	1								
9.可以看學生喜歡吃 的和老師不一樣				1					
10 可以在特別節日 送他喜歡的水果				1					
11.以後就知道水果 怎麼分				1					
12 可以讓大家愛吃				2	3				

水果									
13 可以讓學生開心					2				
14 這樣才知道要給學生吃什麼					1				
反對且回答得有道理 合邏輯 (反對總數)	(7)	(13)	(7)	(8)	(6)	(5)	(11)	(9)	(9)
合計人數	32	30	31	31	32	32	32	31	32

(二)、請問男女生分別最喜歡吃哪一種水果?哪一種水果最受全班學生的歡迎?

於本子題，由圖表中發現答案，每班均有 20 人以上的同學答對，可看出學生在讀圖表的能力均有 60%以上，如表 9 所示。

表 9 聰明的柯南第二子題的解題策略分析

年級班別	四年級			五年級			六年級		
	409	410	411	501	502	505	602	603	610
答題分布									
全部答案都答,且都答對	24	20	21	26	27	26	30	25	28
全部都答,但部份答錯		8	1			2		1	
只有回答部份答案,但答對	7		7	3	5	2	1	1	3
只有回答部份答案,但答錯		1	1	2					1
全部答錯								1	
空白	1	1	1			2	1	3	
其它									
合計人數	32	30	31	31	32	32	32	31	32

(三)、柯南記錄下統計的結果，如表格所示，請根據柯南的統計數據，幫他製作一個簡單易懂的調查統計圖

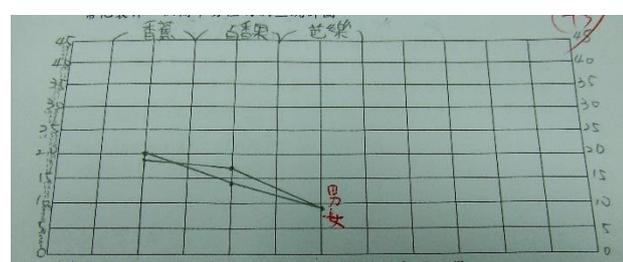
於本子題，只有四年九班與六年級的學生對於長條圖的描繪相當清楚，其它四年級班級與五年級學生均不到十位學生可以畫出折線圖。於此可看出，教師在四年九班有進行過長條圖的教學，其它學生只有在六年級有教。於此也可看出折線圖於亦可於四年級時進行，如表 10。

表 10 聰明的柯南第三子題的圖表策略分析

年級班別	四年級			五年級			六年級		
	409	410	411	501	502	505	602	603	610
答題分布									
長條圖	26	3	2	6	6	8	22	23	26

折線圖	0	0	0	1	0	0	0	1	2
使用代號作記號統計(正字)	1	1	6	2	1	1	0	0	0
使用代號作記號統計(人形.打叉 打勾 圈圈.星星)	2	0	0	2	1	3	0	0	1
使用數字統計	3	15	7	5	4	7	2	0	0
創意圖	0	0	0	3	0	0	1	0	0
錯誤類型:照抄原表	0	4	4	2	1	1	0	0	0
空白	2	7	12	10	19	12	7	7	3
合計人數	32	30	31	31	32	32	32	31	32

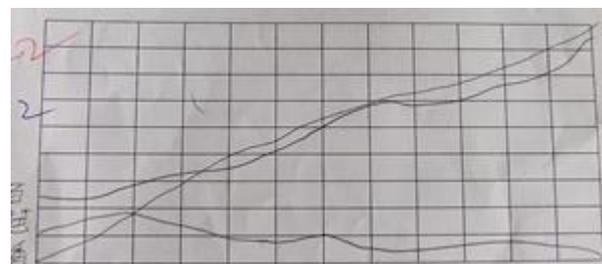
有關學生長條圖的繪製請參下列照片說明。



長條圖

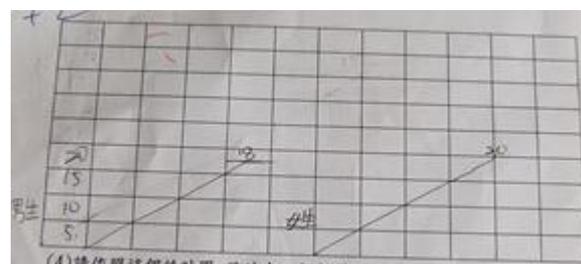


折線圖



使用代號作記號統計(正字)

創意圖



(四)、請依照這個統計圖，設計出一個數學問題來問同學

於本子題屬於創造性的學習問題，要求學生依圖表來出一個問題，學生在六年三班的表現均偏低。於四年九班、四年十班、五年一班與六年二班的表現均有十位以上學生做對，可能與班上老師的教學有關。有很多的學生空白，可

能對本子題不了解，或是不知如何作答，學生在創造的面向訓練，應要再加強。

表 11 聰明的柯南第四子題的策略分析

答題分布	年級班別			五年級			六年級		
	409	410	411	501	502	505	602	603	610
有按照題目要求出題	12	13	8	13	7	9	16	5	10
出的是數學題目但不合統計圖		2							
合統計圖但出的不是數學題目			4	3		2	1	4	1
空白	17	13	17	14		19	15	22	20
另外自己出題目	3	2	2	1	25	2			1
其它									
合計人數	32	30	31	31	32	32	32	31	32

伍、 結論

有關聰明的科南，目的要學生能覺得問題是否適當，能提出理由、判斷圖表、製作長條圖與設計問題來問同學。學生在第一子題提出很多不同的理由來贊同或反對這一問題，不論學生的理由如何，只要合理就視為正確的答案。學生能思考出不同的理由，如「因為同一種水果可能有不同口感」，「如果有人不喜歡吃最高票的水果就會把水果藏起來不吃」等等，有大約 30 種不同的原因，可以發現學生的想法其實是很多元的。在統計圖表的製作部份，四年九班學生的表現與六年級一致，可以說明老師可能已教了長條圖的繪製，或是老師運用了不同的教學方式。於此也可看出，數學內容只要能運用適當的教學方式，孩子在學習數學的內涵是可以提升的。於此，也對課本將長條圖延後至六年級的適當性，提出證據，學生可於四年級學習，而不需延到六年級。最後，要求學生由圖表來想出一個問題，有一班約半數同學都能提出，學生表現均相當優異。如學生用折線圖，用正字標記標示等，這都是相當合理的表達方式

參考文獻

- 林永豐（2018）。素養導向教學設計的要領。輯於周淑卿、吳璧純、林永豐、張景媛、陳美如（編），**素養導向教學設計參考手冊**，1-4。臺北市：教育部。
- 周淑卿、吳璧純、林永豐、張景媛、陳美如（2018）。**素養導向教學設計參考手冊**。臺北市：教育部。
- 洪詠善、范信賢（主編）（2015）。**同行～走進十二年國民基本教育課程綱要總綱**。新北市：國家教育研究院。

陳立庭 (2017)。科技教育的真實評量-以篩選裝置為例。 科技與人力教育季刊，3 (3)，20-39。

張靜文 (2012)。從真實評量觀點看幼兒園之教學評量。 台灣教育評論月刊，1(11)，12-14。

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中學：**數學領域**。臺北市：教育部。

游自達 (2019)。素養導向教學的實踐：深化學習的開展。 臺灣教育評論月刊，8

戴久永 (1979)。現代統計學的發展。 數學傳播，3。45-54。

譚寧君 (2000)。國民中小學新課程統計圖表教材分析。 國民小學數學科新數學概說 (低年級)。臺北：臺灣省國民學校教師研習會。

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Hodgman, M. R. (2014). Using authentic assessments to better facilitate teaching and learning: The case for student portfolios. *Journal of Studies in Education*, 4(3), 59 – 65. <https://doi.org/10.5296/jse.v4i3.6149>

Martin, A., Arrambide, M., & Holt, C. (2016). The impact of flipped instruction on middle school mathematics achievement. *Journal of Education and Human Development*, 5(3), 84 – 96. <https://doi.org/10.15640/iehd.v5n4a10>

Mundia, L. (2020). Assessment of Skills Development in Brunei Trainee Teachers: Intervention Implications. *European Journal of Educational Research*, 9(2), 685-698.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *The principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Olfos, R., & Zulantay, H. (2007). Reliability and validity of authentic assessment in a web based course. *Educational Technology and Society*, 10(4), 156 – 173.

Palm, T. (2008). Performance Assessment and Authentic Assessment: A Conceptual Analysis of the Literature. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 13, 1-12。

Wiggins, G. (1998). *Education assessment: Designing assessments to inform and improve student performance*. San Francisco: Joey-Bass Publishers.

The Study of Authentic Assessment on the Concept of Statistics in Primary School

Hsieh, Ju-Shan

Teacher Education Center, National Taiwan University of Arts

Abstract

The aim of the study is to fulfill the authentic assessment to examine students' performance on the concept of Statistics in Primary School. Authentic assessment is a new approach of educational measurement field. The advantage is to connect with life beyond school. The application of authentic assessment is not only to design the task but also to integrate mathematics curriculum and instruction. Besides, the feature of authentic assessment is consistent with mathematics literacy based upon 12 years basic education policy. There were 92 fourth graders, 95 fifth graders, and 95 sixth graders who participant in this study from one elementary school in Taoyuan city. Researcher composed the question group and four sub-questions. The qualitative methodology was adopted to analyze solving strategies of students in different questions by the four levels of coding criteria. The results indicated that fourth graders and sixth graders show similar performance in drawing statistical graphs. The results indicated that teachers apply proper instructional strategies in fourth grade. Students can learn the concept of statistics better. It is not necessary to postpone the lessons until to fifth or sixth grade levels. Two suggestions can be referenced in this study. Firstly, teachers need to design the real life context in mathematics curriculum to prepare student's mathematics literacy. Secondly, the students implement multiple scales to clarify students cognitive learning concepts to examine their multiple solving strategies.

Key Words: mathematics literacy, authentic assessment, statistics in primary school

六年級學生體驗蒙提霍爾問題

孫國光

臺北市立大學數學系碩士生 asdf82427@gmail.com

摘要

本研究讓國小六年級學生實際體驗蒙提霍爾問題，並在過程中引導學生進行思考，鼓勵學生將想法表達出來。教學的過程分為蒙提霍爾問題體驗、學生小組討論、學生想法發表以及教師總結等四個階段。在體驗的過程中，學生能良好的參與課程；學生想法發表時，學生也願意嘗試將自己的想法表達出來；總結時，研究者透過操作並同時記錄，讓學生看到可能發生的情況，學生也能夠在研究者操作、記錄後，主動發現交換選擇會使得中獎的可能性增加。課後整理學生回饋，也能夠看到有幾位學生是以古典機率的想法來進行思考。蒙提霍爾問題在概念上較為困難，透過體驗的方式讓學生實際參與，雖然無法讓學生明確地學會機率的概念，但卻能夠讓學生感受到可能性的增加，同時也能夠引起學生的學習動機，讓學生對於數學產生好奇心。

關鍵字：蒙提霍爾問題、數學史、體驗式學習

壹、前言

十二年國教數學領域課綱納入了可能性的概念(教育部, 2018)，現行的五、六年級學生在國小階段屬於九年一貫課綱，然而這些學生到了國中所使用的是新版課綱的內容，在國小階段缺少可能性相關概念的學習，研究者思考要如何利用活動來讓學生從活動中來學習相關的概念。

剛好適逢班級有一個整體班級獎勵的機會，研究者就想到要讓學生親自體驗蒙提霍爾問題的活動，一方面對於學生的獎勵給予增強的機會，同時讓學生親身體驗曾經在美國的知名電視節目，透過活動的體驗以及後續的討論及統整，引導學生思考相關概念。

研究者有此發想後，便與相關數學教育專家進行諮詢，以確保研究者的教學實驗不會影響到學生的概念發展。與專家討論後，研究者決定讓學生以體驗的方式進行學習，在每位學生實際體驗選擇的過程後，將學生進行分組，分為認為要換、不要換以及不一定三組，給予學生時間進行討論，再讓各組學生嘗試在台上發表自己的想法，最後研究者進行統整，並再次以操作的方式引導學生發現哪一個的可能性會較大。

研究者在過程中所使用的蒙提霍爾問題模式是允許學生進行交換的，同時為了讓課程能夠更加的有互動性，研究者於課堂上擔任主持人的角色，並且為了避免研究者不定的立場去影響到學生的想法，研究者對於每一位詢問研究者意見的學生，研究者都是建議要換，研究者這樣做的目的是希望能藉由研究者的建議引導學生思考為什麼要交換，希望能夠增加學生的中獎機率，同時藉由學生的中獎來增強學生對於蒙提霍爾問題體驗的感受，期望學生能夠從中感受到選擇交換的中獎可能性會較高。

貳、蒙提霍爾問題

蒙提霍爾問題(Monty Hall problem)又稱山羊問題或三門問題，源自於美國的電視遊戲節目(Let's Make a Deal)。遊戲中有三扇門，其中一扇門後面有一輛汽車，兩扇門後面是一隻山羊，節目中的主持人知道汽車在哪一扇門後。參賽者會在三扇門中進行選擇，選擇好哪一扇門後，主持人會故意開啟其中一扇後面是山羊的門，藉以吸引觀眾的目光，但並不允許參賽者更換選擇。加州大學柏克萊分校統計學教授 Steve Selvin 的改編版本當中，流程與初始版本一致，不過在最後會詢問參賽者要不要更換選擇，提供參賽者改變選擇的機會。

相關的蒙提霍爾問題研究中，有 Feliciano-Semidei、Wu 與 Chaphalkar (2022) 將蒙提霍爾問題納入大學統計學導論課程中來進行條件概率的介紹。Falk (2014) 嘗試透過無公式的對話來分析蒙提霍爾問題，並嘗試撰寫相同結構的故事來模擬蒙提霍爾問題。Côté 與 Smith(2022) 為教師提供各種方案，將蒙提霍爾問題用作全面的體驗式學習練習，並提供多種機會進行個人和課堂的討論與練習。Dupont 與 Durham (2018) 在經濟學的課堂上進行蒙提霍爾問題的教學實驗，發現可以提高學生的學習效果，同時激發學生對學習產生更大的熱情。

參、數學史融入教學

數學是人類發展過程中所伴隨產生的一種智識文化，數學知識源遠流長，數學的發展不僅受各區域民族文化之影響，也與社會文化發展的趨勢緊密相關(劉柏宏, 2021)。在許多國家中，數學家、歷史學家和教育家一向認為，透過不同的方式將數學史融入教學中，將能夠改善數學教育(Fauvel、Van Maanen, 2000)。透過數學史可以讓學生認識到數學是如何演化、如何有用以及如何擁有其文化內涵(洪萬生, 1984)，同時能夠拓寬學生的視野，培養學生全方位的認知能力與思考彈性(洪萬生, 1999)。Tzanakis 與 Arcavi (2000) 對於將數學史融入數學教育中的重要性，提出了五大立論：幫助學習數學、拓展視野、使教學內容更廣闊、加深情感、重新定位數學於文化中的重要性。

在數學課堂上提供數學史料，可以讓學生知道數學是人類的活動，除了讓學生體會數學的人文面向之外，適當的史料剪裁及文本的提供，亦可作為數學教學上的範例，能幫助學生對於數學重要概念的啟發和體會(蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡, 2014)。經由數學史融入數學教學實作，發現透過數學史能夠為學生揭開數學神秘的面紗，讓學生了解數學的起源，能夠正面增強學生的數學學習態度(蘇意雯、陳政宏、王淑明、王美娟, 2015)。不過在融入古文本時，應注意學生學習狀況進行內容調整，避免因為難度過高，而影響學生的學習意願(林妙霜、蘇意雯, 2009)。

肆、體驗式學習

美國教育家杜威(John Dewey, 1859~1952)認為的體驗式學習要以學生為主體，讓學生主動參與學習，教師是引導者的角色，讓學生在過程中不斷的反思，而學習如何應用。Kolb (1984) 提出體驗式學習的四個階段：親身體驗、觀察反思、總結體會、積極嘗試。同時認為透過此四階段循環學習是最為有效的學習方式。體驗式學習能夠讓學生在體驗中學習，讓學生對於所學產生連結，而非是單純的聽講，同時也能夠讓學生在過程中進行思考，培養學生反思的能力，通過體驗式學習也能夠幫助學生去欣賞數學 (Penazzi, 2020)。

運用體驗式學習來進行數學史融入數學教學，能夠提供學生不一樣的數學學習經驗，數學史提供了數學體驗式學習的媒材，透過適當的結合，對於學生的數學學習以及數學學習態度的養成，相信都會有著很大的助益。

伍、教學實作

以下將分為教學過程以及學生回饋二部分進行說明。

一、教學過程

教學過程分為蒙提霍爾問題體驗、學生小組討論與學生想法發表、教師總結三部分，以下將分別進行說明，其中學生小組討論，礙於篇幅關係將不在此處特別說明。

(一) 蒙提霍爾問題體驗

首先，研究者與學生介紹蒙提霍爾問題，源自於一個美國的電視節目，又稱為三門問題或山羊問題，在當時後的獎品是一台汽車，除了汽車之外還有兩隻山羊。主持人在參賽者選好一扇門後，會將剩餘的兩扇門中是山羊的那一扇門打開，但不會讓參賽者更換。今天要嘗試的是後面有人去改編的版本，可以選擇要不要交換。

研究者接著與學生介紹活動相關用具，三色積木以及兩個單獨的黃色積木分別代表中獎以及沒中獎(如下圖 1 左上)，以及三扇門(如下圖 1 右上)，並介紹活動流程為學生先選擇一扇門，研究者會將其中一扇未中獎的門打開(如下圖 1 左下)，接著研究者會詢問學生是否要更換選擇，之後研究者會將學生最後所選擇的那一扇門打開(如下圖 1 右下為中獎)。一共 21 位學生逐一進行活動。



圖1 教學用具

(二) 學生小組想法發表

研究者先將學生依照他們自己的選擇進行分組，分為支持要換、支持不要換以及不一定三個組別，給予學生時間進行討論，於學生討論後，以抽籤的方式，來決定每一組由誰上台進行發表，同時因為時間允許，也有學生自願上台發表想法。以下為各組學生發表時，研究者與學生的對話紀錄。由於學生並不熟悉此種模式，所以在想法發表上，學生容易緊張，而導致無法良好的表達自己的想法。

1、支持要換

(第一位學生)

S：我支持要換，因為 50%、50%的機率。

T：為什麼是 50%、50%？

S：因為你有打開來了一扇門。

T：所以你覺得剩下兩扇門就是 50%、50%。

S：然後人都會選擇自己沒有的那一份，感覺就會比較好。都會覺得自己那一個都是不會中。都會覺得自己選的沒有那麼好。因為心理學的關係。

(第二位學生)

S：要換，被別人問說要不要換的時候，就感覺很想要換，然後就會換。

T：那你那時候有換嗎？有中獎嗎？

S：有。

T：那如果那時候你沒中呢？你會不會改變立場？

S：不會。

2、支持不要換

(第一位學生)

S：我支持不要換。

T：為什麼？

S：不想要相信別人，相信自己。

T：你覺得自己一開始就選中了對嗎？

S：對。

(第二位學生)

S：我是支持不換。

T：為什麼？

S：因為我原本是選二號，然後我就相信老師，結果換了之後是沒中。

3、不一定

(第一位學生)

S：我覺得不一定要換，就是中立意見。

T：為什麼？

S：因為有些人聽老師說要換結果沒有中，有些人聽老師的結果中了。

(第二位學生)

S：我是支持不一定，因為老師如果會先開一個，假如你這個沒有中的話，那這邊還有剩下兩個門，兩個門中獎的機率就是二分之一，就是 50%、50%，有時候你換了時候沒有中，有時候你換了之後又有中，所以機率是不一定。

(三) 總結

研究者以固定每一扇門後的情況來進行操作，以 1 號門為中獎，2、3 號門為沒中獎。首先，研究者以固定不換選擇來進行操作，於每次操作的同時與學生確認是否中獎，並將情況記錄於黑板上，得到如下圖 2 之結果。

	不換選擇
1 號門(中獎)	中獎
2 號門(沒中獎)	沒中獎

3 號門(沒中獎)	沒中獎
-----------	-----

圖2 結果 1

接著，在前述條件下，研究者改以固定更換選擇來進行操作，於每次操作時與學生確認是否有中獎，並接續前述黑板內容將操作結果記錄於黑板上，得到如下圖 3 之結果。

	不換選擇	更換選擇
1 號門(中獎)	中獎	沒中獎
2 號門(沒中獎)	沒中獎	中獎
3 號門(沒中獎)	沒中獎	中獎

圖3 結果 2

最後，詢問學生在過程中看到了什麼。有學生表示原本沒中獎的可能性比較大，交換之後中獎的機率會變成兩倍。全班學生皆能從研究者的操作過程及結果中，看到交換選擇會使中獎的可能性增加，並表示同意交換選擇的中獎可能性更高。不過也有學生表示雖然同意交換選擇是較好的，會更容易中獎，但是他仍然不想交換，因為他更相信自己一開始就選到了中獎的那一扇門。

二、學生回饋

研究者請學生回答以下問題：有沒有交換、有沒有中獎、你覺得要不要交換、為什麼。將學生回答結果統計如下表 1。

表1 學生回答

有沒有交換	有沒有中獎	你覺得要不要交換	人數
有交換	中獎	要交換	8
		不要交換	0
		不一定	2
	沒中獎	要交換	0
		不要交換	2
		不一定	2
沒有交換	中獎	要交換	1
		不要交換	2
	沒中獎	要交換	4
		不要交換	0
		不一定	2
		不一定	2

(一) 有交換

有交換也有中獎且認為要交換的學生中，有學生認為他自己不會一開始就選到大獎，自己沒有這麼幸運；有兩位學生認為中獎機率會是 50%，其中一位學生是偏向以心理學的想法來解釋，另外一位學生在嘗試歸納結果。

有交換也有中獎且認為不一定要交換的學生認為要看直覺，同時學生也提出疑問：這樣的活動跟數學有什麼關係？

有交換但是沒有中獎且認為不要交換的學生表示，因為他的幸運號碼是 2 號，結果他選擇了交換，換成了 3 號，結果就沒有中獎，所以他認為不要交換。

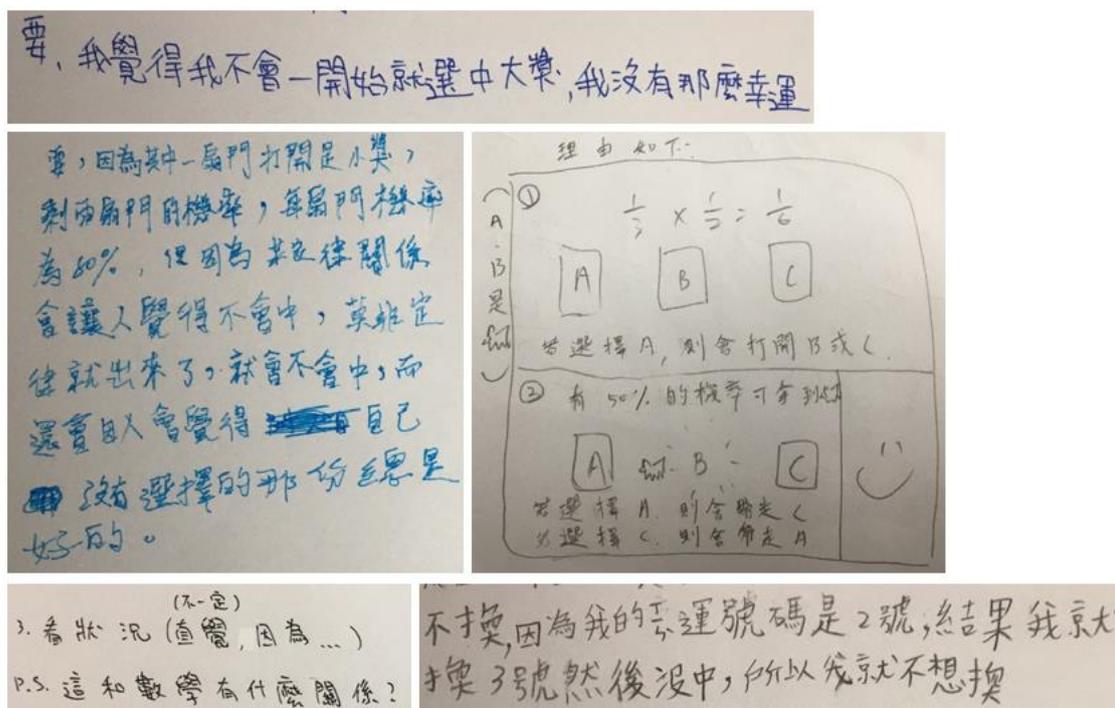


圖4 學生書寫回饋 1

(二) 沒有交換

沒有交換但是有中獎且認為要交換的學生的說明原因中，學生表示他曾經在一個短片之中看過一部電影在講述蒙提霍爾問題，不過雖然他已經知道結果是要換的可能性較高，但他還是沒有選擇交換，學生認為他剛好是例外的情況。

沒有交換但是有中獎且認為不要交換的學生，認為聽老師的建議肯定是錯的，同時學生也表示他相信自己的直覺。

沒有交換也沒有中獎且認為要交換的學生，有學生表示雖然他覺得要換，但是他沒有換，

是因為他不相信老師。也有學生表示因為他不聽老人言，所以他沒有中獎。還有學生認為因為相信自己的直覺，結果沒有中獎，所以還是要換可能會比較好。

沒有交換也沒有中獎且認為不一定要交換的學生認為，因為老師會先打開一扇門，所以剩下 2 扇門，中獎的機率就會是 50%，所以不一定要交換。

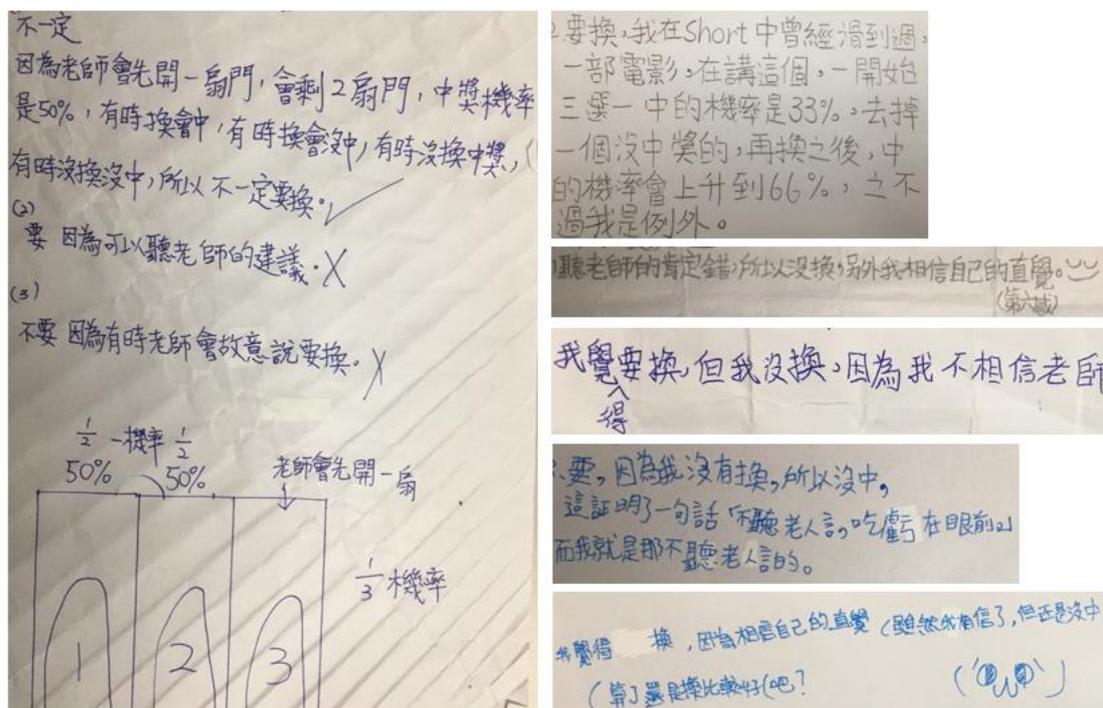


圖5 學生書寫回饋 2

陸、 結論

在體驗蒙提霍爾問題的過程中，無論是自己或是同學在選擇時，皆能有良好的參與。在討論的時候，由於學生有親身體驗過，同時也看到了其他同學的體驗過程，學生能夠有著好的討論，也能夠彼此分享想法。在發表時，雖然學生是很緊張的，但也能夠願意上台發表自己的看法，嘗試著練習站在台上說話。相信這樣的體驗課程將能夠帶給學生深刻的學習印象。

從學生的回饋中，可以看到有部分學生嘗試以古典機率的想來進行思考，不過由於學生為六年級學生，機率各方面概念尚未完備，研究者在此處並不特別與學生進行機率概念的說明。也能夠看到有學生在書寫想法時，會去好奇這個活動與數學的關聯性是什麼。

由於蒙提霍爾問題本身是較為困難的，教學對象又是國小六年級學生，因此研究者的教學以體驗為主，並於課程總結階段再進行操作，讓學生看到可能的結果。並不特別與學生進行機率計算的討論。經由實驗後發現，讓學生去體驗曾經發生過的事件，能夠讓學生有著不一樣的學習經驗，相信能夠讓學生學習的更有感覺。

柒、 參考文獻

- 林妙霜、蘇意雯 (2009)。數學史讓數學變有趣。師友月刊 (509), 81-83。
- 洪萬生 (1984)。數學史與數學教育。科學月刊, 173。
- 洪萬生 (1999)。Hpm 隨筆(二)。HPM 通訊, 2 (4)。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。臺北：教育部。
- 劉柏宏 (2021)。數學人文教案培養數學文化素養之理論探討與反思。臺灣數學教育期刊, 8(1), 1-25。
- 蘇意雯、陳政宏、王淑明、王美娟 (2015)。幾何文本閱讀理解的實作研究。臺灣數學教育期刊, 2 (2), 25-51。
- 蘇意雯、黃俊瑋、陳靜惠、林明怡 (2014)。以數學史劇本設計引動教師專業成長之研究。臺灣數學教育期刊, 1 (2), 25-52。
- Côté, M. J.、Smith, M. A. (2022). The monty hall problem as a multifaceted experiential learning exercise in quantitative business courses. *Decision Sciences Journal of Innovative Education*, 20(1), 5-16.
- Dupont, B.、Durham, Y. (2018). Let's make a deal in the classroom: Institutional solutions to the monty hall dilemma. *Journal of Economic Education*, 49(2), 167-172.
- Falk, R. (2014). Monty's dilemma with no formulas. *Teaching Statistics*, 36(2), 58-61.
- Fauvel, J.、Van Maanen, J. (2000). *History in mathematical education: The icmi study*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Feliciano-Semidei, R.、Wu, K.、Chaphalkar, R. M. (2022). Introducing conditional probability using the monty hall problem. *Journal of University Teaching & Learning Practice*, 19(2), 93-108.
- Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning*. New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Penazzi, D. (2020). Creating experiential mathematical activities. *Mathematics Teaching*, 270, 28-31.
- Tzanakis, C.、Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel、J. v. Maanen (Ed.), *History in mathematics education*, (Vol., pp.). Dordrecht: Kluwer Academic.

Sixth Graders Experience Monty Hall Problems

Guo-guang Sun

Department of Mathematics, University of Taipei

Abstract

This study allows the sixth grade students to actually experience the Monty Hall problem, guides the students to think in the process, and encourages the students to express their ideas. The teaching process is divided into four stages: Monty Hall problem experience, student group discussion, student's idea presentation and teacher's summary. In the process of experience, students can well participate in the course; when students express their ideas, students are also willing to try to express their ideas; when summarizing, the researcher operate and record at the same time, so that students can see what may happen in some cases, students can also actively find that switching choices will increase the possibility of winning after the researcher operate and record. After finishing the student feedback after class, we can also see that several students are thinking with the idea of classical probability. The Monty Hall problem is conceptually difficult, and students are actually involved through experience. Although students cannot clearly learn the concept of probability, they can make students feel the increase in possibilities and at the same time arouse students' learning motivation to make students curious about mathematics.

Key words: Monty Hall Problem, History of Mathematics, Experiential Learning

南宋數學家楊輝的垛積術

黃紘宇¹ 英家銘²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 mathforyu1123@gmail.com

² 國立清華大學通識教育中心/歷史研究所

jiaming.ying@mx.nthu.edu.tw

摘要

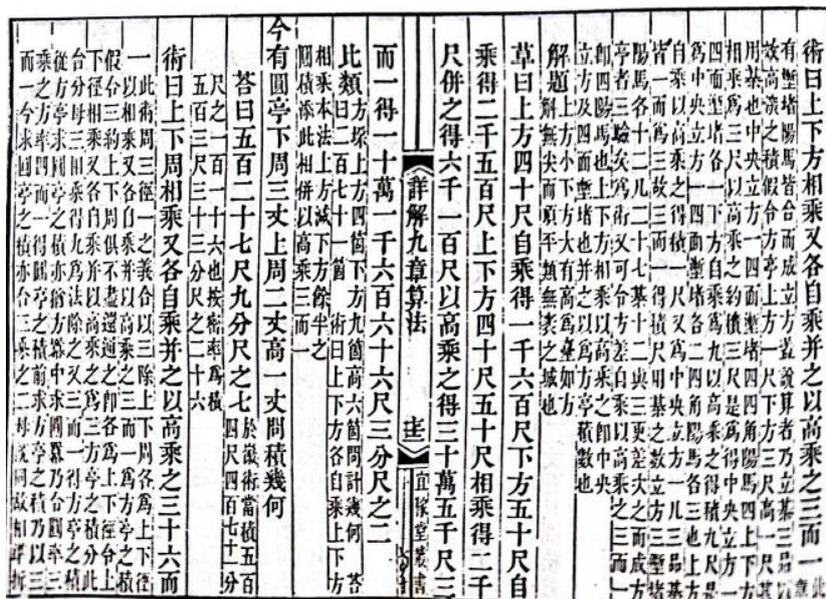
楊輝，作為南宋著名數學家，在中國數學史上占有非常重要的地位。其對於「垛積術」的影響甚大，乘載著北宋沈括對於「隙積術」的想法，將堆垛求積的問題研究的更加深入及透徹。楊輝主要在《詳解九章算法》中提及各式堆垛求積的方法。《詳解九章算法》內容包括《九章算術》原文、魏劉徽注、唐李淳風等注釋、北宋賈憲細草，及楊輝的詳解。然而楊輝僅節錄部分題目，並未將《九章算術》中所有的問題撰寫出來。在《商功》這章中，原本的題目皆為討論體積相關問題，楊輝則多次透過「比類」來討論有關於堆垛相關問題。有趣的是楊輝能將堆垛求果子個數的生活應用題連結到體積問題，並且給出了許多堆垛求積的公式。然而這些公式有些與體積公式連結後，會有其對應的修正項。此外，楊輝除了對於垛積術有卓越貢獻外，亦有關於數學學習的相關論述。在《楊輝算法》中，作者裡頭給出了很多捷算公式，其中堆垛求積的問題為其捷算公式的例題。本篇論文將會整理上述的歷史發展，並從數學教育的觀點給予評價。

關鍵字：楊輝、垛積術、高階等差級數、數學史

壹、緒論

第一世紀成書的《九章算術》被認為是最早的中國古代數學文本之一，歷經各朝代各個數學家為其作注，其中較為重要的是魏的劉徽與唐代李淳風。到了南宋，楊輝亦加入編寫此書注釋的行列，為此寫出了《詳解九章算法》，雖然僅摘錄了《九章算術》中部分題目，不過除了原本劉徽與李淳風的注釋外，額外加入了「解題」、「比類」、「詳解」。¹

¹ 參閱郭書春，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，頁 943。



圖一：《詳解九章算法》方堞比類書影²

在《九章算術》中的《商功》篇章，其探討立體體積問題。在原本的答曰和術曰之外，楊輝加入了自己的解題過程以及「比類」，意思就是在原本的題目外，加入一題類似概念的類題，也算是開創了在原題目加入類題的先河。然而在《商功》篇，因題目探討體積問題，楊輝在此放入堆堞問題作為比類問題。例如在討論方亭時，原題目為：³

今有方亭下方五丈上方四丈高五丈問積幾何
 答曰一十萬一千六百六十六尺太半尺
 術曰上下方相乘又各自乘并之以高乘之三而一

方亭（如圖二）為上下皆為正方形的截頂方錐。題目中「下方」與「上方」指的是下面與上面正方形的邊長，其中一丈為十尺，給出上下方長度以及高長後，求此體積。《九章算術》給出了答案和解法：上下邊長各自平方，以及相乘後，所得出的三個數值相加，接著再將其總和乘上高的長度後除以三，便可得體積為一十萬一千六百六十六尺太半尺，其中太半尺的意思就是 $\frac{2}{3}$ 尺。接下來，楊輝便為其作出相關比類問題：⁴

比類方堞上方四箇下方九箇高六箇問計幾何
 答曰二百七十一箇

² 參閱郭書春，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，頁 987。

³ 同上引，頁 987。

⁴ 同上引，頁 987。

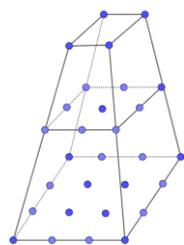
術曰上下方各自乘上下方相乘本法上方減下方餘半之圓積添此相併以高乘三而一

方垛（如圖三）指的就是每一層皆為球體排成正方形個數，所堆疊出來的垛，其形狀好似方亭一般，故楊輝將其放置在方亭的比類題型。題目表示最上排擺成邊長為四的正方形，最下排則為九個的正方形，由此可見總共有六排，求共有幾個球體。書中給出了正確答案271個，不過方法非常有趣。因為形如方亭，所以方垛的上下球體個數視同方亭的上下邊長，只不過楊輝意識到球體一堆成方垛後其球體個數終究與方亭體積有落差。如同北宋沈括曾說過：

隙積者，謂積之有隙者，如累棊、層壇及酒家積罌之類，雖似覆斗，四面皆殺，緣有刻缺及虛隙之處，用芻童法求之，常失於數少。⁵

在此簡單來說，計算有空隙地堆積，如果用芻童公式(方垛的部分是使用方亭的公式)來求數量，通常會少算。因此楊輝透過「本法上方減下方餘半之」，意即將上下長度相減之後除以二，也就是 $\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$ ，加入前部分計算的三個數值，乘上高的長度再除以三，得到正確答案為271。再次整理計算過程為：

$$\left(4^2+9^2+4\times 9+\frac{9-4}{2}\right)\times 6\times \frac{1}{3}=271$$



圖二：方亭示意圖



圖三：方垛示意圖

若將楊輝計算方垛的公式一般化，可得到接下來的公式。若方垛最上層為 $a\times a$ 個，最下層是 $b\times b$ 個，其中共有 $b-a+1$ 層，則楊輝的方垛求積公式為：

$$\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)(b-a+1)\times \frac{1}{3}$$

以現代數學觀點，方垛求積其實就是連續整數的平方和。如果我們用代數式來呈現的話就會是：

$$a^2+(a+1)^2+\dots+b^2, \text{ 其中 } b>a。$$

若將其與

⁵ 參閱英家銘，〈算術不患多學—沈括的數學漫遊〉，《HPM 通訊第二十四卷第二期》，頁3。

$$\left(a^2 + b^2 + ab + \frac{b-a}{2}\right)(b-a+1) \times \frac{1}{3}$$

做出化簡後比較，我們會發現：

現代數學公式：

$$\begin{aligned} & a^2 + (a+1)^2 + \dots + b^2 \\ &= (1^2 + 2^2 + \dots + b^2) - [1^2 + 2^2 + \dots + (a-1)^2] \\ &= \frac{b(b+1)(2b+1)}{6} - \frac{(a-1)a(2a-1)}{6} \\ &= \frac{2b^3 + 3b^2 + b - 2a^3 + 3a^2 - a}{6} \end{aligned}$$

楊輝公式：

$$\begin{aligned} & \left(a^2 + b^2 + ab + \frac{b-a}{2}\right)(b-a+1) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(a^2b - a^3 + a^2 + b^3 - ab^2 + b^2 + ab^2 - a^2b + ab + \frac{b^2}{2} - \frac{ab}{2} + \frac{b}{2} - \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-a^3 + b^3 + \frac{3b^2}{2} + \frac{b}{2} + \frac{3a^2}{2} - \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{-2a^3 + 2b^3 + 3b^2 + b + 3a^2 - a}{2} \\ &= \frac{2b^3 + 3b^2 + b - 2a^3 + 3a^2 - a}{6} \end{aligned}$$

由此可見，兩者是吻合的，也就是楊輝早在十三世紀的南宋，就給出了方垛求積的公式。不過很可惜無法從楊輝的著作中得知「上方減下方餘半之」的修正項是如何得到的，來讓堆垛求積與《九章算術》中的體積公式做出巧妙的結合。筆者推測其之所以可以得到這個修正項，是透過多次堆垛成積的數據中歸納出來的，最後在將其一般化形成計算公式的一部分。

楊輝把原本的體積問題，轉化成生活中數數問題。當其將方亭上下方長轉化成方垛上下個數時，除了可見其活用概念轉化成生活問題之外，也可讓其著作的讀者更加熟悉公式。然而楊輝在堆垛術的研究不只如此，另外在方錐、壘堵、鰲臙、鰲童等問題都有相對應的堆垛比類。

雖然以現代數學觀點來看，這些堆垛比類問題就是在討論高階等差級數，不過就我的觀察，楊輝重點在於活用這些體積公式，把這些特殊立體圖形透過堆垛來呈現，然而解法也是用體積公式去計算，再奇妙的將修正項填上。

《楊輝算法》為楊輝後期著作之大集，其中包括《乘除通變本末》、《田畝

比類乘除捷法》、《續古摘奇算法》，後人將其合稱為《楊輝算法》。本文所探討之垛積術亦有在此出現。楊輝撰寫《乘除通變本末》之目的為鞭策其學生熟知加減乘除各式計算方法，與其發明之各式捷算。以下為其中一題：⁶

三角垛底面七箇問積幾何

答曰八十四箇

術曰置底面數張三位本位不加中加一下加二於內取一位可以六除者六除訖以三位相乘為積

草曰置底層七箇張三位一闊一長一高本位七箇不加中加一八箇下加二九箇內取九箇可用六除為一箇半以七因之又八因之合

三角垛為一常見的堆垛型態，將球體堆疊至每一層為正三角形型態，其中最上層只有一個球。題目表示若有一三角垛其中最底層一邊有七個球體，則整個垛積為何？其解法表示若底層邊數為 n ，則共有 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 個，以現代數學也

可以輕鬆證明出其正確性（現行高中數學教材亦有這類題型，例如翰林第二冊第一單元的數列與級數）。不過值得注意的是，再最後草曰，也就是楊輝將題目數字代入計算時，楊輝著重的部分並非題目本身，而是其「捷算」：當七、八、九三數相乘的時候，因為要除以六，應當先將九除以六得到「一個半」之後，再將其與七、八兩數相乘，才比較好計算。可見垛積術在此變成僅是一種捷算的例題，創造出多數相乘後若要進行除法，應當先尋找適合做為被除數的數字先行除法運算，亦可見楊輝將垛積術發揮至淋漓盡致。

後世多提楊輝在垛積術多有研究，然而在《乘除通變本末》中，由上述例題可見，垛積術僅為訓練相乘六法之命題而已。⁷故在此垛積術的概念並不會特別難，也不會有結構過於複雜的垛。文中楊輝提及的三角垛與四隅垛，並未給出公式推導過程，只是直接使用對應的公式。筆者推斷可能重點不在於堆垛本身，而是在於遇到特殊數字運算的時候，可以使用正確的捷算。

最後，在《田畝比類乘除捷法》中，多為面積計算方法。最初提及圭垛為三角形面積的應用，梯田垛為梯形面積的應用。再來也有稍微進階一點的問題，不過可以看出只是把所有平面垛做一個總匯而已。文中所述之梯田法，可用於處理這方面的問題。也因為僅是平面面積問題，這裡就不涉及高階等差級數的概念。並可再次驗證在《楊輝算法》這本著重算術技巧的文本中，堆垛問題僅為生活中的一種例子，而非主要概念。

⁶ 參閱郭書春，《中國科學技術典籍通彙》數學卷一，頁 1051。

⁷ 楊輝將乘法歸類為單因、重因、身前因、相乘、重乘、損乘六種運算方式。單因指一位數的乘法；重因指將乘數拆乘兩個一位數的乘法；身前因指乘數為 21、31、...、91 的乘法；相乘指多位數乘法；重乘指若遇到極大兩數相乘時，先將乘數分解為較小兩數相乘，再分段相乘；損乘是一種減掉補數的乘法。參閱，王文珮，〈楊輝算書探微：一個 HPM 的觀點〉，頁 47-50

從上述兩個文本中，筆者認為垛積問題在宋代是一個生活中常見的應用，且楊輝透過《九章算術》各式立體圖形體積公式，去尋找相對應的垛積型態。其中立體體積與堆垛物體的數量不乏有完全吻合，也有些微出入的例子，不過楊輝仍可巧妙的將其修正項填上。此外在《楊輝算法》中，垛積問題更是主要放在計算，而非垛積本身。從文字中也難以感受到當初楊輝擁有高階等差級數的觀念，不過能夠確定的是，高階等差級數的種子就此播下且逐漸茁壯，影響著元代的朱世傑、清代的李善蘭等等。在此也可以透過楊輝的故事，鼓勵學生在數學解題過程中，可以多加訓練「勘誤」的能力。如同楊輝將方亭連結至方垛，將誤差精妙計算出來一般，學生時常在計算過程中難以覺察自己計算過程的錯誤，抑或者是計算思維上的漏洞。老師不妨在教學中透過這樣的故事分享給學生：「早在南宋近千年前的古人也在跟我們一樣計算著堆垛求積的應用問題，相信身處在這科技日新月異的 21 世紀的你們，也一定辦的到！」

參考文獻

- 王文珮(2002)。楊輝算書探微：一個 HPM 的觀點(未出版之碩士論文)。國立台灣師範大學數學系，臺北市。
- 英家銘(2021)。算術不患多學—沈括的數學漫遊。HPM 通訊，24(2)，2-4。
- 郭書春(1993)。中國科學技術典籍通彙：數學卷。鄭州：河南教育出版社。

The Stacking Volume Method (*Duojishu* 垛積術)

of Sothern Song Mathematician Yang Hui

Hong-Yu Huang¹ Jia-Ming Ying²

¹ Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University
of Education mathforyu1123@gmail.com

² Center for General Education/Institute of History, National Tsing Hua University
jiaming.ying@mx.nthu.edu.tw

Abstract

Yang Hui (ca. 1238–1298), a famous mathematician of the Southern Song Dynasty, occupies a very important position in the history of Chinese mathematics. His influence on the "stacking volume method" (*Duojishu* 垛積術) was significant. Building upon Shen Kuo's 沈括 idea of "gap volume method" (*Xijishu* 隙積術) in the Northern Song Dynasty, he further explored the problems related to stacking and piling. Yang Hui mainly discussed various stacking and calculation methods in the book *Detailed Solutions for the Calculation Procedures of the Nine Chapters* (*Xiangjie Jiuzhang suanfa* 詳解九章算法, 1261). The contents of the book includes the original text of the famous canon *Nine Chapters of Mathematical Art* (*Jiuzhang Suanshu* 九章算術, first century), annotations by Liu Hui 劉徽 in the third century and Li Chunfeng 李淳風 in the seventh century, Jia Xian's 賈憲 calculations in the eleventh century, and Yang Hui's own detailed explanations. However, Yang Hui only selected certain problems and did not write out all the problems in the *Nine Chapters of Mathematical Art*. In the chapter of Consultation of Engineering (*Shanggong* 商功) of the famous canon, the original problems were all related to volume problems, but Yang Hui repeatedly discussed stacking-related problems through "analogy" (*bilei* 比類). Interestingly, Yang Hui was able to link real-life applications of stacking and calculating fruit quantities to volume problems, and gave many stacking and calculating procedures. However, some of these procedures are linked to volume formulas with corresponding correction terms. Moreover, besides his outstanding contribution to the discussion of stacking procedures, Yang Hui also has related discussions on mathematics learning. In the book *Yang Hui's Calculation Methods* (*Yang Hui suanfa* 楊輝算法, 1270s), the author provided many fast-track calculation techniques, and the problems of stacking are a group of examples for those techniques. This paper summarizes the above

historical developments and evaluates them from the perspective of mathematics education.

Keywords: Yang Hui, stacking volume method, arithmetic progression of higher orders, history of mathematics

Smart Calculation 雙語教育在簡化計算單元之初探

陳欣民¹ 林春煌²

¹ 嘉義縣東石國小、國立嘉義大學教育學系

chensinmin2003@gmail.com

² 國立台北科技大學技職教育研究所 springhuan@gmail.com

摘要

本研究目的旨在探討小四「簡化計算」單元的雙語數學課程設計的可行性，並檢視學生之學習成效與學習感知。本研究採用行動研究法，研究結果發現：(一)基於 UbD 的課程設計讓學生體驗與探究簡化計算策略能提升學生學習成效；(二)近端情境讓雙語數學課兼顧數學學習目標與英語學習目標；(三)簡化計算的雙語數學課帶給學生正向的感知。

關鍵字：簡化計算、雙語數學、近端情境

壹、緒論

一、研究動機與背景

〈2030 雙語國家政策〉是我國近年來跨部會推動的重大政策之一。教育部因應此一政策，也在各教育階段推動「雙語教育」、「雙語教學」的相關政策措施（李郁緻，2022），自106學年度起便辦理「補助國民中小學沉浸式英語教學特色學校試辦計畫」，109學年度開始，「國民中小學部份領域課程雙語教學實施計畫」已是國內推動內雙語教學的重大計畫，惟執行模式、師資培訓、政府支持與相關配套措施則是影響雙語教學成敗的關鍵因素（蔡清華，2021；陳錦芬，2021）。

本研究的研究者申請了111年的部份領域課程雙語教學實施計畫，學科領域為數學。由數學概念的形成觀點而言，需要經過內化、壓縮和物化三個階段，而內化和壓縮，更需要很多的「操作」(manipulations)歷程(Sfrad, 1991; 英家銘, 2001)。而雙語教育最被廣泛使用的教學模式是「學科內容和語言整合學習」(Content Language Integrated Learning, 簡稱CLIL) (Coyle, 1999; 林子斌, 2020; 鄒文莉, 2021)。CLIL教學模式主要建立在4Cs理論上，即內容、語言、認知及文化。然而，呂妍慧、袁媛（2020）指出，目前國內較少對數學領域進行CLIL課程與教學有專門的研習課程或研究，且對於CLIL數學教學實務面（如哪些單元、哪些活動、哪些數學名詞適合用來做雙語）仍有相當多的探討空間。因之，兩位學者提出了「臺灣國小學童的數學CLIL教學模式」，包含六項具體教學設計流程：情境分析、數學主軸、目標語言、認知鷹架、整合學習及課室管理。本研究擬參考此六項教學設計考量的面向，對小學數學課程的單元進行規劃與設計，並試行於真實課室中，期能結合理論與實務，為雙語數學課室的風貌，提供真實的看見。

由於小四「簡化計算」（數學四下，2023）單元，含括最基本數字加減的本質，且貼近日常生活買東西、找錢時，在心裡運算的快速法則，符合新課綱中「數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使

用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式」的素養，因之，擬以此單元為例，探討雙語教學的實然與應然。

二、研究目的

本研究旨在探討小四「簡化計算」單元的雙語教學課程設計的可行性，並檢視學生之學習成效與學習感知。

貳、文獻探討

一、數學領域「簡化計算」概念教學目標

小四「簡化計算」(康軒數學四下, 2023)單元共有五節, 分成三個活動, 活動一是「加與減的簡化計算」, 學生要能理解「連加或連減的順序可交換」、「相加再減、先減再加的結果相同」、「連減兩數等於減去此兩數之和」; 活動二為「乘和除」的簡化計算, 學生要能理解「三數相乘, 順序改變不影響其積」和「先乘後除與先除後乘的結果相同」。

考量對於小四學童而言, 英語當中「乘和除」的發音和句型相對於「加和減」是較為複雜的, 故在本單元的部份, 研究者只取活動一「加與減的簡化計算」的部份融入雙語教學。根據「十二年國民基本教育課程綱要數學領域」(教育部, 107)中「數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力, 並能熟練操作日常使用之度量衡及時間, 認識日常經驗中的幾何形體, 並能以符號表示公式」的指標, 學童需能判斷要使用何種「簡化計算」策略, 例如在題目「If Min buys a pack of seaweed for \$128, a box of French fries for \$75, and a bottle of juice for \$25. How much is the total? Please list the number sentence.」中, 學生要能判斷使用「連加的順序可交換」策略先加「 $75+25=100$ 」, 接著再加上「128」, 也就是「 $128+75+25=128+100=228$ 」。而在題目「Peggy has \$1049, if she buys a bucket of ice cream for \$575, and a bucket of gummy for \$249. How much money is left? 並能在題目「Miss Jane has \$5024, if she buys a box of egg tarts \$253, a pair of sneakers \$1743, How much money is left? Please list the number sentence.」學生要能看出需要使用「連減兩數等於減去此兩數之和」策略以簡化計算。

二、雙語「簡化計算」概念教學目標

根據「十二年國民基本教育課程綱要語文領域-英語文」(教育部, 2018)核心素養具體內涵「英-E-A2 具備理解簡易英語文訊息的能力, 能運用基本邏輯思考策略提升學習效能」, 及四年級(第二學習階段)在聽、說、讀、寫四部份的學習表現分別為「1-II-7 能聽懂課堂中所學的字詞」、「2-II-3 能說出課堂中所學的字詞」、「3-II-3 能看懂課堂中所學的句子」、「4-II-4 能臨摹抄寫課堂中所學的句子」, 本研究使用的數學例題為貼近小四學生「購買同樂會點心或衣服運動鞋」的問題情境, 讓學生減少認知負荷, 而以數學學科概念的學習為首要任務。目標詞彙為購買之物品如「seaweed、juice、French fries、milk tea、rice crackers、chocolate biscuits、egg tart、a pair of sneakers」, 其中有些單字如 juice、French fries、chocolate 在英語課已學過。目標句型則為能看得懂、聽得懂「How much is the total?」、「How much money is left?」、「How to calculate fast?」的問句, 並能口說「 $A\pm B\pm C=D$: 四位數 plus (minus) 三位數 plus (minus) 兩位數 equals D」的計算過程。課室用語的部份, 每一堂課皆重覆

「Open your math book」、「Turn to page 23-35」、「Eyes on me」、「Attention」、「Why」、「How do you know」…等數學課常用的日常語句。讓學生能熟悉問答，做良好的課室管理。

三、「臺灣國小學童的數學 CLIL 教學模式」概述

呂妍慧、袁媛（2020）提出的數學CLIL 教學模式包含六項主要教學設計。分述如下：(1)情境分析：在規劃CLIL 課程時，除了根據12 年國民教育課程綱要做為課程設計的根基之外，還需要從學校的整體教育目標、學生數學和英語能力，以及其他影響CLIL 教學的因素來思考如何彈性調整CLIL 教學模式；(2)數學主軸：會以數學學習為主要的課程設計主軸，但並非是單純將數學內容翻譯成英文的中英翻譯教學，而是思考什麼數學主題或內容適合CLIL 教學模式？所選定的數學主題或學習內容是屬於高認知需求或低認知需求？所選定的數學主題或學習內容，學生需要什麼樣的數學運算技能？如何協助學生連結已知的背景知識和未知的新知識及運算技能？(3)目標語言：學生在外語學習中都必需面對單字、對話、句型結構、閱讀理解，以及聽說讀寫等不同的語言學習面向；(4)認知鷹架：可透過虛擬教具的視覺連結提升學童對英文及數學概念的認知理解力；(5)整合學習：整合數學內容及主要英語句型的學習，達到以英文溝通、表達及解決數學任務，先讓學生熟悉和任務內容有關的單字、句型、文法等，再將學生分組，由小組執行所分派的任務，任務過程中，老師在一旁監督並給予適當的指導和回饋。任務完成後，教師再引導學童回顧任務執行過程中，所衍生的單字、語法或句型結構，增進學童的語言能力；(6)課室管理：教師可在每一堂課設計簡單實用的英文課室用語，建立課室管理規範，增進師生互動默契。這些英文課室用語是教師和學童最快、最容易溝通的英文用語。

本研究亦參考此六個面向設計教案與課堂活動，惟「認知鷹架」的部份並未使用萬用揭示板，而是採用Perkins和Salomon（1988）提出了學習遷移（Transfer of learning）的近端/遠端理論（low-road/ high-road theory）。其中近端遷移是指當兩個任務彼此非常相似時，學習幾乎自動的轉移。研究者認為課本中採收農作物數量、圖書館員清點館內總數…等問題情境離學生的生活較遠，因此本研究的數學任務情境不以課本例題為主，而以「採買同樂會所需食物及抽獎禮物」做為主軸進行一系列的簡化計算課程。

參、研究設計

一、研究方法和研究對象

本研究旨在發展適合小四學童之雙語數學教學課程，並評估在試行之後是否能提升小四學童學習成效與興趣。本研究採用行動研究法。行動研究為動態循環的研究歷程，其基本架構為規劃、觀察、行動、反省、再規劃的循環研究模式（Lewin，1951）。研究者先依據文獻探討和課程內容開發符合近端遷移「簡化計算」之數學任務情境教學活動。接續，實際應用到課室教學，並收集本研究所需要的質性與量化資料，持續做資料的三角校正。本研究的對象為嘉義縣某偏鄉國小一個小學四年級的班級學生，該國小一個年級僅有一班，此班參與「111年國民中小學部份領域課程雙語教學實施計畫」，班級為常態編班，男生7人，女生12人，共19人。第一位研究者為主要教學者，第二位研究者則扮演共同備課、觀課、議課並提出課程修正的建議。

二、課程設計

本研究基於UbD(Understanding by Design)(McTighe & Wiggins, 2007, 賴麗真譯, 2008) 的理念, 先確立「學習目標」、接續決定「多元化評量」型式以及「設計學習經驗及教學活動」。

表 1: 「簡化計算」單元之課程設計

確立「學習目標」	1. 數學領域 (1) 學生能理解「連加或連減的順序可交換」 (2) 學生能理解「相加再減、先減再加的結果相同」 (3) 學生能理解「連減兩數等於減去此兩數之和」 2. 雙語領域 (1) 學生能聽懂數學日常課室用語 (2) 學生能對於數學學術詞彙和句型做聽、說、讀、寫的練習。
設計多元化評量	1. 數學領域 (1) 「算式擂台賽」：請學生上台PK算式解題，體驗何種算式能有較快解題速度。 (2) 「判斷得分王」：請學生判斷分析手上的試題須用何種解題策略 2. 雙語領域 (1) 學生能聽懂數學日常課室用語 (2) 學生能聽懂、看懂數學學術詞彙和句型。 (3) 學生能兩兩一組，互唸寫好的算式給對方聽，並以英語表達計算過程的說明，例如I will calculate ...first, and then... 自評、互評兼具。 3. 隨堂測驗：附英文版之中文「簡化計算」試題 4. 第一次月考結果
教學設計學習經驗及	1. 體驗活動：讓學生自行解題，看看自己和同學的算式相同嗎？互相討論怎樣比較好算？ 2. 探究活動：觀察不同的算式，驗證剛剛討論的結果，歸納好算的算式策略。 3. 結論：學生能歸納並理解「簡化計算」的算式規則。 4. 學生能以英語唸出簡化計算的各個算式給同學和老師聽。

三、資料蒐集與分析

本研究使用教學觀察錄影、學生上課學習單表現、學生情意回饋單、與月考成績等方式以瞭解「簡化算式」之雙語數學教學課程實施的情形。所有錄影的資料均轉錄成逐字稿。上述所蒐集的資料再依不同種類加以分類和編碼，如下表2所示。

表 2 研究工具編碼規則

編碼	編碼代表的資料
T	實際授課教師
S15	15 號學童
1120315 觀	民 112 年 3 月 15 日之課室觀察

S6 學單	6 號學童之上課學習單
S8 情單	8 號學童之情意回饋單

肆、結果與討論

本研究旨在探討小四「簡化計算」單元的雙語教學課程設計的可行性，並檢視學生之學習成效與學習感知。以下分述本研究之結果與討論。

一、學生能察覺並歸納算式適用的簡化計算策略

在「體驗活動」中，教師先請全班同學自行解學習單上的題目，巡視行間後挑選解法不同的學生請學生上台 PK 算式解題（「算式擂台賽」），讓學生對於「簡化計算」的策略算式「有感」。舉「連加或連減的順序可交換」的題目為例，在題目「Jenny has \$857, if she buys a bucket of ice cream for \$375, and a pack of chewing gum for \$57. How much money is left?」中，學生明顯可以感受到「 $857-57-375$ 」先把尾數化成零的算式是較快的解法；而在題目「If the teacher buys three flavors of pizza and spends \$1784, \$825, \$175 respectively, how much is the total?」學生明顯可以感受到「 $825+175+1784$ 」先把兩個加起來 1000 的數字先算是較快的解法(1120315 觀)。接續，在探究活動中，老師讓學生分組討論「簡化計算」「How to calculate fast?」（怎麼算比較快）的策略，讓學生自行歸納，再請各組發表，最後將全班所歸納的三原則寫於黑板，讓學生抄於課本上。



圖 1 學生上台解題連減順序交換之算式

圖 2 上台 PK 連加順序交換之算式

表 3: 簡化計算試題答題情形

題型	選擇題		計算題				應用題		
題號	3	5	7	8	9	10	1	2	3
答對率	95%	80%	73%	77%	61%	72%	66%	62%	62%

「簡化計算」單元是學校第一次月考的一部份，從表 3 看出學生在各試題的答對率，應用題到達 60% 以上，計算題大多為 70% 以上，而選擇題答對率則為 80%、95%。由於這次月考整體平均答對率，選擇題為 70%、應用題 55%、計算題 50%，比較之下，可見學生在學完此一單元後能察覺並歸納算式適用的簡化計算策略，在月考上展現的學習成效良好。

二、學生能習得數學日常課室用語與數學學術語彙

「111 年國民中小學部份領域課程雙語教學實施計畫」實施期程自 110.08.01

開始，本研究對象在數學課已習慣「Open your math book」、「Turn to page 23-35」、「Eyes on me」、「Attention」、「Why」、「How do you know?」…等數學課常用的日常語句並迅速做出動作(1120317 觀)。而在數學學術語彙的部份，學生能看懂簡易的英語題目、寫出簡化計算的算式(圖 3、圖 4)以及兩兩互以英語表達計算過程的說明，例如 I will calculate ...first, and then...(圖 5、圖 6) (1120320 觀)。

蔡靚璇	
<p>Name:</p> <p>Here are Leo's favorite food.</p> <p>How much is the total?</p> <p>How to count faster?</p> 	$128 + 75 + 25$ $= 100 + 100$ $= 208$ <p>A: 208</p>
<p>Here are Jenny's favorite food.</p> <p>How much is the total?</p> <p>How to count faster?</p> 	$183 + 169 + 31$ $= 169 + 31$ $= 200 + 183$ $= 383$ <p>A: 383</p>
<p>Andy has \$200. If she buy the two things.</p> <p>How much is left?</p> <p>How to count faster?</p> 	$565 - (178 + 265)$ $= 565 - 443$ $= 142$ <p>A: 142</p>
<p>Lisa has \$857. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$857 - 375 - 57$ $= 857 - 57 - 375$ $= 800 - 375$ $= 425$ <p>A: 425</p>
<p>The teacher has \$2253. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$2253 - 472 - 728$ $= 2253 - (472 + 728)$ $= 2253 - 1200$ $= 1053$ <p>A: 1053</p>
<p>Miss Jane has \$5024. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$5024 - (253 + 1747)$ $= 5024 - 2000$ $= 3024$ <p>A: 3024</p>

圖 3 S22 學單

<p>Name:</p> <p>Here are Leo's favorite food.</p> <p>How much is the total?</p> <p>How to count faster?</p> 	$128 + 75 + 25$ $= 100 + 100$ $= 208$ <p>A: 208元</p>
<p>Here are Jenny's favorite food.</p> <p>How much is the total?</p> <p>How to count faster?</p> 	$183 + 169 + 31$ $= 169 + 31 + 183$ $= 200 + 183$ $= 383$ <p>A: 383元</p>
<p>Andy has \$200. If she buy the two things.</p> <p>How much is left?</p> <p>How to count faster?</p> 	$565 - 178 = 265$ $= 565 - 265 - 178$ $= 300 - 178$ $= 122$ <p>A: 122元</p>
<p>Lisa has \$857. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$857 - 375 - 57$ $= 857 - 57 - 375$ $= 800 - 375$ $= 425$ <p>A: 425元</p>
<p>The teacher has \$2253. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$2253 - 472 - 728$ $= 2253 - (472 + 728)$ $= 2253 - 1200$ $= 1053$ <p>A: 1053元</p>
<p>Miss Jane has \$5024. If she buy the two things.</p> <p>How to count faster?</p> 	$5024 - 253 - 1747$ $= 5024 - (253 + 1747)$ $= 5024 - 2000$ $= 3024$ <p>A: 3024元</p>

圖 4 S6 學單



圖 5 學童一起以英語唸出算式



圖 6 學童兩兩互以英語表達計算過程

三、學生喜歡雙語數學「簡化計算」單元的課程

學生普遍對簡化計算的雙語數學課程的感知是良好的。如圖 7、圖 8 所示，班上學生喜愛雙語數學的學習，亦能將學習結果(數學或雙語)書寫在情意回饋單上。圖 7 顯示出學童 S15 喜歡數、英和雙語，有趣的是，圖 8 的回饋單顯示，學童 S9 雖然不喜歡數學和英語，卻喜歡雙語數學課。顯見在情意方面，雙語數學對偏鄉的學生是正向的課程。

<p>Name: 吳云雅</p> <p>1. Do you like English class? (你喜歡英文課嗎?) Why? 喜歡, 因為可以學英文</p> <p>2. Do you like math class? (你喜歡數學課嗎?) Why? 喜歡, 因為可以知道 加減乘除。</p> <p>3. Do you like bilingual class? (你喜歡雙語數學課嗎?) Why? 喜歡, 因為可以邊上 英文邊上數學。</p> <p>4. What you learned in this class? (你在這節雙語數學課學到了什麼呢?) How mach is the total? 總共多少錢? 我學會用英文唸出 $\begin{array}{r} 128+75+25 \\ =128+100 \\ =228 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1665-265-178 \\ =300-178 \\ =122 \end{array}$ </p>	<p>Name: 陳陽</p> <p>1. Do you like English class? (你喜歡英文課嗎?) Why? 不喜歡, 因為教老師很兇</p> <p>2. Do you like math class? (你喜歡數學課嗎?) Why? 不喜歡, 因為數學很無趣</p> <p>3. Do you like bilingual class? (你喜歡雙語數學課嗎?) Why? 喜歡, 因為可以學到 收口唸</p> <p>4. What you learned in this class? (你在這節雙語數學課學到了什麼呢?) How much is the total? 總共多少錢? $\begin{array}{r} \text{plus 加} \\ \text{minus 減} \\ \text{equals 等於} \end{array}$</p>
<p>圖 7 S15 情單</p>	<p>圖 8 S9 情單</p>

伍、結論

一、基於 UbD 的課程設計讓學生體驗與探究簡化計算策略能提升學生學習成效

誠如呂妍慧、袁媛 (2020) 提出的數學 CLIL 教學模式所建議的, 雙語數學課程必須整合數學內容及主要英語句型的學習, 達到以英文溝通、表達及解決數學任務, 而由小組執行所分派的任務過程中, 老師需在一旁給予適當的指導和回饋。因此本研究採用 UbD 的課程設計, 讓教師能聚焦於明確的「目標」且基於目標去設計「評量」與「教學活動」(McTighe & Wiggins, 2007, 賴麗真譯, 2008), 本研究採用「體驗活動」的 PK 賽讓學生對於「簡化計算」的策略算式「有感」, 接著使用「探究活動」讓學生歸納算式原則並發表, 學生抄寫推理與歸納的原則能更印象深刻, 從學生在學習單的作答結果和月考的表現可看出, 這個方式有助於提升學習成效。

二、近端情境讓雙語數學課兼顧數學學習目標與英語學習目標

雙語數學課程的本質在於「學數學」, 而能聽懂、讀出、說出、寫出與該節數學概念相關的語句則是附加的學習價值。Perkins 和 Salomon (1988) 認為「近端情境」有助於學生做學習遷移, 為了能兼顧「學數學」和「學英語」且能給學生友善的學習感受, 研究者採取貼近學生日常生活經驗的數學任務情境「同樂會採買」, 讓「簡化計算」奠基於日常生活付錢找錢的自然情境之下。另外, 雙語數學課的英語課室用語亦有別於一般的英語課, 例如「Why?」、「How do you know?」即原本在中文數學課常見的引動學生思考問句。如此, 能讓雙語數學課

三、簡化計算的雙語數學課帶給學生正向的感知

從上課學生樂於參與體驗和探究活動、勇於以英文唸出算式、以及情境回饋單的作答呈現，不難看出「簡化計算」的雙語數學課對學生而言是相當正向的學習經驗。在雙語教育即將全面啟動之際，這樣的課室樣貌是可以提供給未來的教學者參考的！

陸、建議

一、「讓學生容易理解」的數學課程設計是雙語數學課首要考量

雙語數學課程中需能整合數學內容及主要英語句型的學習，但課程的本質仍在於「學數學」，由於加上雙語的學習可能增加學生的認知負荷，因此設計貼近學生日常生活經驗的數學任務情境，不但能連結學生熟悉的舊經驗而造成更好的學習遷移，與日常生活相關的英語字彙和句型對學生而言亦更簡單易學。由於每個數學學習單元有其不同的特性，建議教學者在設計雙語數學課程時，首要考量先以設計「讓學生容易理解」的數學課程目標為重心，例如多增加學生近端情境數學任務，並輔以學生熟悉的英語字彙和句型，才能避免數學和英語學習都沒辦法掌控的窘境。

二、雙語數學課因需兼顧數學與英語學習目標，授課時數宜增加

由於雙語數學課程同時需讓學生達成數學及英語的學習目標，在數學課中增加了英語的學習內容，建議學生學習與教師授課的時間宜視比例增加。或者亦可應用彈性課程教授雙語數學的方式，視單元特性發展學校特色課程卻無部定數學課程進度的壓力，亦是可行的作法。

參考文獻

- 呂妍慧、袁媛（2020）。數學領域雙語教育之教學模式初探。《臺灣數學教育期刊》，7(1), 1-26.
- 李郁敏（2022）。雙語國家, 雙語教育與語言政策規劃。《臺灣教育哲學》，6(2), 93-108.
- 林子斌（2020）。臺灣雙語教育的未來: 本土模式之建構。《臺灣教育評論月刊》，9(10), 8-13.
- 英家銘（2021）。英語融入數學之雙語教學。載於陳錦芬（主編）。《雙語教學理論與實務》（頁229-244）。臺北：五南。
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校：數學領域。臺北：教育部。
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校：英語文領域。臺北：教育部。
- 陳錦芬（2021）。雙語教育之源起、理念與實施。載於陳錦芬（主編）。《雙語教學理論與實務》（頁27-56）。臺北：五南。

鄒文莉 (2021)。台灣雙語教育之全球在地化思維—學術面與實踐面的反思與啟示。 *教育研究月刊*, 321, 17-29。

蔡清華 (2021)。台灣當前提升中小學生英語力的教育政策與推動策略初探。載於陳錦芬 (主編)。 *雙語教學理論與實務* (頁1-26)。臺北：五南。

數學四下 (2023)。數學四下教師手冊。台北：康軒文教事業。

賴麗珍 (2008) (譯)。 *重理解的課程設計* (原作者：Grant Wiggins & Jay McTighe)。臺北市：心理出版社。

Coyle, D. (1999). Supporting students in content and language integrated learning contexts: Planning for effective classrooms. In J Masih (ed.), *Learning through a foreign language* (pp. 46-62). CILT (Centre for Information on Language Teaching and Research).

Salomon, G., & Perkins, D. (1988). Teaching for transfer. *Educational Leadership*, 46(1), 22-32.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Smart Calculation: Bilingual Education's Preliminary Study on Simplified Calculation Units

Hsin-Min Chen¹ Chun-Huang Lin²

¹ Dong shi Elementary school、Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University

² Graduate Institute of Technological & Vocational Education, National Taipei University of Technology

Abstract

The purpose of this research is to explore the feasibility of bilingual teaching curriculum design for the "Simplified Calculations" unit in grade 4, and to examine students' learning effectiveness and learning perception. This study adopts the action research method, and the results of the study find that: (1) UbD-based curriculum design allows students to experience and explore simplified computing strategies can improve students' learning effectiveness; (2) Low-road contexts allows bilingual mathematics courses to take into account both mathematics learning objectives and English learning objectives; (3) The bilingual mathematics class of "Simplified Calculations" brings positive perceptions to students.

Key words: Simplified Calculations, bilingual mathematics, low-road contexts

國小低成就學生運用虛擬教具求解分數乘法計算問題表現 之研究

賴英杰¹ 袁媛²

¹臺中教育大學數學教育系 niketw2000@hotmail.com

²臺中教育大學數學教育系 yuan yuan@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討國小六年級低成就學生在求解乘數為真分數的乘法計算問題時，操作虛擬教具對其解題表現的影響，以及學生對兩種圖形表徵（矩形及數線）的喜好及接受程度。研究對象為臺中市某兩所國小的 33 名數學低成就（學習扶助）學生，利用平板輔具，讓學生實際操作兩種表徵模型，透過圖形的兩次分割，讓學生了解分數乘法算則的意義。經過一對一的教學後發現：一、在乘數為單位分數、真分數的分數乘法問題上，經由虛擬教具的教學介入，學生的解題表現有顯著的進步，但在分數乘法運算結果的大小比較問題上，則教學後並未有顯著的進步；二、在兩種不同圖形表徵的選擇上，學生較偏愛使用面積模型去解釋分數乘法的意義，經由卡方考驗，學生較喜愛的表徵模型是矩形。

關鍵字：分數乘法、分數圖形表徵、虛擬教具、數學低成就

壹、緒論

一、研究動機與背景

分數是未來學習代數的基礎，也有研究指出，早期的分數能力高低會影響之後的數學成就（Bailey et al., 2012）。許多學生在分數的學習出現困難，其中包含學生不理解分數的多重意義、對於分數大小的理解和處理能力不足以及無法將分數視為一個數等。Moss 與 Case (1999)認為在分數的教學時，存在最大的問題是教師經常太過強調分數運算的計算程序，而未著墨在分數運算意義的理解上。例如：在進行兩分數的乘法運算時，學生通常能夠知道分子乘以分子，分母乘以分母的算則，但不了解其中的意義。學生若只是按照學到的規則反覆操練，卻無法知道為什麼要這樣做時，可能導致往後學習上出現問題，也就是當算則變成一連串毫無意義的步驟時，學生就可能忘記其中的一些步驟或是出現算則誤用的情形。根據 Diene 與 Golding (1971)的感知可變性原則，在學習時如果能夠使用各種不同材料多次地展示相同的概念，就能有效地提升學習成效。例如：在教導一個抽象的數學概念時，若能提供學生使用這個概念形式化為具體的機會，向學生展示一個概念的多個例子，學生就能將這些不同的經歷聯繫起來而形成心像。所以在分數的教學中，若能妥善使用表徵輔助教學，將能協助學生建構正確的分數概念。

Ervin (2017)認為使用表徵模型，可以幫助澄清僅以符號形式呈現時可能會造成混淆的想法，也提供學生以不同的方式、不同的角度看待問題的機會，而某些模型的使用可能比較適合某些單元的教學，例如：面積模型可以幫助學生學習分數的部分整體概念，而線性模型闡明在任何兩個給定分數之間也可以找到另一個分數等。在教學中可以考慮三種特定類型的模型：二維面積、一維數線及集合模型，這在分數的學習和理解相當重要。

在表徵的使用上，教學現場中普遍使用實體教具，教師依照不同的數學單元製作符合課程需求的教具，但傳統教具製作費力費時，且折舊率高，造成教師教學準備上的困難。虛擬教具的出現，可以克服上述問題之外，動態的平移能在視覺上看到計算的流程，了解最終結果是經過了怎樣的步驟而得出，答案生成的過程讓學生接受學習的機會也提高許多(Finti et al.,2016)。Suh 等人(2005)使用了在國家虛擬操作圖書館 (<http://matti.usu.edu/nlvm/index.html>) 及 NCTM(<http://nctm.org>)上的兩種虛擬教具，在三天內每天操作互動一小時，發現經過虛擬教具的操作能提高學生的成績和整體學業成績，高成就組的學生會在紙上解決問題，然後用虛擬工具檢查他們的答案；而低成就組的學生因為對概念不熟悉，所以會自行從中摸索，透過動手做來學習，所以從虛擬工具的實際使用中受益是最大，成長幅度最為顯著。

過去有關分數表徵的教學研究多半聚焦在教師使用圖形表徵對學生學習的影響，Wilkie 與 Roche 的研究中發現，教師會在不同的分數單元根據自己的教學偏好使用了一種或多種的表徵類型，近四分之三的教師選擇了兩種以上的模型，使用不同的模型去解決相同的任務，能從中分析各個模型的優缺點，更能讓學生有機會在不同結構中去得到分數的知識。但少有研究從學生的角度探究使用圖形表徵對學生分數概念理解的影響，且由於課室中很少讓學生畫出分數的表徵圖形，很多學生不清楚如何利用圖形表徵來呈現分數的運算結果(李源順，2008)。特別是對於低成就的學生而言，分數的學習又比整數來得更加困難，所以如何協助其利用圖形表徵來學習是很重要的一環。基此，研究低成就學生運用不同圖形表徵求解分數乘法計算問題的解題表現成為本研究之動機。

二、研究目的

依據上述研究背景與動機，本研究的目的是在探討低成就學生使用虛擬教具表徵分數乘法意義的表現情形，具體的研究問題有二：

1. 透過操作數位虛擬教具的圖形表徵呈現，是否能提升低成就學生對分數乘法運算意義的了解？
2. 在操作數位虛擬教具的兩種圖形表徵(矩形及數線)解分數乘法的計算問題時，低成就學生對圖形表徵的喜好與接受度為何？

貳、文獻探討

一、分數的意義與教學

Kieren (1988) 提出分數的五種意義，包括部分全體關係(part-whole)、比(ratio)、商(quotient)、測量(measures)與運算子(operator)等，所以分數不單單只有部分全體的觀念，還有其他的關係，而研究指出學生的學習困難多在於無法了解及掌握分數的多重意義。Martín 等人(2022)研究職前小學教師對於分數意義的了解情形，研究結果發現，大部分的職前教師在部分整體關係表現最佳，但對於其他的分數意義的理解是不足的。如果教師不能正確地處理分數的各種意義，那麼提供給學生的學習經驗將會停留在較低層次的內容。而在分數乘法單元中，在乘數為分數時無法使用連加的意義來加以解釋，所以應該將其獨立於加法之外，在意義上視分數為運算子概念所形成的合成函數為較佳的方式

(Behr, Harel, Post, & Lesh, 1993; Izsák, 2008)。以 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 為例，運用運算子的伸縮

概念，先將 1 平分 2 等分得到 $\frac{1}{2}$ ，再將 $\frac{1}{2}$ 收縮 3 等分得到 $\frac{1}{6}$ ，然後再乘以 2 擴張得到 $\frac{2}{6}$ ，此種先縮後伸的方式是為運算子的概念。

過去的研究中發現發現學生對分數概念的理解中，在部分整體關係最為熟悉，其餘的概念較為欠缺。Charalambous 與 Pitta-Pantazi(2007)認為因為部分整體概念的引入時間最長，頻率最高，在五種分數意義上的重視程度造成不平衡，若能掌握分數的各種意義將能有助於熟練分數的運算，而商、運算子的概念可以解釋約 50%的學生分數乘法運算表現的變化。學生在分數主題的學習過程中，教師多從部分整體關係引入，而分數運算子意義因為難度較高，不只教師欠缺了解，恐也間接影響學生的學習，因此本研究將聚焦於學生對此意義了解之探討。

二、分數與整數的不同(整數偏誤)

Ni和Zhou(2005)認為兒童將分數與整數混淆，不僅僅是沒有掌握符號的問題，更多的是與概念重組的內部過程有關。儘管正整數是有理數的一個子集，但有些性質適用於正整數領域，卻不適用於更廣泛的有理數領域。因此，在解決分數問題時，依賴適用於正整數而非有理數的性質會導致系統誤差，這種現象被稱為整數偏誤(whole number bias)。

Reinhold 等人(2020)研究整數與分數的差異性，茲分析如下：

(一) 符號表示：每個自然數都有唯一的符號表示，例如：1、2、3 等等；而每個分數都有無限多個符號表示(等值分數)，例如： $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ 等。

(二) 運算規則：在整數及分數的運算結果上會有不同的現象，以乘法為例，當兩自然數相乘時，會使得積的結果比被乘數大，但對於分數來說，當乘數大於 1 時，其積會比被乘數大，但是乘數小於 1 時則會比乘數小。

(三) 分數具稠密性：連續的兩個正整數之間沒有其他正整數，例如 2 和 3 之間沒有其他正整數了；而且每個正整數都有唯一的前繼數和後繼數，例如 3 的前繼數為 2，3 的後繼數為 4。分數雖屬連續量，但任意兩個分數之間卻有無窮多個數，而且分數無法像正整數一樣有前繼數和後繼數。

(四) 比較數值大小：處理正整數的數值大小可以通過位值比較策略來解決。例如，36 大於 28，因為 3（十位）大於 2（十位）。但在處理分數的比較大小時，則需要推理兩個正整數(分子和分母)之間的數值關係，並將這種關係視為另一個分數(通分)，而不是將分子和分母視為兩個不同的數字。這些比較可能違反直覺，因為分子分母越大的分數不一定是越大的分數，例如： $\frac{7}{8} > \frac{2}{3}$ 。

在進行分數的運算時，以分數乘法為例，會出現以下幾種錯誤類型（黃依琳，2015）：

- (一) 先通分後，再將分子相乘，分母不變計算
- (二) 將第二個分數顛倒後，再計算。
- (三) 交叉相乘而得到分子與分母。
- (四) 分母相乘，分子卻作加法運算。

綜上所述，由於分數和整數有不同的性質，因此學生在分數乘法學習上的問題，可能因為整數偏誤的影響，導致認為乘法會越乘越大，也可能受到分數加減運算規則的影響而造成順攝抑制，以致未建立起乘法算則的基本概念。

三、分數乘法的表徵模型

Pape與Tchoshanov (2001)認為大腦的語言是由多種表徵組成，因此，學生思維能力需要發展多元表徵，其中表徵又分為外部表徵(external representations)與內部表徵(internal representation)，外部表徵包括形式符號、語言、圖片等，而內部表徵指的是在孩子心裡的圖像，例如數數物的圖像、數算過程等。為了在內外部表徵和它們所代表的數學概念之間做連結，以及數學和兒童的經歷之間建立聯繫，表徵必須在數學內容的社會環境中進行探索，才能使用表徵來建模和解釋物理、社會和數學現象。

一般而言，在分數的教學中常使用三種不同的模型，包括有數線模型(Line model)、面積模型(Area model)、集合模型(Set model)。在教授分數乘法時，面積模型是最常使用的表徵類型，因為是二維表徵，所以可以從長、寬兩個部分分別代表分數，但它並不是唯一可以使用的模型。在教學上應該使用不同種類的模型，教師應努力將這些模型與分數乘法的算則聯繫起來，使用不同的表徵模型可以用來檢驗學生是否理解分數乘法的運算，教師也能更清楚地知道學生對分數乘法的理解程度(Ervin, 2017)。

Son 與 Lee (2016)透過檢查 60 名職前教師在三種不同的情況下對分數乘法的理解，發現 89%的教師可以將分數乘法的問題用圖形表徵來解釋，其使用的表徵模型包括分數條、數線、圓形及集合模型。在 44 個有效樣本中，有 23 人使用分數條，1 人使用數線，14 人使用矩形，4 人使用圓形，2 人使用集合模型。所以在分數乘法的表徵模型中，最多人使用的是分數條及矩形模型。

Wilkie 與 Roche(2022) 在澳大利亞針對 198 名小學教師分析，探討教師在進行分數主題教學時，使用各種圖形表徵的情形。在其研究中發現，近四分之三的教師在每個分數題型中，選擇了兩種或三種模型的比例最多，而且根據不同的題型及分數的數值，教師有不同的喜好模型，而不是在所有情況下都使用相同的模型。有 69.4%教師使用集合（離散）模型，69.3%教師使用矩形（區域）模型；教師認為圓形模型最適合教授分數比較大小單元，矩形模型是最常用於教授分數的命名、等值分數單元。而在教授分數乘除法的計算中，超過 30%的老師不喜歡用表徵模型來呈現，僅以算則教授分數，他們認為主要是因為大多數的教師不知道如何將分數乘除法的概念以表徵呈現出來。

過往的研究較多是探討教師在分數單元使用的模型種類，較少關注學生端的部分，所以在學生面對分數乘法計算問題的解題時，會傾向於使用何種表徵來進行說明，則為本研究所聚焦的研究問題。

參、研究方法與流程

一、研究對象

本研究以立意取樣，選取臺中市市區兩所國小，並以在前一學年 5 月經檢測為學習扶助的六年級數學低成就學生為研究對象。在徵詢家長同意參與研究意願後，第一所學校有 23 人(男生 14 人，女生 9 人)；第二所學校有 10 人(男生 6 人，女生 4 人)，兩所學校合計共有 33 人（男生 20 人，女生 13 人）參與研究，本研究並依施測順序將學生編碼，從 S1~S33。

二、研究工具

(一) 檢測前後問題

本研究為不誘導學生使用特定的表徵模型，題目設計皆去情境化，僅以計算題方式呈現。題目當中分數的數值以真分數為主，因研究目的在於探討學生

對於分數乘法表徵模型的愛好，假分數、帶分數在表徵使用上較為複雜，故限縮乘數為真分數，因此本研究僅使用真分數乘以真分數作為檢測(前後)問題的題目。檢測(前)問題共有 3 題，第 1 題是判別一個分數乘以真分數後與原分數進行大小比較，第 2 題為真分數乘以單位分數，第 3 題為真分數乘以真分數。檢測(後)問題共有 3 題，題目類型與檢測(前)問題相同，僅數據略作調整。

(二) 教學軟體

本研究使用 Fraction multiplication(<https://ppt.cc/fQXfFx>)APP 軟體，其表徵模型有兩大種類：連續量與離散量。模型有：數線模型(Number line model)、面積模型-矩形(Area model- rectangle)、面積模型-圓形(Area model- circle)、分數牆(Fraction wall)、離散數據類型以蘋果為計數單位，共 5 種類型。

而本次實驗研究聚焦於一維與二維模型的探討，一維表徵模型選取數線模型，二維表徵模型包含矩形、圓形。Sidney 等人 (2019)在實驗中使用面積模型中的圓形、矩形兩種表徵去教學，發現未達顯著差異。而矩形的長、寬在呈現兩分數乘法時也較為容易，所以最後選擇矩形模型作為二維表徵的使用。在教學實驗中主要提供兩個圖形表徵（數線與矩形），來探討分數乘法的意義及結果。

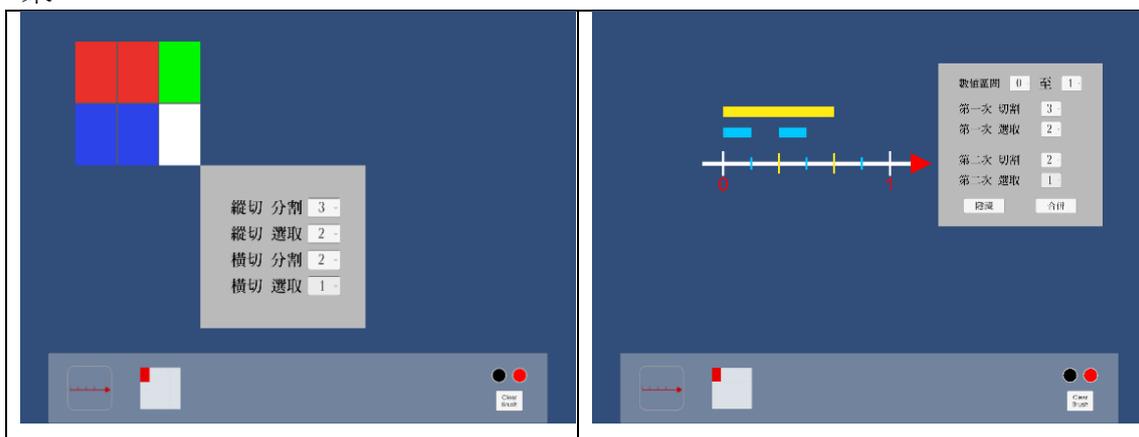


圖 1 分數乘法表徵操作示意圖

(三) 訪談大綱

研究者事先設計問題的綱要作為學生學習表現紀錄單，其中包含要觀察的行為，及學生可能回答的答案類型以做紀錄，每個題目都另有一欄為其他回答，可供研究者額外紀錄。一邊進行平板教學時，一邊將學生的回答勾選分類，每個步驟都會搭配固定的問題，例如在分數比大小的題目中，會問到兩個問題，

問題 1：哪一個分數比較大？ $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 及問題 2：為什麼你覺得 () 比較大？

如果學生的回答不明確時，再進行追問，但研究者一律不使用誘導問句，而是針對學生回答的內容再確認所表達的意思，反覆地請學生再多說一些。例如請問你回答的這句話代表什麼意思？你比較喜歡這個模型的理由是什麼？還有其他原因嗎？由研究者簡記關鍵的字句，在教學的過程中輔以平板螢幕擷取錄影功能輔助錄音錄影，以保存第一手的研究資料，訪談結束後再作文字轉錄謄寫(transcribing)，最後再由研究者分析資料內容並作出結論。

三、研究流程

進入教室後向學生說明活動進行方式，告知其相關權利，了解後願意進行施測再進行簽到。教學時間約為 40 分鐘，使用平板的螢幕擷取功能進行錄製，其教學流程如下：

(一) **分數乘法先備知識檢測**：受試為 5~8 分鐘，由研究者讀題，並確認學生是否了解題意。第一題回答方式為先圈選較大者後，口頭敘述或是紙筆寫下為何較大的原因，並於紀錄表上記錄之。第二、三題則是請學生先計算出分數乘法的答案，再請學生回答如何算出答案。然後再讀題目一次，請學生回答，若是用畫圖的方式來說明上述的計算過程，你會如何畫出？最後請學生在題目的下方將圖畫出。

(二) **分數乘法教學**：教學時間為 20~25 分鐘，然後使用平板作為教學工具，引導學生使用平板中的表徵軟體操作出各種不同的表徵圖形，示範完畢之後，安排練習題讓學生操作。在檢測(前)問題第三題時，詢問學生在解分數乘法問題時所喜好的表徵類型，並請學生說明喜愛的理由。

(三) **檢測(後)問題**：受試為 5~8 分鐘，共有三題。其流程與檢測(前)問題相同，僅在畫圖部分有所不同，因為已實施了平板教學，所以學生可以自行畫出圖形，若學生有做答的困難，再提供平板讓學生操作輔以畫出圖形。

肆、研究結果與討論

一、學生在不同分數乘法問題的解題表現

(一) 分數乘法運算結果的大小比較問題

教學介入前的平均數為 0.82，標準差為 0.392，教學介入後的平均數為 0.97，標準差為 0.174。以相依樣本 t 檢定檢驗前後表現差異，得到 $t = -1.971$

($p = .057$ ， $p > .05$)，Eta 平方(η^2)等於.007，即在分數乘法運算結果的比大小問題，學生在教學介入前與介入後的解題表現無顯著差異。在分數乘法運算結果的大小比較問題中，雖未能達到統計上的顯著差異，但 p 值為.057，已相當接近.05的顯著差異門檻，可能因樣本數較少，因此不易達到統計上的顯著差異。

研究者在教學介入前要求學生不要計算，先判斷兩者之大小關係。回答錯誤的有 10 人，當中有 7 人受到整數乘法的影響，在說明大小結果時，認為只要是乘法就會變大。另外 3 人表示不知道原因。回答正確的有 23 人，當中有 14 人仍選擇計算出結果之後再比大小，有 2 人說不出理由。在分數乘法運算結果比較大小這個問題的探討上，主要是要知道學生是否掌握乘以一個真分數的結果會使結果變小這個概念，只有 7 人以乘以比 1 小的數會變小的概念而做出正確的判斷，大多數的學生還是會經過算則的計算後再依計算結果判斷大小關係。

而在經過教學介入後，可能因運用分數乘法模型解題的過程中，學生可以看到分數的乘法會產生更小的乘積，因此有 26 人已能不用計算即回答出結果。由於本教學介入並未直接提示學生這個乘法的計算結果會使得乘積變小，因此仍有 7 人是使用算則先計算出結果之後再判別大小關係，學生在解題時看到未完成的運算會傾向以去做計算，並未掌握乘以一個小於 1 的分數結果會使結果變小的概念。

(二) 分數乘法(乘數為單位分數)的解題表現

教學介入前的平均數為 0.70，標準差為 0.467，教學介入後的平均數為 1.00，標準差為 0.000。以相依樣本 t 檢定檢驗前後測表現差異，得 $t = -3.73$

($p = .001$, $p < .05$), Eta 平方(η^2)等於 1.000, 即在分數乘法(乘數為單位分數)問題中, 教學介入後學生在這個問題的表現有顯著的進步。

教學介入前答對的人數有 25 人, 當中有 19 人已經知道分數乘法的算則, 了解可以利用分子乘以分子, 分母乘以分母的方式算出答案, 但當中能正確畫出表徵圖形僅有 1 人。而有 6 人不能說明算則意義的, 也就是可以算出

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$, 但是卻不知道如何解釋這個計算結果。本研究發現, 學生大多可以

使用運算規則算出正確答案, 但學生多對為什麼這樣做之後就能得到答案缺乏理解, 因此學生對如何以圖形表徵來進行說明感到困難。

在教學介入後, 學生已能掌握分數乘法的意義, 因此能使用圖形表徵來說明其運算結果所表示的意義。當中有能使用矩形表徵, 利用直切、橫切兩個方向分割得出全部的分割數為乘積的分母, 再利用雙斜線方式得到乘積的分子, 如圖 2 所示。也能使用數線表徵, 在 0~1 之間先切 5 等份取其中 3 份表示 $\frac{3}{5}$,

再將全部的 5 等份再各自切割 3 份, 將 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}$ 的部分表示出來, 再透過點數或平

移得到 $\frac{3}{20}$, 如圖 3 所示。

S4(運用矩形表徵, 直切 5 份取 3 份, 橫切 4 份取 1 份)

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

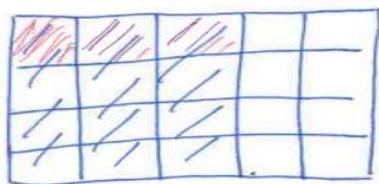


圖 2 學生 S4 矩形表徵畫圖

S21(運用數線表徵, 以坐標方式表示)

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

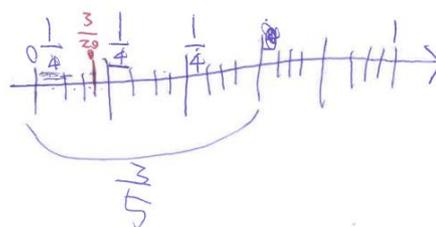


圖 3 學生 S21 數線表徵畫圖

(三) 分數乘法(乘數為非單位分數的真分數)的解題表現

在分數乘法(乘數為單分數)問題中, 教學介入後學生在這個問在乘數為非單位分數的真分數乘法檢測問題中, 檢測前的平均數為 0.85, 標準差為 0.364, 檢測後的平均數為 1.00, 標準差為 0.000。以相依樣本 t 檢定檢驗前後測表現差異, 得 $t = -2.39$ ($p = .023$, $p < .05$), Eta 平方(η^2)等於 1.000, 即在乘數為非單位分數的真分數乘法問題中, 教學介入前與介入後有顯著差異。

教學介入前答錯的人數有 5 人, 當中有 4 人受到順攝抑制的影響, 即過去學過分數加減法的舊經驗對分數乘法的新經驗產生干擾, 導致了負向遷移, 寫

出 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} = \frac{72}{12} = 6$ 的算式。

教學介入後，學生全數答對本問題，因為在後測第二題中已經熟悉了自己選擇模型的畫法，在第三題答對率達到 100%。在經過後測的練習後，已能修正前測時對於被乘數與乘數的分數分別畫出的方式，有 24 人可以經過平板的操作，再畫出最後的答案。當中有 9 人已經可以不需要藉由平板輔具而能自己畫出圖形，還可以說出乘法的意義。

二、學生在不同圖形表徵的喜好程度

本研究主要在檢驗學生對一維線性及二維面積表徵的喜好差異，因此進行教學介入後兩類表徵喜好的卡方考驗，分析結果發現 $\chi^2 = 8.758$ ($p = .003$ ， $p < .05$)，Eta 平方(η^2)等於.111，即教學介入後喜好矩形與數線表徵的學生人數有顯著差異，也就是教學介入後，學生比較喜愛的表徵模型是矩形。

表 1 呈現學生在教學介入前後所使用的圖形表徵模型統計表。教學介入前，33 人中有 13 人不會畫圖解釋分數計算乘法的意義，其它嘗試用畫圖解釋的學生，選用的表徵圖形，包括圓形、矩形、數線、離散量等四個類型。教學介入前選用圓形有 12 人，矩形有 5 人，屬於二維面積表徵，而教學介入後仍有 14 人繼續選擇面積模型。教學介入前不會畫圖的有 13 人，在經過教學介入後有 9 人選擇矩形模型，4 人選擇數線模型，選擇矩形模型的人數高於數線模型。由上述教學介入前後，學生選用模型之結果分析，可以發現學生較偏愛使用矩形面積去解釋分數乘法的計算意義。

表 1 學生在教學介入前後所使用的圖形表徵模型

		介入後		
		矩形	數線	總和
介入前	圓形	11	1	12
	矩形	3	2	5
	數線	1	0	1
	離散量	1	1	2
	不會畫圖	9	4	13
	總和	25	8	33

伍、結論與建議

本研究以中部地區兩所國小的 33 位數學低就學生為研究對象，探討其對分數乘法計算意義的了解情形，並使用平板數學虛擬教具進行教學，以提升學生對於分數乘法意義的瞭解，並探究學生對於矩形、數線表徵的喜好與接受度。根據研究結果發現，學生在經過教學介入之後，對於分數乘法意義的了解有明顯的改善，且學生較偏愛使用矩形表徵去解釋分數乘法的計算意義。在未進行教學介入前，多數學生無法以圖形表徵說明分數乘法的意義，因此在判別乘數為真分數的問題上，仍倚賴計算結果進行判別，再加上受到整數偏誤的影響，因此做了錯誤的判斷。因此建議在未來的教學，教師可以多利用矩形表徵模型去協助低成就學生建立分數乘法算則的意義，也應鼓勵學生能自行利用圖形表徵探討分數乘法的計算意義，避免學生只是強調算則的記憶，忽略概念的了解

參考文獻

- 李源順。(2005)。同分母真分數加減運算的教學建議。台灣數學教師電子期刊, 3, 2-26。
- 黃依琳(2015)。桃園地區國小六年級學生分數四則運算之錯誤類型分析。〔未出版之碩士論文〕。國立臺南大學應用數學系數學科教學碩士班。
<https://hdl.handle.net/11296/c5bux7>。
- Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(3), 447-455.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics, 64*, 293-316.
- Dienes, Z. P., & Golding, E. W. (1971). *Approach to modern mathematics*. Herder and Herder.
- Ervin, H. K. (2017). Fraction Multiplication and Division Models: A Practitioner Reference Paper. *International Journal of Research in Education and Science, 3*(1), 258-279.
- Finti, H. N. F. M. M., Shahrill, M., & Salleh, S. M. (2016). Integrating virtual manipulative with the use of iPad in the teaching and learning of fractions. *Knowledge Management & E-Learning, 8*(4), 581 -601.
- Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and instruction, 26*(1), 95-143.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147.
- Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.
- Post, T., Behr, M., Harel, G., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Towards a semantic analysis—emphasis on the operator construct. *Rational numbers: An integration of research, 13-48*.
- Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice, 40*(2), 118-127.
- Reinhold, F., Obersteiner, A., Hoch, S., Hofer, S. I., & Reiss, K. (2020, April). The interplay between the natural number bias and fraction magnitude processing in low-achieving students. In *Frontiers in Education* (Vol. 5, p. 29). Frontiers Media SA.
- Suh, J., Moyer, P. S., & Heo, H. J. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning, 3*(4), 1-21.
- Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-service teachers' understanding of fraction multiplication, representational knowledge, and computational skills. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 5-28.
- Sidney, P. G., Thompsonb, C. A., & Riverac, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology, 58*, 288-298.

A study on the performance of low-achieving elementary school students who was using virtual teaching aids to solve fraction multiplication calculation problems

Ying-Jie Lai¹ Yuan Yuan²

¹Department of Mathematics Education, National Taichung University

²Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

The purpose of this research is to explore the influence on low-achieving sixth grade primary students who was solving multiplication problems, which multipliers were proper fractions, by operating virtual teaching aids ; also their preferences and acceptance on two on kinds of graphical representations (rectangle and number line). The participants of the research were 33 students, who received remedial assistance, with low-achieving mathematics performances from two elementary schools in Taichung City. Using tablet aids, students could operate two representation models. Through the twice divisions of graphics, students understood the fraction multiplication algorithm meaning. After one-on-one teaching, it was found that: 1. On the problem of multiplication of fractions whose multipliers are unit fractions and proper fractions, students' problem-solving performance had improved significantly through the intervention of virtual teaching aids, but comparing the magnitude of fractions after the operation result of fractional multiplication, there was no significant improvement after teaching; 2. Within the choice of two different graphical representations, students prefer using the area model to explain the meaning of fraction multiplication. After the chi-square test, students prefer rectangle as the representation model.

Key words: multiplication of fractions, graphical representation of fractions, virtual teaching aids, low achievement in mathematics

CLIL 融入數學桌遊之教材設計研究

潘柏翰¹ 陳玟樺²

¹台北教育大學數學暨資訊教育學系 dade8046@gmail.com

²台北教育大學數學暨資訊教育學系 chenwenhua@mail.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在探討於台灣推動雙語政策背景下，本土中學數學教師為解決教學現場數學雙語教材懸缺問題，意圖結合專業行動與研究，並與專家學者和學校成員共同合作，將問題發展成研究主題，並進行有系統探索，其行動與研究之焦點主要在開展 CLIL 融入數學桌遊的教材設計。本行動研究旨在探究中學數學教師將 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計理念和其所關照的教材設計要素，兼顧專業行動與研究之雙重性質，是一重視結合理論與實際的研究，過程中強調參與者即研究者，思想與行動相互為用。

本研究發現，數學教師將 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計理念主要為提升學生雙語數學學習的興趣、強化學生數學思維能力等，而其所關照的 CLIL 數學教材設計要素主要有二，一為「以四則運算重要概念為發展雙語數學任務的優先考量」，另一為「聚斂於完成雙語數學任務所需具體形式的英語言支持」。本研究最後亦提出行動研究後的幾點反思。

關鍵字：CLIL、雙語數學、桌遊、四則運算、行動研究

壹、緒論

一、研究動機與背景

(一)為回應本土「2030 雙語政策」展開雙語數學教學之行動

2018年，行政院國家發展委員會發布「2030 雙語國家政策發展藍圖」（後於2022年更名為「2030 雙語政策」），依據「2030 雙語政策」，由國家發展委員會與教育部協同相關機關辦理110年至113年各項工作規劃第二項「高中以下英語教育之課程（課綱）、課外學習」中第一點推動策略「推動高級中等以下學校運用英語進行多領域學習」（教育部，2021）的落實，在教育現場投入不小震撼彈。為回應雙語政策，本土學科專家、學者及師生無不致力於將目標語（尤其為英語）融入於學科教學，其中以「學科內容和語言整合學習（Content and Language Integrated Learning, CLIL）為取徑在雙語學科教學之應用更受到廣泛討論（鄒文莉、高實玫，2018；呂妍慧、袁媛，2020；陳玫樺，2022），也讓語言和學科的整合學習較以往受到更多關注與探索。

雙語教育所指涉是在教育的過程中，以兩種語言來進行，而在臺灣的政策脈絡下，雙語所代表的是國語與英語這兩種語言，國語為目前臺灣多數人之共通語，英語則為臺灣推動雙語教育時之目標語（林子斌，2020）。雙語教學將「雙語」概念化為共通語和目標語，而本文討論的共通語是臺灣華語，目標語是英語，可概括地視為世界上作為既成事實之溝通語言的世界英語（Global English）或全球語（Globish）（陳超明，2012）。本土的雙語政策上路至今約五年，中小學教學現場究竟如何實施雙語學科教學實徵研究急需共力，而探討現場教師如何發展雙語教材更是重要主題之一。本研究第一作者為中學數學教師，為回應2030 雙語政策採取有初步教學行動，在初始階段，先透過研讀相關文獻研究、與專家學者共備，初探雙語融入數學教材設計之相關內涵，並在行動中同步進行探究，此乃促成本研究濫觴之一。

(二)透過 CLIL 融入數學桌遊教材設計促進學生雙語學習興趣之意圖

許多研究均顯示，數學遊戲結合教學能引起學生的學習興趣和動機，並對其數學學習態度有正面的影響（許桂英，2004；陳麗霜，2006；賴勤薇，2011），而數學遊戲結合教學也能提高學生的學習成就（賴勤薇，2011）、提供創造力發展的情境（Bruner, 1972；吳承翰，2011）。近年來，將桌上遊戲（board game）應用於教學現場更受到教學者的青睞。尤其，近兩年「微翻轉遊戲式教學模式」的提出與應用，注重迷你教育遊戲的開發，遊戲時間短、易在課堂時間活動的特性（侯惠澤，2016），令許多教育工作者趨之若鶩。換言之，透過數學遊戲的數學教學與學習，有助於學生在數學認知、技能及情意上之投入與促進。

基於未曾為英美殖民的臺灣欲常態性實施運用英語進行課室領域教學並不容易，然若對雙語教材有所慎思與規劃，如將透過編制雙語教材原則將雙語融入數學桌遊中，以讓學生透過桌上遊戲自然地進行雙語數學學習之設計，乃值得嘗試。為此，本研究意圖引進「遊戲式學習」，其藉由桌遊結合雙語教學的教材設計，期作為引起學生雙語學習興趣及動機之「引」，後也能經過不斷調適與改進，最後能直接應用於雙語數學課室教學中。此有機會透過作中學逐步確認較適於本土雙語數學課室教學之運作方式，乃本研究動機之二。

二、研究問題

依前述研究動機與背景，本研究提出的主要研究問題有二：

- (一) CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計理念為何？
- (二) CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計要素為何？

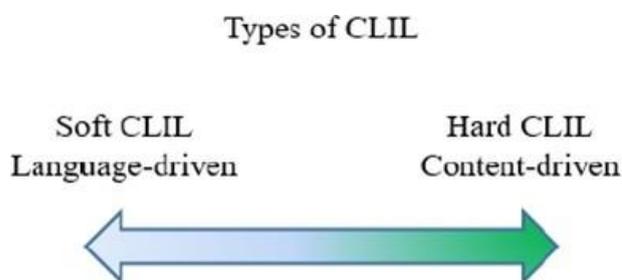
貳、文獻探討

一、CLIL 教學意涵之分析

CLIL 是 Content and Language Integrated Learning 的英文縮寫，意指學科內容與語言整合教學，即以外語（通常非母語）來教導如數學、自然等學科，且多由非母語的學科或語言教師來擔任師資，以期透過學習整合的方式，達到外語和學科知識都有所獲的雙重學習目標

（Coyle, 2005）。換言之，CLIL 就是將「語言」和「學科」學習整合在一起之一種新興雙語教育模式，CLIL 被視為有不同比例之學科內容和語言教學整合而成的教學光譜，光譜兩端分別是以學科內容為教學主體的「硬式 CLIL」（Hard CLIL）模式和以語言教學為重點的「軟式 CLIL」（Soft CLIL）模式，如圖 1。語言和學科都有重要作用，教師可依據學生學習等條件做適當規劃，例如，「硬式 CLIL」適用於主題學科的課程目標(或教學目標)所採行的外語教學，此與當前國內大學以英語教學專業課程相近，而根據十二年國教英語領綱規劃，國小低年級以彈性學習的方式實施英語主題式教學，將英語化為無形，則較近似「軟式 CLIL」。

圖 1 CLIL 教學光譜圖



Coyle (1999) 指出，CLIL 課程框架包括四要素：內容（content）、溝通（communication）、認知（cognition）及文化（culture），其中學科內容的學習讓語言知識得以與真實語境融合，加深學生對學科知識及語言的記憶和掌握；語言溝通指在 CLIL 課堂上使用語言交流和表達與課堂內容相關的信息、觀點、內容的能力；認知是對學生思維能力的訓練；培養跨文化意識和多元視野不僅有助於加深學生對國家文化的認同，也能透過了解其他國家文化而促進相互理解。基於 CLIL 強調語言和內容一樣重要，而課堂中外語學習活動皆應環繞於學科主題發展，透過，即 4Cs 架構來設計課程，有助於利用學科主題內容創造外語溝通環境，促進學生溝通交流及訓練思維能力。

CLIL 教學能刺激後設語言技能，從而促進對數學語言的理解（Jäppinen, 2005）。與傳統教育相比，透過 CLIL 數學教學的學生學習表現較優異（Murray, 2010；Van de Craen & Ceuleers & Mondt, 2007）。在本土方面，陳慧琴、呂翠玲、許熒華、鄒文莉（2018）指出，CLIL 數學教學時，數學教師可與英語教師一同合作，以決定適合融入的數學領域和英文知能。呂妍慧和袁媛（2020）指出，國小學童的 CLIL 數學教學模式和其流程包括：情境分析、數學主軸、目標語言、認知鷹架、整合學習，以及課室管理，以協助教師發展雙語數學教學的教案，亦具參考價值。此外，陳玟樺（2022）以芬蘭雙語教育政策為借鏡也對本土實施雙語教學做出提醒，如進行雙語教學時以母語作為個人語言的基礎之重要性，實施雙語教育應以母語作為發展雙語教育的根基，均能裨益於雙語學習之成效。換言之，一旦把握 CLIL 核心概念和相關原則，並注重以母語為根基的雙語學習，透過合適的雙語數學教材設計，CLIL 數學教學將能對學生雙語學習發揮正向影響力。

綜言之，本研究所稱 CLIL 數學教學係指在數學課進行數學學科內容和英語整合之教學，即同時以中、英語兩種語言做為教師教學語言來教授數學學科知識。應注意是，在 CLIL 數學課堂上，教學者應根據學習者的學習條件與背景、教學情境，以及師生準備度等，隨時

在課堂中調整中、英語之使用情形，以確保學習者的數學學習和雙語能力獲得促進，讓語言與學科之雙重目標均能達致。

二、CLIL 教材設計原則之分析

Ball (2018) 指出，有志於將內容和語言學習融合在一起的教學設計，就應有適用於語言與學科教學的 CLIL 教材設計原則可考量，以使學習者能在 CLIL 環境中發揮作用。為此，Ball (2018) 借鏡 Ball 等 (2015) 等學者論述，提出一包含七個項目的 CLIL 教材設計原則，茲將其整理如表 1。

表 1 CLIL 教材設計七大原則

	原則	意涵
一	任務的優先性 (文本-任務關係)	教學者須根據任務的目標、過程和結果選擇輸入材料，而任務安排應有助於最大化文本內容和格式
二	教學內容優先考慮的三個維度	包括(1)概念、(2)理解和操作內容並解決任務的程序選擇，以及(3)理解內容和完成任務所需的具體語言。教材須在這些維度之間保有平衡
三	指導輸入和支持產出	教材應包含支持理解關鍵特定術語和幫助學習者發展口語和書面語言技能的活動，亦應提供語言支持（例如，關鍵短語、樣本段落、語言意識）以解決任務
四	鷹架和嵌入式	應對任務完成提供明示和隱含形式的語言支持
五	凸顯關鍵語言	利用明示或暗喻的方式，凸顯關鍵語句，並加深學習
六	「難度」的掌握	任務可具有挑戰，而非文本內容，故任務需要從較少要求到較高要求進行排序
七	連貫性	隨工作單元的進展，語言也會從更通用的學術語言逐漸轉向更複雜和具體的術語和結構

基於 Ball (2018) 所指出的 CLIL 教材設計七大原則可知，真實性也應被視為指導任務和文本的選擇和開發的原則。Gilmore (2019) 指出，真實性通常與材料相關聯，通常意味著輸入端沒有以任何方式進行修改（如語言表達或內容複雜性），以容納 L2 語言使用者。從更複雜的角度觀之，Pinner (2019) 提供了證據，其表示當真實性通過主題和材料進入課堂時，這種激勵的環境會為語言學習帶來更好的條件，因此動機上的協同作用對於 L2 的發展和熟練程度產生積極影響。

綜言之，本研究以為，當真實性成為語言教學和學習的系統特徵時，會有助於學習者學習動機的促發，從而促進教師，在教學實踐中充滿活力和創新。據此，在關照 CLIL 教學設計七大原則下，若能同時把握這種激勵環境導致更好的語言學習條件，對語言和學科內容的學習將可能產生積極影響。

三、數學四則運算概念之探討

四則運算顧名思義就是算式裡有加、減、乘和除的符號，在學習四則運算的過程中，從一步一步由簡入難，從單一步驟、兩步驟到多步驟的方式進行混合符號的計算。學生從國小一、二年級開始學習加、減法及乘法的觀念，並能解決兩步驟不包含併式問題，而在三、四年級的階段，孩童應統整已過學會的加法、減法、乘法和除法的概念，除了熟練計算技巧之外，亦能於真實情境中處理混合計算的問題，並學習如何使用併式。綜觀三年級到六年級一再出現四則運算的能力指標，學生的四則運算能力可說是所有計算能力的基礎，學生若未具備熟練的運算能力，將會在後續數學學習上產生相當挫折（呂玉琴，1988）。至於在國中數學課綱領域中，四則運算所歸類的數與量單元，也是國中數學裡的重要基石。

在整數四則運算單元中，學生需學習併式的記法，其中包括連續乘法、除法以及乘除混合的計算，而學習寫併式需遵守三種原則：(一)看到算式有括，則括號內的數字要先計算。(二)遇到算式中只有單純的乘除法或是加減法，這兩個種類時，由左到右一一地進行計算。(三)先乘除後加減。本課程設計將著重在整數四則運算的計算列式能力上，彙整文獻後，整理出整數四則運算常見的迷思概念有五：一、兩步驟的併式記錄錯誤，先算加(減)再算乘(除)，寫成併式時，先算的部分忘了加上括號。二、忽略等號的對稱性，最後的答案正確但計算過程錯誤。三、在僅有加減的算式中，應由左而右計算，但卻先算加法、再算減法。四、在僅有乘除的算式中，應由左而右計算，但卻先算乘法、再算除法。五、四則運算的規則有所混淆，如知道括號要先算，但其餘的卻是由左而右計算。針對前述三項基本原則，當設計四則運算相關教學設計時，將參考此五大運算迷思為考量。

綜言之，本研究 CLIL 融入數學桌遊教學設計，將著重於整數四則運算的計算列式與運算能力上，考量前述整數四則運算的三項基本原則及學生容易遭逢的五種迷思概念，輔以對於雙語教材設計原則之慎思與轉化，逐步發展出初始階段的 CLIL 融入數學桌遊之教學設計。

四、數學桌遊之探討

桌遊(Board game、Tabletop game 或 Table game)又稱為「不插電遊戲」，泛指不需要插電，只要是任何在平面上進行的遊戲稱之。Donovan (2017)認為，相對於線上遊戲(online game)、電腦遊戲(video game)等需要借助網路連線、電腦的遊戲，桌遊再度受到玩家或學習者歡迎原因之一，便是諸多玩家或學習者可能已產生「網路疲勞」(internet fatigue)，而手握牌卡的感覺讓人覺得踏實、具備多重感官體驗所致。Parlett (1999)指出，桌遊是在紙張或板子形成的平面上，利用遊戲配件（如棋子、卡牌、數字盤等）遵守固定的規則，多名玩家在上面發揮智能、進行玩樂、競爭或合作的遊戲。Gobet, Voogt 與 Retschitzki (2004)認為，桌遊具固定的遊戲規則，規則限定了桌遊板面上的配件數量、存在位置和移動方式，而配件之間的移動是相互影響的，甚至一個小動作可能影響整個局面。

陳介宇 (2010) 指出，選擇桌上遊戲作為學習的媒介，增進並刺激兒童學習，比其他學習媒介所具備的優勢有三：(一)資訊充足的環境：遊戲的豐富情境所運用的認知技能，比課堂上透過講述所獲得的技能更真實，經驗更深刻；(二)能讓兒童參與的意願高：愛玩是兒童的天性，對遊戲會主動積極參與，使其在獲得相關技能知識時事半功倍；(三)可激發高層次的思考：玩遊戲時訓練出的高層次思考技能，是傳統課堂上較缺乏的部分。近年來，將桌上遊戲應用於教學現場，逐漸受到教學者的青睞。加上近兩年「微翻轉遊戲式教學模式」的提出，即注重迷你教育遊戲的開發，其遊戲時間短、易在課堂時間活動的特性（侯惠澤、周逸璇、陳昊暉，2014），令許多教育工作者趨之若鶩。事實上，許多數學桌遊也被運用在學校數學課堂上使用，幫助學生更加生動、有趣地學習數學知識，並促進互動與合作精神。換言之，透過桌遊為中介來學習具有寓教於樂之正向學習意涵。

綜言之，基於數學桌遊乃是一富有利用遊戲機制、蘊含數學概念與技巧學習設計而成的

數學桌上遊戲，透過這些遊戲，學習者在感受興趣同時，亦能增強其對數學的理解和應用能力，以及培養解決問題和推理的能力。然若能適度考量雙語學科教學設計元素，亦可能透過得當的雙語數學教材之研發，同時促進學科知識與語言學習的雙重學習力。

參、研究設計

本研究 CLIL 融入數學桌遊教材設計探索，主要為第一作者正在進行中的碩士論文「雙語數學教材設計」部分研究，其碩士論文中尚包括「雙語數學教學實施」（含將雙語數學教材移入課室中使用）研究。然而，基於整體研究時程規劃因素，本次研討會僅先針對「雙語數學教材設計」這部分的研究加以探討，以下是此部分的研究方法說明。

行動研究法兼顧專業行動與研究之雙重性質，是一重視結合理論與實際的研究，過程中強調參與者即研究者，思想與行動相互為用（陳伯璋，1990）。本研究旨在探討於台灣推動雙語政策背景下，本土中學數學教師為解決教學現場數學雙語教材懸缺問題，意圖結合專業行動與研究，並與專家學者和學校成員共同合作，將問題發展成研究主題，並進行有系統探索，其具體行動與研究之焦點主要在開展 CLIL 融入數學桌遊的教材設計上。

據此，本研究為一行動研究，從 2022 年 4 月中開始研擬研究計畫至今（2023 年 4 月中）約一年的教材設計探究歷程，每一次的行動研究循環都包含了計劃、行動、觀察、反思等四個行動研究步驟。研究者在行動研究的過程中不斷地與專家學者、學校教師等多方進行討論，以達到反思與修訂下一階段的行動計劃，最後暫得今初步之研究成果。易言之，本研究架構非直線型立定，而是根據行動研究之循環歷程，透過階段性的發現問題、修正調整後，再次進行 CLIL 融入數學桌遊教材設計的調適，以規劃出較適於目標班級學生的雙語數學教材。

肆、初步研究結果

一、CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計理念分析

本研究參考市面上的桌遊「法老密碼」遊戲模式，結合本研究第一作者所教授的七年級數學「四則運算」單元，針對「N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算」進行 CLIL 融入數學桌遊教材設計，期藉由在遊戲中學習，促進學習者主動參與雙語數學學習意願，同時提升雙語數學學習表現及興趣，從做中學中逐步發展本土的 CLIL 融入數學桌遊教材設計之初步架構可能性。

本研究第一作者目前服務於新北市 H 中學，所設計的 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」教材以所教授班級之一的七年 A 班共 29 位學生為對象。此班學生家長有 70% 是來自雙北都會區的中產階級，學生入學時依智力測驗採 S 型常態編班，班級內學生程度不一，然多數學生生活潑開朗，且樂於表達心中的想法，與老師們有良好互動。本 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」教材設計之規劃，將先進行「小而美」教材設計，即本研究所指 CLIL 融入數學桌遊教材設計，係以桌遊「法老密碼」搭配七年級「四則運算」單元為雙語教材的主題素材，最終以呈現出「法老密碼雙語學習單」成果為主的設計。

「法老密碼」是一個以四則運算為核心概念的桌遊，其遊戲規則為：以 4-5 人一組，每個人回合都是獨立進行，輪到我方時，骰出 3 個多面骰，根據骰出的點數，利用四則運算組合出相對應的版塊數字，在場其他玩家確認無誤後，即可獲取板塊，輪替制下一位玩家，當遊戲時間結束或場上沒有可以選取時板塊，計算每位玩家手上版塊後方的聖甲蟲數量，最多的人為贏家。換言之，此款遊戲不僅可促進玩家運用且熟悉所學的數學運算能力，在遊戲過程中，亦能激發學生的數學思維和邏輯能力。

根據本研究規劃與設計，此「法老密碼雙語學習單」可於七年級進行「四則運算」單元之前、中、後的數學課堂彈性運用。在課堂上進行此遊戲活動時，透過「法老密碼雙語學習

單」，師生可檢視每回合的算式，將遊戲過程書面化、資料化，讓遊戲變得有學習意義，課程更有趣生動，將有助於促進學習者的數學學習和雙語能力，也能讓學生從較自然且有興趣地接觸雙語數學學習機會。本研究為延續學生接觸雙語數學學習機會，預計完成「法老密碼雙語學習單」後、移入課室實施的期程為每周一節，共三周（共三節）後執行結束。

綜言之，本研究 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」教材設計理念主要為：期透過數學桌遊「法老密碼」和「法老密碼雙語學習單」的設計，達到以下教學目標：提供學生多元適性的數學學習「四則運算」方式、提升學生主動雙語數學學習的興趣、強化學生雙語數學學習專注力、強化學生數學思維能力，以及培養學生樂於透過多模態(multimodality)、多元表徵方式來從事雙語數學學習，以穩固數學學科知識與提升雙語能力。

二、CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計要素分析

根據前述 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」教材設計理念，本研究進一步參考國內外雙語、雙語數學教學教材之相關文獻，並與學者專家共備與請益，在以 Ball 等(2016)所提出之 CLIL 教材設計七大原則為主要考量下，針對 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼雙語學習單」設計，已初步建構出幾項雙語教材設計要素。基於本研究規劃時程與此次投稿時間較為緊湊等因素，以下僅先就發展較為完整的兩項要素分析如下：

(一) 以四則運算重要概念為發展雙語數學任務的優先考量

在 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼雙語學習單」設計上，基於此款桌遊「法老密碼」的遊戲進行方式幾乎均圍繞於「四則運算」基礎概念上，即遊戲本身便具有幫助學生強化或複習數學四則運算歷程之不同層次，且能提供多元思考解題方向的機會，如圖 2，對於 CLIL 融入數學桌遊中於數學知能上的促進，其效果可說相當鮮明。換言之，此遊戲所蘊含的數學概念或是操作內容有助於鞏固學生能藉由問題中的數量關係，列出恰當的算式解題，其中可包含較複雜的模式、較複雜的計數，以及較複雜之情境等，可說相當符合四則運算之學習內涵。

圖 2 法老密碼雙語學習單(部分)

PYRAMID CODE			
Write down the three numbers you rolled and complete the calculations and formulas.			
1. Each formula must use at least two dice numbers			
2. Each formula must follow the operation rules, and the result must match the given number.			
3. Read out the formula in English before taking the next token.			
2	10	2×3=6 6+4=10	15
3			
4			

然而，基於本 CLIL 融入數學桌遊教學目標在於同時達到「N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用『正、負』表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算」及目標語言英語之習得，故以四則運算重要概念為發展雙語數學任務之優先考量時，除了應把握雙語數學任務須從較少要求到更高要求的順序進行排序外，英語的學習亦應在發展任務時一併慎思，如應提供語言支持如關鍵短語、樣本段落、語言意識等以解決任務，以下進一步說明。

(二) 聚斂於完成雙語數學任務所需具體形式的英語言支持

在 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼雙語學習單」設計上與 CLIL 教材設計七大原則相呼應，四則運算的四種符號下的算式列式和其運算都將由簡入繁，如初階的雙語數學任務可從最簡易的表徵和目標語連結與轉換，如以“ $1+2=3$ ”鏈接於“One plus two equals _____”的語言句型為支持，透過逐步提高其難易度，讓看似簡單的數學算式表徵藉由直覺式英譯的連結，讓學生逐漸內化，甚至進一步自主地完成更多如開放式問答“ $___ - ___ = 6$ ”或“ $___ \text{ minus } ___ \text{ equals six}$ ”一類的數學轉換(如圖3)。

圖 3 CLIL 雙語數學課程學習單(部分)

Worksheet

Complete the formulas in the table, translate them into English sentences, and read them aloud.

Addition

$1 + 1 = 2$, One plus one equals two.

Complete the following equations and provide the correct numbers and English translations.

$___ + ___ = 3$, $______ \text{ p } ______ \text{ equals three.}$

Roll one die and use the number rolled to complete the following equation.

$___ + ___ = 9$, $______ \text{ p } ______ \text{ equals nine.}$

Roll two dice and use the number rolled to complete the following equation.

$___ \text{ plus } ___ \text{ equals } ___ .$

$___ \text{ and } ___ \text{ is equal to } ___ .$

$___ \text{ and } ___ \text{ are } ___ .$

在圖 3 CLIL 學習單內容訂定上，以原則一任務優先性、原則五凸顯關鍵語言，在圖 3 內均清楚可見，不論是中翻英或英翻中都有範例句型給學生當任務參考提供書面語言支持，讓學生能從學習單中習得關鍵詞語，不論是口語和書面的語言技能，並且在進行法老密碼活動中，進而自行更改數字，套用句型，熟練句型，內化成自己的語言技能，讓學生在數學、英文上都有學習過程的產物，並在學習的過程保有自主性，而非傳統僵化的填鴨學習。

基於本 CLIL 融入數學桌遊教學目標在於同時達到「N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：使用『正、負』表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算」及目標語言英語之習得，一旦發現學生精熟於初階的雙語數學任務後，於次一回合的桌遊活動設計中，應立即引導學生進入「法老密碼雙語學習單」中，進行如「負數與數的四則混合運算」、「使用『正、負』表徵生活中的量」、「相反數」、「數的四則混合運算」等進階的雙語數學任務，讓學生自主組合或是參考學習單上先前練習過的算式，去完成帶有負數的算式和運算。換言之，以過程來說，學生們的鷹架將先聚斂於完成雙語數學任務所需的具體形式語言支持，並在其中培養自主學習能力。

伍、結語與反思

本土 2030 雙語政策下，透過 CLIL 融入數學桌遊的教材設計與研究，其最終目的應為有品質地促進本土學生的雙語數學學習及其學習興趣，亦有助於進一步發展出適合本土中學數學教師運用的雙語融入數學桌遊教學模式。本研究於以桌遊為中介，將雙語融入數學桌遊的教學設計，其意圖在於引導學生對數學學科知識和英語文學習之雙重目標的達致，亦在於引起學生對於數學學習和英語文學習之正向潛在課程，此乃值得本土中學數學教師一同共力。

然而，在行動研究中，研究者也經歷諸多反思與挑戰。例如，在架構 CLIL 融入數學桌遊「法老密碼」之教材設計的難易度拿捏上，基於班上學生的數學和英語文程度具有相當差異，在教材「法老密碼雙語學習單」設計上往往需有更多時間進行前置作業，如進一步了解學生的數學學科知能、英語文學科知能之起點行為、或是其潛在已久的數學或英語文之迷思概念等，這都使得本行動研究的時程規劃，往往較原先預計的時程更為久時與投入。此外，CLIL 學科教學目乃希望學生在學習過程中亦能習得目標語，或說能自由地與語言互動，即學即用即評量（陳玟樺，2023），而桌遊本身也是相似概念，即數學知識被視為遊戲的一部分，且在遊戲過程中應能與數學知識互動，是以，如何將這些重要元素緊密且自然地連結，尚須有更多的文獻閱讀、轉化及行動。

最後一提是，本研究持續進行中，將繼續透過做中學、公開分享等方式，以促進本行動研究的品質，達到行動研究目的。本研究於此也做出一誠摯呼籲是，當行動研究者意圖進行雙語融入數學桌遊教學設計時，仍應把握住數學學習乃重視學生能從各種任務與活動中探索數學、進行有感的學習，即使我們在過程中使用雙語來進行數學教學，但其目的應在於關照學生能同時學習數學與目標語言，此乃雙語政策於教育方面的核心精神，宜加以解釋澄清。

陸、參考文獻

- Ball, P., Kelly, K., & Clegg, J. (2016). Putting CLIL into Practice: Oxford Handbooks for Language Teachers. Oxford University Press.
- Bruner, J. S. (1972). Nature and uses of immaturity. *American psychologist*, 27(8), 687-708.
- Coyle, D. (1999). Theory and planning for effective classrooms: Supporting students in content and language integrated learning contexts. In Masih, J (Ed), *Learning through a foreign language: Models, methods and outcomes*. CILT.
- Coyle, D. (2005). CLIL planning tools for teachers. Retrieved from https://www.unifg.it/sites/default/files/allegatiparagrafo/20w.unifg.it/sites/default/files/allegatiparagrafo/20--0101--2014/coyle_clil_p2014/coyle_clil_planningtool_kit.pdf
- Donovan, T. (2017). *It's all a game: The history of board games from Monopoly to Settlers of Catan*. Thomas Dunne Books.
- Jäppinen, A. K. (2005). Thinking and content learning of mathematics and science as cognitional development in content and language integrated learning (CLIL): Teaching through a foreign language in Finland. *Language and Education*, 19(2), 148-169.
- Gilmore, A. (2019). Materials and Authenticity in Language Teaching. In S. Walsh & S. Mann (Eds.), *The Routledge Handbook of English Language Teacher Education* (pp. 299-318). Routledge.
- Gobet, F., Voogt, A. D., & Retschitzki, J. (2004). Moves in mind: The psychology of board
- Murray, D. R. (2010). Irish-medium language immersion programs' effect on mathematics education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 1, 28-32.
- Parlett, D. (1999). *The Oxford history of board games*. Oxford University Press.
- Pinner, R. (2019). *Authenticity and Teacher-Student Motivational Synergy: A Narrative of Language Teaching*. Routledge.
- Van de Craen, P., Ceuleers, E., & Mondt, K. (2007). Cognitive development and bilingualism in primary schools: Teaching maths in a CLIL environment. In D. Marsh & D. Wolff (Eds.), *Diverse contexts-converging goals: CLIL in Europe* (pp. 185-200). Frankfurt am Main: Peter Lang.
- 吳承翰 (2011)。桌上遊戲參與型態對人際溝通改善之研究-以臺北地區桌上遊戲專賣店顧客為例。國立臺灣師範大學運動與休閒管理學系碩士論文。
- 呂玉琴 (1988)。國小學生的數與計算概念。研習資訊, 13 (1), 58-65。
- 呂妍慧、袁媛 (2020)。數學領域雙語教育之教學模式初探。臺灣數學教育期刊, 7(1), 1-26。
- 李宜矯、林俊彥 (2019)。桌遊融入數學教學之行動研究。臺灣教育評論月刊, 8(6), 98-104。
- 林子斌 (2020)。臺灣雙語教育的未來：本土模式之建構。臺灣教育評論月刊, 9(10), 8-13。
- 侯惠澤 (2016)。遊戲式學習。臺北市:親子天下。
- 侯惠澤、周逸璇、陳昊暉 (2014 年 11 月)。運用迷你解謎遊戲於翻轉教室：微翻轉遊戲式學習活動之模式與教育遊戲編輯環境 XML-based ER Game Maker© 之建置。發表於 2014 台灣數位學習發展研討會，台北。
- 國家發展委員會 (2018)。2030 雙語國家發展藍圖。行政院。
- 教育部 (2021)。大專校院學生雙語化學學習計畫。取自 https://www.edu.tw/News_Content.aspx?n=9E7AC4D508A18AC8&s=1E4DB3F3AABDAFE
- A
- 教育部國教署 (2021)。國民中小學部分領域課程雙語教學實施計畫。取自 <http://immersion.ntue.edu.tw/>

- 許桂英 (2004)。合作學習應用於國小三年級數學領域學習成效之研究。國立高雄師範大學教育學系課程與教學教學碩士班碩士論文。
- 陳介宇 (2010)。從現代桌上遊戲的特點探討其運用於兒童學習的可行性。國教新知，57(4)，40-45。
- 陳伯璋 (1990)。教育研究方法的新取向-質的研究方法。南宏。
- 陳玟樺 (2022)。芬蘭2016課綱雙語教育政策評析。台灣教育研究期刊。3(1)，293-312。
- 陳玟樺 (2023)。轉化芬蘭課室教學經驗的實作：學科內容和語言整合學習的數學教學。載於劉美慧 (主編)，高等教育的EMI教學：理論與本土實務的對話 (頁25-78)。高等教育。
- 陳超明 (2012)。從雙語政策開始:引進國際思維、國際人才與國際評量。
- 陳慧琴、呂翠玲、許嫻華、鄒文莉 (2018)。CLIL在數學領域的運用。載於鄒文莉、高實玫 (主編)，CLIL教學資源書：探索學科內容與語言整合教學 (頁181-198)。書林。
- 陳麗霜 (2006)。作學習應用於數學教學之研究以臺北市國小一年級為例(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學,臺北市。
- 黃怡芳 (2005)。國小學童二位數加減運算學習之數學遊戲設計研究。國立中山大學教育研究所碩士論文,未出版,高雄市。
- 鄒文莉 (2018)。CLIL教案撰寫和跨領域教師協作。載於鄒文莉、高實玫 (主編)，CLIL教學資源書：探索學科內容與語言整合教學 (頁21-38)。書林。
- 賴勤薇 (2011)。數學遊戲融入國中數學科函數元教學成效之研究(碩士論文)。國立新竹教育大學數理教育研究所,新竹市。

Action research on the integration of CLIL into the design of mathematics board game

Po-Han Pan¹ Wen-Hua Chen²

¹ Department of Mathematics and Information Education at Taipei University of Education.

² Department of Mathematics and Information Education at Taipei University of Education.

Abstract

This study aims to explore the professional actions of the local middle school mathematics teacher in integrating CLIL into the mathematics board game under the background of Taiwan's bilingual policy. This study adopted the action research approach and mainly explored the philosophy of the local middle school mathematics teacher's teaching material design of integrating CLIL into a mathematics board game and the teaching material design elements the teacher valued.

Several findings emerged. First, the local mathematics teacher developed some CLIL worksheets to improve students' bilingual mathematics learning interests and strengthened students' mathematical thinking abilities. Second, the teacher valued at least two CLIL mathematics materials design elements. One is "taking important mathematical concepts as a priority in the development of bilingual mathematics tasks," and the other is "focusing on the specific forms of English language required to complete bilingual mathematics tasks.". This study also proposed some reflections after action research.

Keywords: CLIL, bilingual mathematics, board games, arithmetic, action research

Examining Interactive, Problem-Based Digital Mathematics Lessons Created by Pre-Service Teachers

Fenqjen Luo¹ Monte Meyerink²

¹Montana State University, USA fluo@montana.edu

²Northern State University, USA Monte.Meyerink@northern.edu

Abstract

This paper discusses the findings of a small-scale study that examined the instructional impacts and problem types of interactive, problem-based digital mathematics lessons created by elementary pre-service teachers (PSTs) for teaching division or ratios. The study used Puentedura's (2003) SAMR model and Bruner's (1985) paradigmatic and narrative modes of thought to analyze the lessons. The study found that while the PSTs were able to incorporate technology and mathematics instruction in various ways, the majority of the lessons only used technology to augment traditional instruction. Only a few lessons achieved the level of modification or redefinition by providing open-ended and creative mathematics problems for students. Moreover, the study found that most of the lessons focused on division problems with an equal groups, unknown group size structure, and over half of these problems were related to food contexts. The study has some limitations, as it did not collect data on the reasons behind the PSTs' choices of specific lesson designs and problem types. This information could be relevant to understanding their competency in creating effective digital mathematics lessons.

Key Words: technology integration, problem-based lessons, problem posing

Introduction

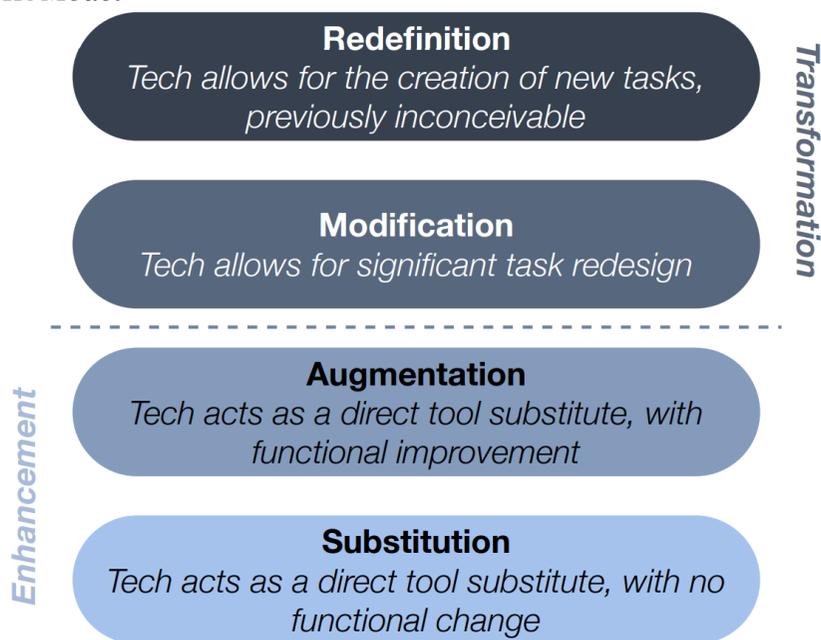
Given the benefits of technology integration in K-8 mathematics, it is crucial for pre-service teachers (PSTs) to be competent in integrating technology into mathematics. In this study, a cohort of PSTs were tasked to enhance their competency to integrate technology into mathematics by developing an interactive, problem-based digital mathematics lesson with the popular feature of virtual manipulatives on Google documents. Virtual manipulatives refer to interactive web-based visual representations of dynamic objects that facilitate the development of mathematical knowledge (Moyer et al., 2002). Mathematical games can enhance the achievement of K-8 students in areas such as multiplication (Kiger et al., 2012), arithmetic fluency, adaptive number knowledge, and pre-algebra knowledge (Brezovszky et al., 2019). In addition to incorporating the feature of virtual manipulatives, PSTs were expected to incorporate authentic problem contexts into their interactive digital mathematics lessons to enhance student learning motivation. This makes math more engaging

and helps their future students “see connections between their daily experiences and mathematics” (Arnold et al., 2021, p. 2021, p. 15).

Theoretical Framework

Three main theoretical frameworks guided the development and study of interactive digital lessons. They are (1) the SAMR (substitution, augmentation, modification, and redefinition) model as shown in Figure 1, (2) problem posing, and (3) the paradigmatic and narrative modes of thought.

Figure 1
The SAMR Model



Note. From Ruben R. Puentedura’s Blog, by R. R. Puentedura, 2003-2021, Hippasus, (<http://hippasus.com/blog/>). CC BY-NC-SA 3.0.

SAMR Model

The SAMR model, developed by Puentedura in 2003, presents a framework for classifying the influence of technology on mathematics instruction, consisting of four hierarchical levels. In the context of graphing functions, Dorman (2018) provided specific examples for each level of the SAMR model:

At the substitution level, instead of printing off paper copies of the worksheet, an instructor could make the worksheet available online. At the augmentation level, students could complete the same questions on a Google Form, and the instructor could capture the answers for individual students to check for understanding. ... At the modification level, ... students could work in groups to analyze the different characteristic of

functions as they graph them. Then, students could video record the characteristics and steps of how to graph functions. The video could be uploaded to a classroom website so that students can use it as a tutorial or study aid. At the redefinition level, students could create an online portfolio of all types of functions, and their graphs could include real-world applications that are modeled by the functions. (para. 3)

In this study, PSTs were tasked to create interactive, problem-based digital mathematics activities using Google documents. Their incorporation of technology into mathematics activities could be aligned with any level of the SAMR model. This could range from substituting traditional methods of posting math problems on a blackboard and solving them using paper-and-pencil and physical manipulatives to a significant redesign of interactive digital math activities as online board games. Furthermore, this implementation has the potential to achieve the redefinition level by empowering future students to create new problems or tasks while engaging in problem-solving activities.

Problem Posing

The way mathematical problems are presented in problem-based mathematics lessons can significantly impact the development of creative thinking skills and serve as a defining aspect of inquiry-oriented instruction. Stoyanova and Ellerton (1996) proposed a framework that categorizes problem posing into three types: (a) free problem posing, (b) semi-structured problem posing, and (c) structured problem posing. Free problem posing involves generating problems from a given or constructed situation without any constraints, and it can be more challenging than semi-structured or structured problem posing. However, it also encourages pre-service teachers (PSTs) to think independently and produce original ideas. In this study, the researchers utilized the approach of free problem posing, which involves generating problems without any constraints from a given or constructed situation. Compared to semi-structured or structured problem posing, free problem posing can be more challenging, but it also encourages PSTs to think independently and produce original ideas. Specifically, the researchers encouraged PSTs to formulate problems using their knowledge of division or ratios. By engaging in this process, PSTs were able to think creatively and independently, allowing them to produce original and innovative problem sets that could serve as the foundation for creative and effective lesson plans.

Paradigmatic and Narrative Modes of Thought

While PSTs were provided with “the opportunity to construct their own representations of mathematical concepts, rules, and relationships” (Cai & Lester, 2008, p. 282) in their problem-based lessons, it is important to consider the range of problem types that were posed. In this study, Bruner’s paradigmatic and narrative modes of thought served as an analytic framework to analyze the

types of posted problems. A paradigmatic mode of thought is “context free and universal” (Bruner, 1985, p. 97). A narrative mode of thought focuses on “the broader and more inclusive question of the meaning of experience” (Bruner, 1985, p. 98). In relation to story problems, a paradigmatic mode of thought would require a focus on mathematical structures or models that are independent of a particular social context (Chapman, 2006). A narrative mode of thought in the context of story problems would require a focus on the social contexts such as the characters, objects, situations, actions, relationships, and/or intentions of the story problem (Chapman, 2006).

Method

The theoretical and empirical literature discussed in earlier sections led to the following specific research questions:

1. To what extent do the interactive, problem-based digital mathematics lessons created by PSTs have instructional impacts?
2. What types of problems are posted in their lessons?

Participants and Data Collection

This qualitative research focused on analyzing the mathematics lessons created by a cohort of PSTs who were enrolled in a Kindergarten through 8th grade (K-8) elementary teacher preparation program and taking a mathematics methods course. As a way of demonstrating their competency for this mathematics methods course, these PSTs were expected to create problem-based mathematics lessons on an interactive Google document. The lessons consist of mathematics problems and virtual manipulatives, which were posted on an interactive Google document. The main goal of this task was to cultivate PSTs’ critical thinking and equip them with the necessary knowledge and skills to engage students and anticipate their inquiries effectively in a virtual yet authentic, interactive learning environment. The data source were 23 mathematics lessons.

Data Coding and Analysis

Both the SAMR model and the two modes of thought model guided the methodological approach for coding and analysis. The 23 interactive problem-based digital mathematical lessons created by the PSTs were coded using the four hierarchical levels in Puentedura’s SAMR model to differentiate their instructional impacts. The mathematics problems posted in each of the 23 mathematical activities were coded based on two modes of thought: paradigmatic and narrative, following Bruner’s (1985) theory. The paradigmatic data refers to the mathematics topics and structures presented in the activities, while the non-mathematics-related contexts were considered narrative data. An open coding method was used in the study, in which the raw data was analyzed to identify emerging concepts that were later grouped into categories (Elo &

Kyngas, 2008). The open coding process began by labeling the paradigmatic and narrative data, and as the coding progressed, the codes were compared between prompts to develop more defined categories.

Results

This section describes a detailed account of the findings from the study's analysis of interactive, problem-based digital mathematics activities, with a focus on their impacts on mathematics instruction through technology, as well as their mathematics structures and social contexts.

The study examined 23 mathematics lessons using SAMR model. Out of those lessons, 15 (65.2%) were categorized as augmentation activities, while only one (4.3%) was classified as a substitution activity. Both substitution and augmentation activities consist of closed problems with only one correct answer. Those lessons were designed by the PSTs to function as online worksheets with solutions that could be easily captured. The remaining seven lessons (30.4%) featured open-ended problems that allowed multiple solutions. Five of them can be classified as modification lessons while two were identified as redefinition lessons. In the redefinition lesson as shown in Figure 2, students could create an online portfolio showcasing different types of gardens with varying areas and plants. Furthermore, students could share and exchange mathematical ideas related to their gardens with their peers through math talks.

Figure 2

Example of a Virtual Garden Design



Regarding problem structures from a parametric perspective, as shown in Table 1, among 23 mathematics lessons created by the PSTs, most (12, 52.2%) were division activities consisting of one or more closed problems with one answer. Additionally, nine of the 12 division lessons only include an equal-groups, group size unknown problems. Only one division lesson has comparison,

group size unknown problems; one division lesson consists of both structures of equal-group problems. All the four addition and two out of the four ratio lessons provided open problems that can be manipulated or solved in multiple ways.

Table 1
Analysis of Problems Structures in Lessons

Structure	Freq. (Perc.)	Excerpted Example
Division	12 (52.2%)	"...10 cans between 2 4 th grade classes."
Addition	4 (17.4%)	"How much calcium ...amount of 1,000 mgs?"
Ratio/Proportion	5 (21.7%)	"What is the ratio of strawberries to potatoes?"
Fraction	1 (4.3%)	"...shading the bricks that each fraction..."
Area	1 (4.3%)	"How much of the total area of the garden...?"
Total	23 (100.0%)	

An examination of the problem contexts revealed that different types of food were the most common context situated by PSTs in their mathematics lessons. As shown in Table 2, over half (60.9%) of the created activities used foods as the primary context.

In exploring the relationship between problems' SAMR levels, their mathematics structures, and social contexts, it found that division problems were not be focused in those more open-end modification and redefinition lessons. Additionally, using food contexts was associated with posing the equal groups, group size unknown problems, also known as the equal sharing problem.

Table 2
Analysis of Problem Contexts in Lessons

Context	Freq. (Perc.)	Excerpted Example
Food	14 (60.9%)	"...how many pies does each person get?"
Plants	3 (13.0%)	"What the ratio of strawberries to potatoes?"
Fund Raising	1 (4.3%)	"...6 classes... They need \$18,000 total."
People Lining Up	1 (4.3%)	"25 students... in grades 1-5..."
Toys	1 (4.3%)	"20 toys ...How many toys go in each box?"
Zoo	1 (4.3%)	"What is the ratio of claws to wings...?"
NA	2 (8.7%)	"...shading the bricks that each fraction..."
Total	23(100.0%)	

Discussion

This study unfolds PSTs' mathematical teaching ideas through the lens of instructional impacts, problem structures and social contexts identified from their mathematics lessons. Overall, the study revealed that PSTs were able to design interactive, problem-based digital mathematics activities that integrated technology with mathematics instruction in various ways. The majority of the lessons were designed to augment traditional instruction with technology, while a smaller number of lessons provided more open-ended and creative

opportunities for students to engage with mathematics.

The present study found that, similar to Lo and Luo's (2012) research, many lessons in this study focused on equal groups, group size unknown division problems. The problems in this type were often situated within an equal sharing scenario and involved a whole-number group as the divisor. These findings were also consistent with Luo et al.'s (2022) study on division problem-posing strategies of fifth-grade students in both China and the United States. This is not surprising since equal sharing by distributing objects evenly among people or units is a familiar and intuitive concept in daily life. Conversely, only one of the lessons included comparison division problems. These problems, which require a clear connection between the problem context and the intended division operation, can be complex, as noted by English (1998) and Lavy and Bershadsky (2003). In such problems, the intended operation may not be immediately apparent from the context, which may explain their infrequent usage.

This study contributes to the ongoing efforts to understand and explain PSTs' mathematics lessons. However, there are some limitations to the study. Firstly, the lack of sufficient information on the underlying rationales behind PSTs' decisions makes it difficult to generalize the developed lessons. The study did not collect data on why PSTs created specific mathematics lessons with particular problem types. This information could have been relevant to understanding the competencies and instructional impacts that the PSTs were trying to achieve. Secondly, this study did not investigate the connection between problem-posing and problem-solving development. It is unknown whether the problem contexts in which PSTs situated their posed problems were consistent with the data and possible solutions. Thirdly, this study provided PSTs with limited opportunities to showcase their cognitive schemes. As the PSTs were only asked to create interactive, problem-based digital lessons and post problems of division and ratios, the posted problems may only reflect the richness of problem types in their initial minds. Lastly, this study collected and analyzed a limited number of mathematics lessons created by a small group of PSTs. Therefore, caution must be taken while interpreting the findings and recommendations generated from this study due to its small-scale sample size.

References

- Arnold, E. G., Burroughs, E. A., Carlson, M.A., Fulton, E.W., & Wickstrom, M. H. (2021). *Becoming a teacher of mathematical modeling : Grades K-5*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Brezovszky, B., McMullen, J., Veermans, K., Hannula-Sormunen, M. M., Rodriguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Laakkonen, E., & Lehtinen, E. (2019). Effects of a mathematics game-based learning environment on primary school students' adaptive number knowledge. *Computers & Education, 128*(1), 63-74. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.09.011>

- Bruner, J. (1985). Narrative and paradigmatic modes of thought. In E. Eisner (Ed.), *Learning and teaching the ways of knowing* (pp. 97-115). University of Chicago Press.
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211-230.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106. <https://doi.org/10.2307/749719>
- Cai J., & Lester F. (2008). Contributions from cross-national comparative studies to the internationalization of mathematics education: Studies of Chinese and U.S. classrooms. In B. Atweh et al. (Eds). *Internationalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5908-7_15
- Elo, S., & Kyngas, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62, 107-115. <https://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x>
- Kiger, D., Herro, D., & Prunty, D. (2012). Examining the influence of a mobile learning intervention on third grade math achievement. *Journal of Research on Technology in Education*, 45(1), 61-82. <https://doi.org/10.1080/15391523.2012.10782597>
- Lavy, I, & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry—A case study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 369-387.
- Lo, J.-J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 481-500. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9221-4>
- Luo, F., Yu, Y., Meyerink, M., & Bursal, C. (2022). Fifth grade Chinese and U.S. students' division problem posing: A small-scale study. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 15, 85-97
- Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, 8(6), 372-377. <https://www.nctm.org/Publications/Teaching-Children-Mathematics/2002/Vol8/Issue6/What-Are-Virtual-Manipulatives/>
- Puentedura, R. R. (2003, August 6). A matrix model for designing and assessing network-enhanced courses. *Hippasus*. <http://hippasus.com/resources/matrixmodel/>

教具融入國小五年級約分和擴分之

學習扶助教學初探

張瑋芯¹ 張淑怡²

¹ 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

a2110n6003@grad.ntue.edu.tw

² 國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 sic@mail.ntue.edu.tw

摘要

本研究目的旨在發展一套教具融入國小五年級約分和擴分之學習扶助教學方案。為達到研究目的，研究者採用設計研究法，將花片、數棒、具體圖示融入教學中，並於教學實踐後和研究團隊進行討論，修正教學方案。

本研究初步發現：(一)學生學習表現：學生在純數字題的表現與前測相同，均做答正確；在約分和擴分的畫圖表徵上雖有進步，但仍不夠穩固。(二)教案的調整內容：將題目的敘述簡化；強化教具操作與算式的連結；釐清學生的想法；刪除再表徵活動中的具體圖示，讓學生自行畫圖表徵；減少題目，給予學生足夠的時間思考與解題。

關鍵字：教具、約分、擴分

壹、緒論

一、研究動機與背景

國內外研究顯示，分數是較抽象的概念，學生在學習分數上，常遭遇困難。「擴分和約分」是分數學習上一個重要的技能，是等值分數的延伸，也是未來學習異分母分數加減的先備知識；然而學童常在此單元的學習上產生迷思概念，包括不理解等值分數的意義、與分數的乘法混淆等（李國家、劉曼麗，2012；洪素敏等，2007；郭沛婕，2015），若學童是用背誦算則來解題，或許當下能成功，但時間一久，容易遺忘或是與分數其他運算混淆。故研究者希望設計適當的教學活動來幫助學生理解擴分和約分的意義，並能靈活運用於解題。

研究者先前參加了五場國立臺北教育大學舉辦的「數學教學魔法師」研習，研習中老師分享許多教具融入數學教學的經驗，透過操作教具來學習數學概念不僅有趣，同時也能幫助學童理解數學知識。九年一貫課程綱要—數學學習領域（教育部，2008）與十二年國民基本教育課程綱要—數學領域（教育部，2018）也強調課程安排應從具體操作活動開始，精熟後再逐步抽象成數學語言。因研究者沒有教具融入教學之經驗，故想嘗試將教具融入教學，探討學生在教具操作中如何學習數學知識，以及學生從具體到抽象活動的學習歷程。

研究者任教的學校為偏遠小學，學習扶助學生比例較高且程度差異大，因此研究者期望以數學學習扶助學生為對象，設計一套教具融入約分和擴分之學習扶助課程，讓在數學學習上有困難的學童可以透過具體的教具操作理解數學概念，增加他們的學習動機與學習成效；研究者也希望自己能在研究過程中，學習如何設計一套合適的課程、如何與學生互動，並在教學實踐與反思分析後，產出一套較為精緻的擴分、約分和通分之學習扶助課程，不僅可以讓學生

有更好的學習歷程與成效，也提供其他教育工作者參考。

二、研究目的

本研究之目的為發展一套約分和擴分之學習扶助教學，期透過三輪教學實踐分析學生的學習歷程，並反思與修改教學設計與教學，進而產出一套較為精緻的教學方案。本論文主要針對第一輪教學實踐後，學生的學習歷程分析與教學方案之修改。

貳、文獻探討

一、數學教學設計原則

林筠修等人（2021）以 von Glasersfeld（1995）的根本建構主義及 Maturana 與 Varela（1987）的認知生物學為基礎，發展出以下五項教學設計原則：

(1) 佈題選擇符合教學目標且適合學生學習的現象問題

佈題的設計與安排須緊扣教學目標，從符合學童經驗或是生活化的問題情境引入，透過累積不同情境但含有相同概念的解題練習，形成解題經驗類型，循序漸進的引導學童達成學習目標。

(2) 佈題以具體一再表徵—抽象運思活動的順序安排

佈題的順序先從具體操作活動開始，學童在熟練具體操作的過程中逐漸形成概念心像；接著進行再表徵活動，抽離具體物，學童能依據腦中的概念心像自行畫圖或是列式解題；最後的抽象運思活動，學童將解題的算則意義抽象化，不需要透過具體表徵或再表徵，能直接進行抽象的數字運算解題。

(3) 透過心理學佈題提升解題活動層次

當學生解題活動層次在「具體活動」階段，教師可以透過心理學佈題來提升其解題活動層次，例如「你怎麼知道的？」讓學生將具體操作過程抽象化，引導其進入下一個解題層次「再表徵活動」。

(4) 透過社會學佈題促進群體溝通與討論

教師可透過社會學佈題，例如「請和你的同學說明你的解題過程」，或是提供其他解法並詢問學生對於不同解題策略的想法，促使學童反思自身的解題過程並比較不同的解題策略。

(5) 預測學生可能解題策略並思考後續教學處理

設計教學活動時要先預測學生可能的解題策略，並思考教學者要如何佈回應佈題或是透過關鍵問話，引導學生察覺、理解，並建構正確的知識概念。

綜上所述，研究者在設計教學活動時，會參考此五項教學設計原則來撰寫教學方案。

二、約分和擴分之學生解題策略

為了解學生在「擴分和約分」學習中常出現的解題策略、迷思概念、錯誤類型及錯誤原因，研究者整理相關文獻，作為教案設計的參考：

等值分數為擴分與約分的前置經驗，研究者參考了洪素敏等（2007）「等值分數補救教學之研究」，發現等值分數迷思概念包含不理解等值分數的意義以及在計算等值分數時與分數的乘法混淆。前者為不了解分數部分/整體的關係，將分子、分母視為兩個獨立的整數，因此無法理解等值分數的意義；而後者是在進行等值分數的計算時，只將分子乘以某數，忽略分母也需要同乘以某數其值才會相等；另外該研究亦指出學童在具體表徵與分數詞之間無法靈活轉換，例如無法正確指出 $3/6$ 所代表的圖畫表徵；並且學生在面對不同情境時，無法將之前的經驗轉移，例如長方形表徵，無法轉移到圓形表徵。

郭沛婕（2015）指出低分組的學生不理解擴分與約分是將圖形切割與合併

的概念。雖然學生能透過約分、擴分的方式計算出 $2/5=4/10$ ，但學生並不理解其意義，只是透過背誦公式解題。因此該研究建議學生在解決約分、擴分的題目時，除了讓學生列出算式外，還要以圖示來說明算式的意義，以確認學生理解約分與擴分的概念。

研究者在設計教學方案時，會將上述研究中學生可能的迷思概念列出，並思考後續的教學策略。學生可能會將擴分與分數乘法搞混，即使學生暫能正確將分數擴分，教師也可提供分數乘法的錯誤算法，請學生判斷是否正確，並說明原因；另外，研究者會在連續量的情境佈題中加入不同的表徵，例如長方形和圓形，請學生將約分與擴分的過程用畫圖的方式來呈現，以確認學生是否真的理解約分與擴分的意義，並且能在不同的情境及表徵中靈活運用。

三、擴分和約分的教材內容

為了瞭解擴分和約分的內容、目標、課程設計，研究者分析了市面上流通的三種教科書版本，作為課程設計時的參考。以下分析了 111 學年度的翰林版、康軒版、南一版五年級上學期擴分和約分的課程內容，由於數線以及小數的內容不在本研究設計之課程範圍，故不列入分析。目前五年級上學期仍是以九年一貫課綱為依據編纂。研究者分析教科書中的題目只包含教學佈題和練習題，不包含動動腦以及單元最後的統整練習。以下針對本研究之教學活動比較三個版本教科書之教學設計：

表 1

各版本教科書之比較

教學活動	翰林版	康軒版	南一版
擴分	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著 1 題離散量(假分數)，最後 1 題為純數字題(帶分數)。	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著 1 題連續量(真分數、圓形表徵)以及 1 題離散量(真分數)，最後 2 題為純數字題(假分數、帶分數)。	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著是 1 題離散量(假分數)，最後 1 題為純數字題(帶分數)。
約分	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著 1 題離散量(假分數)，最後 3 題是純數字題(帶分數、真分數、真分數)。	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著 1 題連續量(真分數、長方形表徵)以及 1 題離散量(真分數)，最後 2 題是純數字題(假分數、帶分數)。	從連續量引入(真分數、長方形表徵)，接著是 1 題離散量(假分數)，最後 3 題為純數字題(帶分數、真分數、真分數)。

註：作者自行整理

在佈題情境上，「擴分」與「約分」的教學活動中，三版教科書的佈題順序皆為連續量—離散量—純數字題；在佈題層次上，三版教科書的情境題(連續量、離散量)均有具體圖示，從具體的情境佈題到抽象的純數字題。在數字的安排上，康軒版在情境題的分數均為真分數，在純數字題才出現假分數與帶分數；其他兩個版本第一題的情境題(連續量)為真分數，第二題的情境題(離散量)為假分數，第三題的純數字題為帶分數。

綜上所述，研究者在設計教學活動時，會參考教科書中的佈題層次順序，從具體到抽象；在分數數字的安排，依照真分數、假分數、帶分數的順序來進行；在連續量的情境中，除了長方形表徵外，會加入圓形表徵，確認學生能在不同的表徵中靈活運用擴分和約分的概念；在情境題中加入假分數與帶分數的佈題，確認學生理解假分數的意義及圖畫表徵，以及為什麼帶分數擴分及約分時整數不用一起乘以或除以某數。

四、擴分和約分相關的教學

(一)等值分數

等值分數是比較活動的結果，例如「一打雞蛋有 12 個， $\frac{3}{6}$ 打跟 $\frac{2}{4}$ 打是不是一樣多」，理解等值分數的根本必須能將分數應用於單位分數內容物為多個個物的情境中。等值分數教學建議以單位分數內容物為多個個物之離散量情境引入，作為引入情境的主要原因是此情境中已提供了公共單位，例如一條鐵絲長 48 公分，比較 $\frac{2}{6}$ 條以及 $\frac{8}{24}$ 條的長度，此時 1 公分即為可共測的單位，不必額外找出共測單位（甯自強，1997）。

(二)約分與擴分

約分與擴分可以從離散量的情境引入，因為共測單位的不同，所以會有不同的分數來表示相同的量；接著觀察等值分數分子跟分母的變化，讓兒童發現共測單位愈大，份數就會減少，分子跟分母就會縮小；教師可以佈類題，進一步觀察當共測單位的內容物變為一半時，也就是每一份的數量變為一半，分子跟分母就會變成原來的 2 倍，若當共測單位的內容物變為 2 倍時，分子跟分母就會變成原來的 $\frac{1}{2}$ 倍；兒童練習完離散量的情境，可繼續以連續量為例，練習類題；最終歸納出共測單位整數倍放大，分子分母會同倍縮小，稱作約分，共測單位整數倍縮小，分子分母會同倍放大，稱作擴分（甯平獻，2010）。

綜上所述，與三版教科書在擴分與約分教學中「從連續量情境引入」不同，研究者會以離散量情境引入，以提供學生共測單位。例如「一盒餅乾有 24 個，8 個餅乾是多少盒？還有其他說法嗎？」一個餅乾為題目提供之共測單位，學生可答出 8 個餅乾是 $\frac{8}{24}$ 盒，再找出其他不同的共測單位，例如 2 個餅乾裝一包， $\frac{8}{24}$ 盒也可說是 $\frac{4}{12}$ 盒。由於離散量的佈題是從單位分數內容物為單一個物引入，再將每幾個餅乾合併裝成一包，找出其他等值分數，故與三版教科書先擴分再約分的教學不同，本研究將依約分、擴分的順序進行教學。

參、研究方法

一、研究架構

本研究採用設計研究法，研究者參考 Reeves (2006) 提出的四個階段來做為本研究的研究架構的基礎，包含分析問題、發展方案、教學實踐、評鑑與反省。第一階段為分析問題，確認研究主題，並參考相關的文獻。第二階段為發展方案，研究者根據數學教學設計原則設計「約分和擴分之學習扶助教學方案」，並與研究團隊其他成員（數學教育領域教授、高年級導師）進行討論與修正教學設計，最後產出教學實踐前之教學方案。第三階段為教學實踐，由於學生間的個別差異大，研究者期望達到較佳的學習成效，故以一位五年級數學學習扶助的學生為教學對象，並於教學前、後實施前測與後測。本研究之教學對象「小羽」的前測結果顯示他不知道如何將擴分與約分以畫圖的方式表示，但在純數字題中，他均能做答正確，因此推斷小羽不理解約分和擴分的意義。第四階段為評鑑與反省，與研究團隊進行討論會議，進行回溯分析，並依據分析的結果修改教學設計，最後發展出「約分和擴分之學習扶助教學方案」。

二、資料蒐集

本研究以錄音、錄影、留存文件等方式蒐集資料，包含教學方案、教學實踐錄影檔、討論會議錄音檔、學生前後測、學習單、教具操作心得。

三、資料分析

為提高本研究的研究信效度，採用資料三角驗證來進行資料分析。資料蒐集的來源包含討論會議錄音檔、教學實踐錄影檔、學生學習單、學生心得、學生前後測等，資料來源多元，分析時將不同的資料來源整理、對照、整合，進行交叉檢驗，得出可信、有效的研究結論，達到資料三角驗證。

四、教學設計

教學實踐前，與研究團隊討論與修正，根據五項教學設計原則產出教學實踐前之教學方案。由於本研究對象為學習扶助的學生，因此研究者設計課程時，會注意以下幾點：(1)分析學生的起點行為，針對其困難處設計合適的個別化課程；(2)兼顧教師與學生中心，提供學生表達想法與探究的機會；(3)將抽象的概念具體化，讓學生有具體操作的活動經驗，以理解抽象的數學概念，也提高其學習動機；(4)若學生在教師引導下，學習仍有困難時，可以由教師示範、說明。以下說明教學實踐前之教學方案：

(一)佈題選擇符合教學目標且適合學生學習的現象問題

本研究之教學目標為能理解約分和擴分的意義，並運用於解題。根據學生的前測，學生無法以圖示的方式表示約分和擴分，因此將教學重點放在學生的具體操作及圖畫表徵。操作及圖畫的佈題如表 2 所示：

表 2

約分(離散量)之佈題

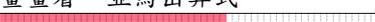
約分離散量佈題(操作花片)	約分離散量佈題(畫圖表徵)
<p>小雲媽媽做了手工餅乾，讓小雲帶給好朋友們一人一盒，一盒餅乾有 12 個，其中 8 個是草莓口味，4 個是原味。</p> <p>(1)草莓口味的餅乾是多少盒？</p> 	<p>爸爸買了一盒巧克力，共 24 顆，其中 16 顆是黑巧克力，8 顆是白巧克力，請問黑巧克力是多少盒呢？還有其他說法嗎？請畫畫看，並寫出算式。</p> 
<p>(2)因為餅乾盒可以回收再利用，小雲帶了小袋子讓朋友們裝餅乾。小佳說：「我們家總共六個人，所以我每兩個餅乾裝一包。」小佳把每兩個餅乾裝一小包，請用花片做做看，並說說看 $\frac{8}{12}$ 盒的草莓餅乾也可以說是幾分之幾盒？</p>	

(二)佈題以具體一再表徵一抽象運思活動的順序安排

佈題的順序先是具體的操作活動，再來是畫圖題的再表徵活動，最後是純數字題的抽象運思活動。佈題的順序安排如表 3 所示：

表 3

約分(連續量)之佈題順序：

具體活動	再表徵活動	抽象運思活動
<p>小莉這組要畫園遊會的海報，老師給他們不同顏色的紙條來裝飾，一條紙條是 24 公分。小莉這組拿了一條粉色紙條、一條綠色紙條、一條藍色紙條，每一條都是用了 18 公分。</p> <p>(1) 請問他們是用了幾條粉色紙條？</p> 	<p>美勞課時，老師教大家編手環，老師給了一人一條繩子。一條繩子長 60 公分，小易根據自己的手腕粗細，剪下 36 公分的繩子，用 36 公分的繩子編了一個如意結的手環。小易用了幾條繩子編手環？還有其他說法嗎？請在圖中畫畫看，並寫出算式。</p> 	<p>請用約分的方式找出下列分數的等值分數。</p> <p>(1) $\frac{4}{16}$</p> <p>(2) $\frac{27}{18}$</p> <p>(3) $2\frac{12}{20}$</p>
<p>(2) 小莉與組員們把粉色紙條，每 2 公分切成一小段，請用數棒做做</p>		

看。說說看， $\frac{18}{24}$ 條紙條也可以說是多
少條？

(三) 透過心理學佈題提升解題活動層次

學生作答時，教師要追問原因，例如：「你怎麼知道的？」除了教師能更好的掌握學生的學習狀況，以調整後續的教學，學生也能在闡述原因時再此整理自己的思考歷程，提升其解題活動層次。

(四) 透過社會學佈題促進群體溝通與討論

因為教學對象只有一人，所以教師可以提供其他解法，與學生進行不同解題方法的討論與比較。社會學佈題如圖 2 所示：

圖 1

約分之社會學佈題

小樂在解一題數學題：請用約分的方式找出 $2\frac{6}{8}$ 的等值分數。

小樂說：「我用約分的方式把分子、分母都除以 2，所以 $2\frac{6}{8} = 1\frac{6\div 2}{8\div 2} = 1\frac{3}{4}$ 。」

你認為小樂說的正確嗎？_____

原因說明：

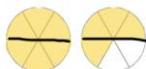
(五) 預測學生可能解題策略並思考後續教學處理

參考其他文獻與研究，預測學生在約分與擴分可能的解題策略，並思考教師該如何問話、引導學生。例如，學生在連續量不同表徵的情境中，可能無法將先前所學的長條表徵轉換到圓形表徵，教師需適時引導學生，如圖 2 所示：

圖 2

預測學生在連續量不同表徵的解題策略以及後續的教學處理

小莉生日，帶了蛋糕請全班同學吃。同學們共吃了 $\frac{10}{6}$ 個蛋糕，也可以說是三分之幾個蛋糕？請在圖中畫畫看，並寫出算式。



預測學生可能的畫法：

老師的關鍵問句：

「你為什麼這樣畫呢？這樣畫的答案是多少？算式是什麼？」

「一個蛋糕在哪裡？」 $\frac{10}{6}$ 個蛋糕的 6 跟 10 代表什麼意思？」

「題目問的三分之幾個蛋糕，3 代表什麼意思？」

肆、研究結果與討論

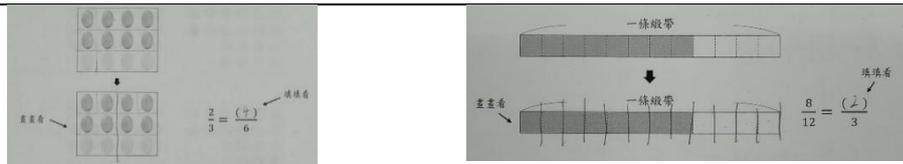
一、前後測結果

小羽在純數字題的前測與後測作答均正確，但他在前測時，無法畫出約分和擴分的圖畫表徵(未作答)，後測時畫圖題上的表現仍不穩固，在約分連續量的情境中，畫圖題作答錯誤。

表 4

後測畫圖題小羽之作答

畫圖正確	畫圖錯誤
------	------



二、課堂學習表現

以下說明主要佈題教學後，小羽在類題的學習表現：

(一)畫圖題：

小羽在畫畫看時，容易受題目的數字影響，將答案的分母當作分割或合併的數(如表 5 之錯誤例)；在表徵轉換時，例如從長方形表徵轉換到圓形表徵，不知如何作答(如表 6 之錯誤例)；然而，表 5 與表 6 的錯誤例，也可能是源自於假分數；在有限制分母答案的擴分離散量情境題，不知道要將每一份再分割成幾份(如表 7 之錯誤例)；在擴分的連續量情境，均作答正確(如表 8 所示)。小羽作答如下：

表 5

約分(離散量)小羽之作答

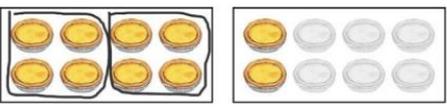
約分離散量：正確例	約分離散量：錯誤例
<p>一盒巧克力，共 24 顆，其中 16 顆是黑巧克力，8 顆是白巧克力，請問黑巧克力是幾盒呢？還有其他說法嗎？請畫畫看，並寫出算式。</p>  $\frac{16}{24} = \frac{16 \div 2}{24 \div 2} = \frac{8}{12}$ $\frac{16}{24} = \frac{16 \div 4}{24 \div 4} = \frac{4}{6}$ $\frac{16}{24} = \frac{16 \div 8}{24 \div 8} = \frac{2}{3}$	<p>$\frac{10}{8}$ 盒蛋塔也可以說是四分之幾盒蛋塔？ 請畫畫看並寫出算式。</p> 

表 6

約分(連續量)小羽之作答

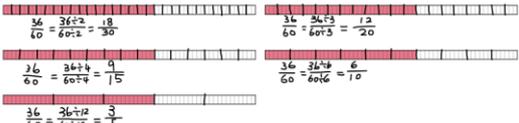
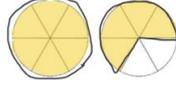
約分連續量：正確例	約分連續量：錯誤例
<p>一條繩子長 60 公分，小易用 36 公分的繩子編了一個手環。小易用了幾條繩子編手環？還有其他說法嗎？請在圖中畫畫看，並寫出算式。</p>  $\frac{36}{60} = \frac{36 \div 4}{60 \div 4} = \frac{9}{15}$ $\frac{36}{60} = \frac{36 \div 6}{60 \div 6} = \frac{6}{10}$ $\frac{36}{60} = \frac{36 \div 12}{60 \div 12} = \frac{3}{5}$	<p>同學們吃了 $\frac{10}{6}$ 個蛋糕，也可以說是三分之幾個蛋糕？請畫畫看，並寫出算式。</p> 

表 7

擴分(離散量)小羽之作答

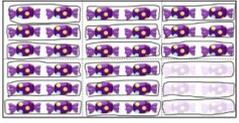
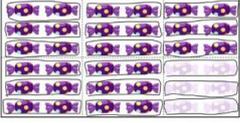
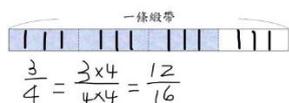
擴分離散量：錯誤例	擴分離散量：正確例
<p>$\frac{5}{6}$ 袋糖果也可以說是十二分之幾袋？請畫畫看，並寫出算式。</p> 	<p>$\frac{5}{6}$ 袋糖果也可以說是十八分之幾袋？請畫畫看，並寫出算式。</p>  $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$

表 8

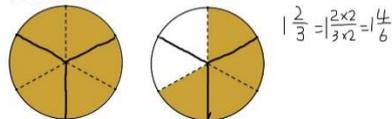
擴分(連續量)小羽之作答

擴分連續量：正確例	擴分連續量：正確例

小翊正在用緞帶綁禮物，她用了 $\frac{3}{4}$ 條緞帶， $\frac{3}{4}$ 條也可以說是十六分之幾條？請畫畫看並寫出算式。



哥哥和同學到西邊老街玩，買了黑糖糕回家給家人吃。全家人共吃了 $1\frac{2}{3}$ 塊， $1\frac{2}{3}$ 塊黑糖糕也可以說是 $(\quad)\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 塊？畫畫看並寫出算式。



(二) 數學寫作：

小羽在帶分數的約分及擴分題上，並未出現將整數部分同除以或乘以某數，並在老師追問為什麼時，能說明原因。小羽在擴分及分數的整數倍的數學寫作題上，出現了迷思概念，他並不理解兩個算式的意義，因此教師當下用畫圖的方式解釋，澄清其迷思。小羽的回答如表 9 所示：

表 9

擴分(連續量)小羽之作答

約分數學寫作題：正確例	擴分數學寫作題：錯誤例
<p>小樂在解一題數學題：請用約分的方式找出 $2\frac{6}{8}$ 的等值分數。</p> <p>小樂說：「我用約分的方式把分子、分母都除以 2，所以 $2\frac{6}{8} = 1\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = 1\frac{3}{4}$」</p> <p>你認為小樂說的正確嗎？——</p> <p>原因說明：</p> <p>小羽：「不正確，因為整數不能動。」</p> <p>老師問：「為什麼整數不用除以 2？」</p> <p>小羽：「因為他還是兩張(貼紙)，不會變一張。」</p> <p>(上一題的情境是貼紙)</p>	<p>小美和小易在解一題數學題：請用擴分找出 $\frac{4}{5}$ 的等值分數。</p> <p>小美的算式：$\frac{4}{5} \times 2 = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$</p> <p>小易的算式：$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$</p> <p>你認為小美和小易的算式是否正確呢？請說明原因。</p> <p>小羽：「小美是對的。」</p> <p>老師問：「為什麼？」</p> <p>小羽：「因為小美有把乘 2 寫出來，改的人才知道。」</p>

三、教學實踐後之調整

在教學實踐後，研究者與研究團隊討論，並依討論結果修正教學方案，以下說明教學方案調整的內容：

(一) 將佈題情境的敘述簡化：

過長的敘述學生不一定能理解，且會降低學習動機，因此研究者將每一堂節課的第一道操作活動的題目敘述簡化，讓學生能馬上理解題目的意義，降低學生的認知負荷，將心思專注於解題。部份調整內容如表 10 所示：

表 10

教案(約分離數量)調整之內容

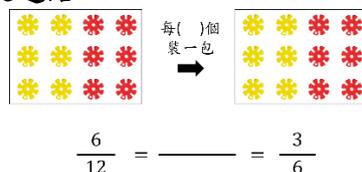
教學方案調整前	教學方案調整後
<p>小雲媽媽做了手工餅乾，讓小雲帶給好朋友們一人一盒，一盒餅乾有 12 個，其中 8 個是草莓口味，4 個是原味。</p> <p>(1) 草莓口味的餅乾是多少盒？</p> <p>(2) 因為餅乾盒可以回收再利用，小雲帶了小袋子讓朋友們裝餅乾。小佳說：「我們家總共六個人，所以我每兩個餅乾裝一包。」小佳把每兩個餅乾裝一小包，請用花片做做看，並說說看 $\frac{8}{12}$ 盒的草莓餅乾也可以說是幾分之幾盒？</p>	<p>一盒花片有 12 個，其中 6 個是紅色，6 個是黃色。</p> <p>(1) 紅色的花片是多少盒？</p> <p>(2) 還有其他說法嗎？請用花片做做看。</p>

(二) 強化教具操作與算式的連結：

從具體操作到數學算式，引導學生將具體操作以符號表徵呈現，強調兩者

間的連結，讓學生真正理解數學算式的意義。如圖 3 所示：

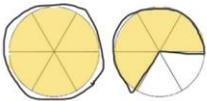
圖 3
 約分之具體操作與數學算式之連結



(三)釐清學生的想法：

教學過程中，不論學生答對或答錯，教師都要提出關鍵問話，確認學生的想法，並在學生答錯時釐清學生的迷思概念。切勿一開始學生解題時教師就引導，將解題過程切割，造成學生無法獨立解題。透過教師關鍵問話，能讓學生再次整理其思考，也讓教師更好掌握學生的學習狀況，進而根據學生的回應，提供適切的引導，將學習的主導權還給學生。教師的關鍵問話如表 11 所示：

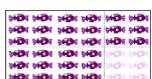
表 11
 學生答錯時教師之關鍵問話

約分(連續量)之關鍵問話	擴分(離散量)之關鍵問話
<p>同學們吃了 $\frac{10}{6}$ 個蛋糕，也可以說是三分之幾個蛋糕？請畫畫看，並寫出算式。</p>  <p>讓學生畫完、寫完算式，再提出關鍵問話： 「為什麼要這樣畫呢？」 「一個蛋糕在哪裡？六分之十，六是什麼意思？在圖上的哪裡？十是什麼意思？在圖上的哪裡？」 「那現在題目的三分之幾的蛋糕的三是什麼意思？一個蛋糕要分成幾等份？黃色的部分佔幾等份？」</p>	<p>$\frac{5}{6}$ 袋糖果也可以說是十二分之幾袋？請畫畫看，並寫出算式。</p>  <p>讓學生畫完、寫完算式，再提出關鍵問話： 「為什麼要這樣畫呢？你畫的會寫成幾袋？」 「一袋在哪裡？六分之五袋在哪裡？一袋糖果分成幾等份？」 「题目的十二分之幾袋是什麼意思？我現在有六等份，要怎麼變成十二等份？要怎麼畫？」</p>

(四)將再表徵活動提供學生的圖示刪掉：

再表徵活動中，原本提供學生具體圖示，改成沒有圖示，讓學生自行畫圖表徵，確認學生理解分數以及約分、擴分的意義；另外考慮到學生畫圖的耐心與時間，也將再表徵活動中的數字調小。部分調整內容如表 12 所示：

表 12
 教案(擴分離散量)調整之內容

教學方案調整前	教學方案調整後
<p>山山國小準備了萬聖節糖果要發給小朋友，一袋糖果有 36 顆，五年甲班分到 $\frac{5}{6}$ 袋糖果。$\frac{5}{6}$ 袋也可以說是十二分之幾袋？請畫畫看，並寫出算式。</p> 	<p>山山國小準備了萬聖節糖果要發給小朋友，一袋糖果有 12 顆，五年甲班分到 $\frac{2}{3}$ 袋糖果，$\frac{2}{3}$ 袋也可以說是幾分之幾袋？請畫畫看，並寫出算式。</p>

(五)減少題目，讓學生有足夠的時間思考、表達與畫圖表徵：

原本的教學與活動安排較多、較緊湊，學生學習時並未真正理解。因此研

研究者將題目減少，每一題透過學生的操作、解釋、畫圖、算式紀錄等，確認學生真的理解數學概念，而非機械化的解題。

伍、結論與建議

本研究之教學方案已實施於一位學生，為使教學方案更完整、讓學生有更佳的學習歷程、提供更多教育工作者參考，研究者將進行第二輪以及第三輪的教學。本研究初步之研究結果有以下兩點：

- (一)學生學習表現：學生在純數字題的表現與前測相同，均作答正確；而學生在約分和擴分的畫圖表徵上雖有進步，但仍不夠穩固。
- (二)教學實踐後教案之調整：將題目的敘述簡化；強化教具操作與算式的連結；釐清學生的想法；刪除再表徵活動中的具體圖示，讓學生自行畫圖表徵；減少題目，給予學生足夠的時間思考與解題。

綜合研究結果，研究者有以下建議：

- (一)對於較抽象的數學概念，建議讓學生先從具體的教具操作開始，理解數學概念，建立概念心像，接著強調具體操作與數學算式之連結，最後學生抽離教具，自行供給表徵，進行解題。
- (二)教師在教學時，建議多讓學生開口說明、解釋，不僅讓學生回溯其思考歷程，教師也更能掌握學生的學習狀況、理解層次，進而提供適切的教學引導，讓學生有更好的學習歷程以及更佳的學習成效。

參考文獻

一、中文文獻

- 李國家、劉曼麗 (2012)。探討國小五年級數學低成就學生在分數部分的迷思概念-以異分母分數的比較與加減為例。《科學教育月刊》，354，30-43。
[https://doi.org/10.6216/SEM.201211_\(354\).0003](https://doi.org/10.6216/SEM.201211_(354).0003)
- 林筠修、鄭柔安、張淑怡 (2021)。實體教具融入國小數學教學設計：以方塊堆疊與計數為例。《課程研究》，16 (1)，61-80。
- 洪素敏、楊德清、蔡鳳秋 (2007)。等值分數補救教學之研究。《課程與教學》，10 (3)，125-160。
<https://doi.org/10.6384/CIQ.200707.0125>
- 郭沛婕 (2015)。學習軌道理論在分數比較之教學實驗研究。〔碩士論文，國立臺中教育大學〕。臺灣博碩士論文知識加值系統。
<https://hdl.handle.net/11296/ymz67t>。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域。臺北：教育部。
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要—國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。臺北：教育部。
- 許睿恩、劉曼麗 (2020)。應用認知負荷理論於資訊融入教學之探析：以國小四年級等值分數為例。《屏東大學科學教育第6期》，72-98。
<https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=P20161017006-202010-202107020012-202107020012-72-98>
- 甯平獻 (編) (2010)。《數學教材教法》。五南。
- 甯自強 (1993)。經驗、察覺及瞭解在課程中的意義~由根本建構主義的觀點來看~。論文發表於國小數理科教育學術研討會，臺東市。台東：台東師範學院。
- 甯自強 (1997)。量的子分割(三)~等值分數的引入~。《教師之友》，38 (5)，36-40。

二、 英文文獻

- Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. Boston, MA: Shambhala/New Science Library.
- Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. In *Educational design research* (pp. 64-78). Routledge.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London, UK: The Falmer Press.

A preliminary study of the remedial teaching of reduce a fraction and expand a fraction through teaching aids in fifth grade

Wei-Hsin Chang¹ Shu-I Chang²

¹Department of Mathematics and Information Education College of Science, National Taipei University of Education

² Department of Mathematics and Information Education College of Science, National Taipei University of Education

Abstract

The purpose of this research is to develop a remedial teaching plan of reduce a fraction and expand a fraction through teaching aids in fifth grade. In order to achieve the purpose of the research, the researchers adopted the design research method, integrated the snowflake building blocks, Cuisenaire rods and specific illustration into the teaching, and discussed with the research team after the teaching practice and revised the teaching plan.

The preliminary findings of this study: (1) The student's learning performance: The student's performance in the pure number questions is the same as that of the pre-test, which is correct; although his performance in drawing representation of the reducing and expanding fractions has improved, it is still not stable enough. (2) The adjustment of the teaching plan: Simplify the questions; strengthen the connection between the operation of teaching aids and the formulas; clarify students' thinking; delete specific illustration in the representation activities, and let students draw their own representations; reduce the number of questions, and give students enough time to think and solve problems.

Key words: teaching aids, reduce a fraction, expand a fraction

為何學生會喜歡他們認為最難的數學遊戲

黃暉娟¹ 吳慧敏² 朱庭華³

¹ 佛光大學資訊應用學系 youzhen@mail.fgu.edu.tw

² 佛光大學心理學系 hmwu@mail.fgu.edu.tw

³ 佛光大學心理學系 ppp4567890@yahoo.com.tw

摘要

本文的研究團隊曾發展一款複習國小平面圖形性質的數學桌遊，名為「尼羅河家園」，該遊戲依循 ADDIE 的流程開發後進行一次大規模的實施，在該次實施中發現高比例學生認為最困難的遊戲卻是學生票選為第二喜歡的關卡，本研究團隊好奇為何學生會最喜歡一款他們認為最難的數學遊戲關卡，因此以不同的對象進行了二波的研究，試圖瞭解學生喜歡一個數學遊戲的理由，以及學生能力與他們喜歡的關卡和喜歡的理由是否有不同。本文主要在報導三波實施的結果。初步結果顯示，第一波研究發現的現象在第二波和第三波中並未出現，主要原因可能是第一波的研究對象是全年級的學生，包括真正的高能力學生，且採合作式學習，低成就學生在過程中受益最多，因此 50% 的低成就學生最喜歡的關卡也是大家公認最難的關卡。而不管學生能力，學生最喜歡的遊戲主要也是他們得分最多、最易得分的關卡，中高能力其次的理由是簡單和人際互動。低成就學者則主要是得分容易度和簡單。

關鍵字：數學桌遊，桌遊設計，合作式遊戲，數學能力，遊戲偏好

壹、前言

2015 年時，鑑於台灣學生在國際數學評比中呈現高學習成就與低學習興趣的表現。另一方面，學童沉迷或樂於遊戲，本團隊試圖將遊戲的元素融入於數學的學習活動。但涉及數學專業知識的遊戲可能影響低成就學生的遊戲體驗，因此特別採用合作式學習設計。本團隊在 105 年度的國科會計畫「合作式幾何圖板遊戲之設計與成效評估」下，完成一款複習國小平面圖形性質的桌遊「尼羅河家園」。該遊戲有四個單元，實施資料顯示，四單元中學生第二喜歡的竟是最多人指為最難的關卡(42.36%)，這引發我們的好奇，是什麼樣的因素讓學生喜歡一個他們認為困難的任務，因此我們又針對不同的對象進行了二波的施測。本文的重點在報告這三波研究遊戲內容、對象差別及學生對遊戲喜好的理由，試圖釐清我們的疑惑，及瞭解如何設計吸引學生的數學桌遊。

貳、研究目的與研究問題

本研究的主要目的在瞭解學生喜好某特定遊戲的理由及不同能力的學生之間是否存在喜好類別與理由的差異。本研究的具體研究問題如下：一、學生對關卡難度的感受如何，二、學生對關卡的喜好度與喜歡特定關卡的理由是什麼？三、不同能力的學生對遊戲的喜好有何不同？

參、文獻回顧

一、合作學習：

Johnson & Johnson(1994)認為，合作學習是指使用小組的教學讓學生可以一起工作，達到他們自己及彼此的最大學習的模式。他們歸納合作學習模式有五個重要的要素：正向互依、助長的互動、個人的責任、群體歷程、人際與小團體技巧。文獻指出(Johnson & Johnson, 1985)，合作式學習對低成就學生的學習成效尤其有好處。

二、幾何學習

Van Hiele 將學童幾何發展分成了視覺期、分析、非型式演繹、型式演繹和嚴謹五個層次。一般學生達到 level 0 的視覺期是較為容易地，但由 level 1 的分析階段，跨越到 level 2 的非型式演繹，則有一定的難度。國內的研究報告普遍指出，在台灣國小高年級到大部份的國中生的幾何思考層次，皆尚處於 level 1 的階段(吳德邦、沈紀伶、馬秀蘭，2009；李坤達、葉啟村，2005 等)，這也影響到中學生引用已學幾何性質進行論證的能力。要克服這個問題，分類活動及對物件屬性的了解相當的重要 (Fujita & Jones, 2007)。

三、桌遊

遊戲式學習在近年大量的被使用在教學現場並得到相當正面的成果，而其中桌遊以其獨特的好處得到了許多的關注。陳容瑋、許育光(2016)整理出八項以桌遊進行悅趣化學習的好處，如(一)適合多人參與，人數彈性；(二)有適合不同年齡的遊戲規則；(三)遊戲可以反覆練習；(四)遊戲進行方便且安全；(五)密集的社交互動；(六)攻擊昇華；(七)具有學習功能；(八)重視創意與美感。朱庭華(2018)整理近年研究成果，得出桌遊在提升學生學習的動機、促進師生互動與提升班級同儕的凝聚力有正面的影響。

肆、「尼羅河家園」數學桌遊簡介

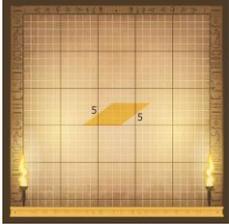
本研究所使用之桌遊設計流程係以 ADDIE 流程進行，遊戲的內容主要為國小範圍的平面圖形之類型與相關性質，包括平行、垂直、對稱、對角線、全等、邊與邊長、周長、角與角度、內角和、三角形與四邊形類別、相似形、圖形的底高與面積等概念與知識。105 學年度經過四個學校(含一個補習班)三大回合的形成性評量，依據遊戲過程發生的現象及使用者的意見修改遊戲的內容設計與機制，最後發展出名為「尼羅河家園」的桌上型數學遊戲。又於 106 學年度再次對卡牌內容進行擴充修訂改版，修改部份內容。107 年針對低成就學生再度進行測試。

一、遊戲道具：

有圖形卡牌、屬性卡牌、瑪特卡牌、挑戰卡牌、遊戲圖版、記分板、計分棋子、骰子、計時工具等遊戲道具，示例說明如下：

表 1 尼羅河家園遊戲道具表

圖形卡:卡面有三角形、平行四邊形、梯形及不規則多邊形	屬性卡:卡面有一條屬性
----------------------------	-------------

	
<p>挑戰卡:卡面有一關鍵提示詞</p> 	<p>瑪特卡:正面及背面</p> 
<p>遊戲圖板 中間的長方型為中央展示區 四周標有使者的區域為四個玩家個人的展示區</p> 	

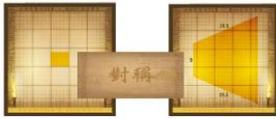
二、遊戲關卡說明:

本遊戲每個關卡皆為四人一組的遊戲，遊戲中每個人依序行動並允許無法行動的學生放棄該回合。遊戲中，每一關玩家出牌時必須說明其原因。在第一關及第二關 A 及第四關中，關卡玩家可使用瑪特卡對其他玩家的遊戲結果進行「糾舉」以獲取額外的分數，糾舉時需詳述理由，每次成功的糾舉可得 1 分。各關需要做用的道具、起始遊戲設置及玩法簡要說明、各關卡遊戲時間如下表 2。

表 2 尼羅河家園遊戲關卡設置與玩法簡要說明

關卡	簡要玩法說明	使用道具	得分
第一關 圖文並茂/ 配配配	<p>玩家從自己手上的屬性卡中，找出遊戲圖版中央展示區圖形卡能滿足的屬性，並將其打出。若無法行動則喊"Pass"。起始範列如下圖 1</p>  <p>圖 1: (圖文並茂)/配配配起始範例</p>	圖形卡、屬性卡、瑪特卡	出屬性卡牌的玩家，1 張正確的屬性卡可以得到 1 分，2 張得 2 分...以此類推。一次糾舉正確得到 1 分。錯誤出牌或糾舉不得分在遊戲時間限內，可重複進行數輪。
第	玩家每人一張圖形卡，場中央有四張屬性	圖形	拿走 1 張正確的

二關 A 按圖索驥	<p>卡。玩家需要到場中央的屬性卡中，找到至少兩張手中的圖形卡能滿足的屬性，並據此得分，若無法找到，可更換一張自己手上的圖形卡或場中央的屬性卡。</p> <p>起始範例如下圖 2:</p>  <p>圖 2 A 按圖索驥起始範例</p>	卡、 屬性 卡、 瑪特 卡	<p>屬性卡可得 1 分 (但每一次至少要拿走 2 張才可開始計分)</p> <p>一次糾舉正確得到 1 分。錯誤出牌或錯誤糾舉不得分。在遊戲時間限內，可重複進行數輪。</p>
第二關 B 蓋蓋蓋	<p>本關中，玩家輪流作為主席，做主席者持一張圖形卡並放置場中央，其餘三位玩家每人持三張圖形卡，主席有三次機會說出一條符合自己的圖形卡的屬性，而其餘玩家要協助將自己手中，符合該屬性的卡牌蓋牌。</p>  <p>圖 2 B 蓋蓋蓋起始範例</p>	圖形 卡、 瑪特 卡(只 有主 持人 要用)	<p>非主席的玩家，每蓋一張牌得一分，主席玩家的得分，是其餘三位玩家得分的總合。在遊戲時間限內，依時針方向依序更換主席，可重複進行數輪。</p>
第三關 圖 形 接 龍/ 串 串 串	<p>由一個玩家先抽 1 張圖形卡放到中央展示區當作起始屬性連結卡牌。玩家們各抽 1 張圖形卡當作自己的手牌，遊戲起始狀態如圖 3A。個人展示區前的挑戰卡是團隊共用的，不屬於個人。玩家要從挑戰卡上列出的屬性中，找出能夠連結自己與場上的圖形卡的共同相關屬性條件，好將自己的卡牌連接上去。在同一回合中，已經被使用過的挑戰卡，不能再使用。玩家們必須要將 5 張圖形卡連結成為一條直線才能得到分數，無法順利完成五張的連結時，玩家們可以選擇一起喊 PASS，棄掉所有的卡牌，重啟一輪。</p>	圖形 卡、 挑戰 卡、 瑪特 卡	<p>圖形接龍:順利將 5 張卡連成一直線，每個人可得到 5 分，也就是團隊可得到 20 分的分數</p> <p>串串串:順利串成一直線每個玩家各得到 2 分，在遊戲時間限內，可重複進行數輪。</p>

	 <p>圖 3A 圖形接龍/串串串起始範例</p> <p>(左邊的長方形和右邊的梯形共同的相关屬性是它們都是線對稱圖形)</p>  <p>圖 3B 圖形連結示例</p>  <p>(都是線對稱圖形) (都具有鈍角) (底都是 24) (都是三角形)</p> <p>圖 3C 圖形成功連結示例</p>		
<p>第四關 圖形 配對/ 對對對</p>	<p>小組成員分成兩隊進行，每一隊各抽 6 張圖形卡，利用挑戰卡上的屬性提示條件(例如邊長、角度、面積等等)，向另一隊的小組成員說明每次如何利用一個屬性條件將 6 張圖形卡分成 2 堆卡牌。(可分成 1 vs 5 張，2vs 4 張，3vs 3 張，但不能是 6vs0 張的分法)。在同一回合中，已經被使用過的挑戰卡，不能再使用。遊戲起始設置如下圖 4A，分堆示例如下圖 4B</p>  <p>圖 4A 圖形配對/對對對起始設置</p> <p>分堆範例 1</p>  <p>(左邊兩張圖形是三角形，右邊的圖形不是三角形)</p> <p>圖 4B 圖形分堆/對對對示例</p>	<p>圖形 卡、 挑戰 卡、 瑪特 卡</p>	<p>每完成一次成功且正確的分堆，小隊的兩位使者各得到 3 分，完成愈多種正確的屬性分堆條件，累積的分數就愈多。做出錯誤分堆而被另一小隊使者提出糾舉時，糾舉正確的使者可以額外加 1 分。</p>
<p>第五關</p>	<p>首先，小組的玩家先抽 12 張圖形卡，並挑選 6 張進行分堆出題。小組需先在紙上寫出盡量多可以據此將此 6 張圖形分為已確</p>	<p>圖形 卡</p>	<p>出題組有寫猜題組沒猜對，出題組每人得 2 分。</p>

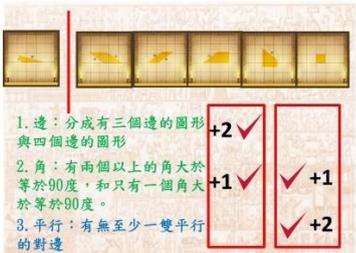
猜 猜 猜	<p>定的兩堆圖形的屬性條件。並交給小組主持人確認屬性的正確性。而後將已確定的兩堆留在桌上，小組與另外一小組整組交換位置，觀察另一組留在桌上的分堆方式，猜測盡可能多的對方據以分堆的屬性依據，並寫在紙上。</p>  <p>圖 5 猜猜猜分類及計分示例</p>	<p>出題組有寫猜題組也有猜對，雙方每人得 1 分。出題組沒寫，但猜題組有寫出，猜題組每人得 2 分。</p>
-------------	---	---

表 3 三次施測遊戲體驗時間

研究工具:體驗的遊戲關卡及時長(不含遊戲介紹與說明)			
	第一波	第二波	第三波
第一關圖文並茂/配配配	14min	17min	17min
第二關 A 按圖索驥	10min x 3 次	未使用	未使用
第二關 B 蓋蓋蓋	未使用	20min	20min
第三關圖形接龍/串串串	10min x 2 次	15min	15min
第四關圖形配對/對對對	3min x 4 次	15min	15min
第五關猜猜猜	未使用	24min	24min

三、 實施對象與流程

本團隊共對不同關卡組成之尼羅河家園桌遊進行三波的實施研究，遊戲組相關資訊如下表 4。

表 4 三次研究實施對象與流程

	第一次	第二次	第三次
實驗對象	遊戲組為新北市某國小六年級六個班級的學生共 151 人。	宜蘭地區某安親班的國小高年級學童共 22 人	宜蘭地區某國五年級上學期數學屬中後段(後 50%)的學生中，符合資格的學生 24 名做為實驗組
分組模式	每一班的學生先依最靠近的一次期中考成績分成高分組與低分組，再以四人為一組(2 高成就 2 低成就)將學生隨機分組，資源班學生以外加的方式參與某一組(即一組有五人)。若有不完整	每組 4 人，以前測數學成績將學生分為高成就與低成就，遊戲進行時先主要以年級分開，再以四人為一組(2 高成就 2 低成就)，不足數組別由工作	學生分成「相對高成就」與「相對低成就」二組，分組時，採能力混合分組，即二個「相對高成就」和二個「相對低成就」為一組。

	組則由工作人員遞補成一組	人員遞補。	
遊戲體驗過程及問卷施測	遊戲分三周，每周一小時完成，並於最後一次遊戲結束後進行遊戲經驗問卷與半結構式訪談。	分兩個半天完成遊戲，並於最後一次遊戲結束後進行遊戲經驗問卷與半結構式訪談。	遊戲分三周完成，並於最後一次遊戲結束後進行遊戲經驗問卷與半結構式訪談。

四、實驗控制:

為確保遊戲評分之正確性，每一小組配有一名主持人，在遊戲過程中判別學生關卡中答案的對錯、紀錄得分狀況。但不會告知遊戲解題技巧及提示。同時為免不同主持人遊戲引導品質的差異，遊戲引導統一以預錄影片執行，但會回答學生看完影片後對遊戲規則的立即疑問。

伍、研究結果

針對三波實施後，學生於完成尼羅河家園的遊戲後之問卷與訪談之結果，特別是學生覺得遊戲各關的困難度、喜好度與最喜歡的理由，分別整理如下:

一、學生對關卡的難度感受

在三波的研究詢問學生喜歡的關卡的方式略有不同。第一波研究在進行完完整的遊戲後，詢問學生哪關最難，因為此種方式只能知道各關卡被列為最難的次數，無法知道學生對其它關卡的難度感，因此第二波改為排序，學生針對所進行的關卡五個關卡，由最難排到最不難，再依據學生的排序 1 到 5，分別轉為 5 到 1 的分數，又考慮學生有時可能無法在二個關卡中區別難度之差異(即同樣困難或簡單)，因此第三波改為最難的前三個，分別給予 3, 2, 1 的難度分數。由於三波研究所使用的喜好度調查方式不同，不宜不同研究波次間比較，但從不同的研究可以分別看出學生對不同關卡難度感受之異同。

表 5 學生對各關之難度感受

5A 第一波研究學生認為最難關卡分配次數				
	配配配	按圖索驥	串串串	對對對
第一波	21 (14.58%)	40(27.78%)	61(42.36%)	22(15.27%)

5B 難度排序轉為難度量尺分數					
	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
第二波	42	41	65	70	91

5C 難度排序轉為難度量尺分數					
	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
第三波	15	5	82	31	32

綜合三波的研究，在第一波研究學生覺得各關的困難度依序為串串串—按圖索驥—對對對—配配配。第二、三波修改了按圖索驥的玩法，取代為蓋蓋蓋，並加入猜猜猜的關卡，第二波的學生對各關難度的排序為猜猜猜—對對對—串串串

串—配配配—蓋蓋蓋。第三波學生對各關難度的排序為串串串—猜猜猜—對對對—配配配—蓋蓋蓋，二波學生共同認為蓋蓋蓋最簡單

二、學生對關卡的喜好度

在三波的研究詢問學生喜歡的關卡的方式略有不同。第一波研究在進行完完整的遊戲後，詢問學生最喜歡哪個關卡及喜歡的理由，結果如表 6A。因為此種方式只能知道各關卡被列為最喜歡的次數，無法知道學生對其它關卡的喜好程度，因此第二波改為排序，學生針對所進行的關卡五個關卡，由最喜歡排到最不喜歡，再依據學生的排序 1 到 5，分別轉為 5 到 1 的分數，結果如表 6B。又考慮學生有時可能無法在二個關卡中區別喜好之差異(即同樣喜歡或不喜歡)，因此第三波改為針對各別關卡分別給予喜好的分數(1~10)，結果如表 6C。由於三波研究所使用的喜好度調查方式不同，不宜不同研究波次間比較，但從不同的研究可以分別看出學生對不同關卡喜好的程度之異同。第一波研究中全體最喜歡的關卡是對對對(43.24%)，其次是串串串(36.49%)。讓研究者訝異的是 50% 的低分組學生喜歡全體公認最難的串串串。

表 6 三波的尼羅河家園研究學生對關卡的喜好情形

	配配配		按圖索驥		串串串		對對對	
	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比	人數	百分比
低(=50)	9	18.00%	1	2.00%	25	50.00%	15	30.00%
中(n=54)	9	16.67%	4	7.41%	19	35.19%	22	40.74%
高(n=44)	6	13.64%	1	2.27%	10	22.73%	27	61.36%
全體(N=148)	24 (16.22%)		6 (4.05%)		54 (36.49%)		64 (43.24%)	

6B 第二波研究喜歡程度排序轉為喜歡度量尺分數

	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
低分組(n=11)	40	50	40	22	22
高分組(n=11)	35	39	28	32	28
全體	75	89	60	54	46

6C 第三波各關喜好度評分(1~10)之平均

	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
第三波	5.87	6.35	5.26	5.61	5.61

三、喜好理由

本研究將學生的理由本團隊的一位研究生先進行分類後，由二位計畫主持人進行第二次分類，不一致的地方進行討論，最後取得一致共識，共萃取出 11 個有效分類，如下表 7。其中 8 出現在第一波研究最難的關卡，學生認為「只要....就好」，很簡單，但事實上我們的觀察記錄是在這一波的研究，對象是新北市國國小全五年級的學生，包括真正高能力的學生，在遊戲過程中高能力的學生會發展出策略及找到破解關卡的方法，讓自己和小組的成員快速累積分數，低成就的學生只要配合指引，便可順利出牌，不需燒腦思考，因此本團隊

將這類的簡單列為不勞而獲的簡單，且它只出現在有真正高能力的參與時。研究二的對象共 22 人，依前測分為二半，前半為高分組，後半為低分組，因樣本數少，所以能力是相對的。研究三是針對宜蘭市某國小五年三個班，研究的參與者主要是來自各班後半數學低成就的學生，因此皆歸為低成就學生。表 7 是三波學生最喜歡特定關卡理由(可多個多由)。在第一波研究中學生最喜歡的前三個理由依序是得分容易度-簡單-人際互動。以能力看，中高分組最喜歡的前三個理由也得分容易度、簡單和人際互動，只是排序略有不同，但低分組的排序則為得分容易度-有趣好玩-簡單。第二波不管能力，最喜歡的也是得分容易度，其次是簡單和好玩。第三波低成就學生最喜歡的理由是簡單，其次則為有趣好玩、人際互動、有學習和成就感。從三波來看，得分的容易度是學生最喜歡的理由，第三波的學生

表 7 依能力最喜歡特定關卡的理由

	1 難 易度/ 簡單 易 懂、 難 易 適 中	2 有 趣好 玩	3 容 易獲 得(增 加)分 數	4 互 相合 作(人 際互 動)	5 數 學學 習	6 挑 戰性	7 成 就感	8 不 勞而 獲(簡 單)	9 刺 激	10 理 由空 白	11 不 知 道、 沒理 由就 是喜 歡	12 答 非所 問
第一波												
低分組	8	9	13	6	1	0	1	1	1	9	0	1
中分組	10	5	16	11	3	2	7	1	1	3	2	
高分組	9	5	15	8	1	4	1	0	0	4	1	1
合計	27	19	44	25	5	6	9	2	2	16	3	2
第二波												
低分組	1	0	6	0	0	0	0	0	0	4	0	0
高分組	3	2	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
合計	4	2	11	0	0	0	1	0	0	4	0	0
第三波												
低成就	5	2	0	2	2	0	2	0	0	0	0	0

因為學生最喜歡理由是得分的容易度，因此整理各關的平均得分如下表 8。

表 8 各關平均得分

第一波	配配配	按圖索驥	串串串	對對對	
	5.22	14.86	35.21	50.19	
第二波	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
	4.39	38.18	5.36	11.00	20.55
第三波	配配配	蓋蓋蓋	串串串	對對對	猜猜猜
	8.13	25.33	4.33	5.92	10.17

整合學生的喜好排序與得分排序，基本上學生最喜歡的關卡得確是他們得分最

高的關卡。

表 9 三波資料之喜歡排序與得分排序

波次		排序
第一波	喜歡排序	對對對-串串串-配配配-按圖索驥
	得分排序	對對對-串串串-按圖索驥-配配配
第二波	喜歡排序	蓋蓋蓋-配配配-串串串-對對對-猜猜猜
	得分排序	蓋蓋蓋-猜猜猜-對對對-串串串-配配配
第三波	喜歡排序	蓋蓋蓋-配配配-對對對/猜猜猜-串串串
	得分排序	蓋蓋蓋-猜猜猜-配配配-對對對-串串串

陸、綜合討論

綜合三波的資料顯示，第一波的資料明顯與其它二波不同，串串串在第一波和第三波都被評為最難，第二波則為第三難。第一波和第三波的低成就組都是全年級的數學低成就者，因此本團隊比較這二波低成就學生對於尼羅河家園各關卡的喜好，發現第三波的低成就參與者的喜好反應較接近預期，而第一波的低成就組的喜好反應非常出人意料之外，綜合相關資料及過程中的觀察，分析造成第一波研究高比例(50%)最喜歡的關卡也是最難的關卡的主要原因可能是因為第一波的研究是全年級的學生，有真正的高成就者，遊戲採異質分組及合作式機制，因此每一組中都有高低成就的學生，而在這波的研究中，高成就學生會發現規則、發展策略，甚至找到破解遊戲的方法，幫助自己快速得分，甚至帶領小組走快速得分策略，同組的人也會互相觀摩而學習，因此低成就者受惠最多。然而第三波的參與者都是低成就者，沒有真正高能力可以模仿學習的對象，彼此之間的互助也較有限，在無人可以互助的情況下，容易放棄。在第二波的研究，一次成功串接的得分降低，因此整體喜好的程度也下降，但低分組的喜好度仍是第二高的。第三波研究，沒有高能力參與者，串串串的喜好度跌至谷底。第二關的蓋蓋蓋是第二波和第三波學生共同最喜歡的，主要原因可能是在這關卡中，輪到當主席的玩家要用一張牌在三個條件內儘可能的蓋掉其它玩家手上的三張牌，其它玩家蓋掉的牌數就是輪到當主席的玩家的分數，而其它玩家的分數則是主席蓋掉的牌，因此其它玩家也努力想讓主席說出吻合自己手牌的條件。對輪到當主席的玩家而言，可以發號施令，又可以讓別人蓋牌，把別人的分數加總變成自己的分數，在第二、三波的研究中，這是最有感累計分數的方式，且遊戲每次只考量一個條件，相較於其它關卡，雖然每次的成功出牌潛在可以得多分，但需同時考慮較多元素，對低成就學生，燒腦程度超過他們的負荷，因此普遍偏好一次只考慮一個元素的第一關和第二關。

針對第一波研究發現的現象：高比例學生喜歡最難的關卡，特別是低成就學生。本研究認為主要原因來自於有真正高低能力的異質能力分組及遊戲採合作式設計，當沒有真正高能力學生時，或每次成功的得分降低時，第一波研究發現的現象便消失了。

柒、結論

本研究中，無論學生的能力如何，大部份學生最喜歡的遊戲關卡是他們得分較多的關卡，他們的理由最主要也是得分的容易度，其次是簡單(即一次只考

慮較少元素的遊戲)，對低成就的學生更是如此。在有真正高低能力混合分組的合作式遊戲時，學生更常提到人際互動是他們喜歡某特定遊戲的原因，但當遊戲的參與者都是數學低成就的學生時，因人際互動而喜歡某特定關卡的因素也消失了，高能力參與者的消失使低成就學生較不易成功地合作完成任務並獲得較佳的感受。對低成就的學生，簡單、靠自己也可以成功還是比較實際的，但仍有部份低成就學生感受到在遊戲中的人際互動、學習、成就感而喜歡特定關卡。綜合三波的研究，本團隊初步認為涉及數學學習的數學桌遊，適合有真正高低能力異質分組及採合作式遊戲設計，對學生的學習幫助最大，特別是低成就的學生。遊戲雖潛在吸引人，但學生如果無法在其中因成功而得分、學習、有成就感，或有好的合作關係、良好的互動，再費力設計的遊戲，學生仍不會喜歡。

捌、參考文獻

- 朱庭華(2018)。幾何桌遊的圖形組合方式對國小高年級學童數學態度及數學表現影響之研究。佛光大學心理學系碩士論文，宜蘭縣。取自 <https://hdl.handle.net/11296/k38cwt>
- 吳德邦、沈紀伶和馬秀蘭(2009)。台灣中部地區國中學生 van Hiele 幾何思考層次分佈情形之調查研究。2009 第一屆科技與數學教育學術研討會論文集。臺中市：國立臺中教育大學數學教育學系。
- 李坤達、葉啟村(2005)。從 van Hiele 發展層次分析國小六年級學童平行概念之研究。2005 年台灣教育學術研討會
- 陳容璋、許育光(2016)。桌遊媒材在家族遊戲治療中的應用初探。輔導季刊，52(3)，36-46。
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1985). The internal dynamics of cooperative learning groups. *Learning to cooperate, cooperating to learn*, 103-124.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1994). *The nuts and bolts of cooperative learning*. Interaction Book Company.

Abstract

The research team of this article has developed a mathematics board game called "The Nile River Homeland" for reviewing the features of plane shapes for elementary school students. The game followed the ADDIE processes, and conducted a large-scale implementation. In that implementation, it was found that the game that the students voted the most difficult one was also their second favorite game.

We were curious about why, so we conducted another two studies with different participants, trying to understand the reasons and the relationship between students' abilities and their choice of a favorite game. This article mainly reports our findings. The results show that the phenomenon found in the first study did not appear in the second and third study. The main reason may be that in the first study, the participants included really high-ability students and it is a cooperative game. Low-achieving students benefited the most from the process, so as high as 50% of the low-achieving students in first study liked the most difficult game. In addition, regardless of students' abilities, the game that students like most are the ones they score the most. The second reason and third reasons for middle and high ability students are simplicity and interpersonal interaction; for low-achieving students, ease and simplicity.

Key word: mathematics board game, board game design, cooperative game, mathematics ability, game preference

引導式數學探究之課堂引導模組初探 ~以 iM-EECC 課例四年級長條圖為例

陳維民

臺中市清水區清水國民小學 megoeastern@gmail.com

摘要

課綱改革已經進入第四年，現場教學是否能跟上改變的步伐？素養導向教學和探究式教學的理念是否能夠被老師們掌握？要落實，課堂引導的模式變得重要。

本研究使用引導式數學探究 iM-EECC 的課例，此課例改編自國教院素養導向數學教材「讓數據說話」，並且拍攝教學影片，以此影片作為研究素材。

研究依照「分類、排序、確認核心和尋找連結」四個步驟進行建模，在 15 分 57 秒的教學影片中，分析、歸納出「建立連結」、「佈題」、「分享」、「總結」四個課堂引導模組，針對每個模組進行描述，包括各模組的基本模式和課堂現況調整的情形。

關鍵字：數學探究、iM-EECC、課堂引導模組、108 課綱、素養導向教學

壹、緒論

一、研究背景與目的

108 課綱強調數學素養的重要性。潘文忠(2019)曾在臉書上提出「讓孩子不再害怕數學 | 探究的歷程，就是素養」的想法。陳維民(2022)則認為探究式教學一直被視為提升認知和情意雙重目標的良方。不過，探究式教學也面臨著兩大困境：一方面，開放的思考和討論需要投入大量時間，往往會影響到教學進度；另一方面，探究素材並不容易尋找，好的教學活動設計也相對困難，因此只有少數單元會有探究素材，這也間接導致探究式教學的推廣困難。因此，針對華人、台灣的教學現場，採用半開放式的引導式探究 iM-EECC 可能會更加適合。

我們都知道，課綱改革都是許多專家和學者經過精心研究而提出的專業成果。然而，課綱的改變要真正落實到課堂中，現場老師的課堂轉型就變得至關重要。黃毅英(1996)指出教師乃為課程之執行者，設計得如何精密的課程仍有賴教師去執行；若課程改革若得不到教師的支持，就無法發揮課程的精髓。

教學現場的現況是如何呢？徐偉民(2017)指出老師偏向忠實地使用教科書

中的數學問題，但數學問題的呈現偏向以傳統講述的方式；另外教學時間的不足，使教師在教學中無法實踐改革課程所強調的理解、主動思考、推理與溝通的數學教學。

要實現課堂轉型，除了課程之外，課堂引導也是其中的重要環節。若想要實施探究式或引導式探究，其課堂引導模式必定與講述式、操作式、提問式或自主式教學模式不同。本研究針對引導式探究的數學課堂進行了詳細研究，旨在從中開發出更明確具體的課堂引導模組。

貳、文獻探討

一、數學探究教學

探究式教學最初源自於科學教育，後來也被廣泛應用於數學教育。108 課綱強調素養導向的教學，而以學生為主體的探究教學正符合素養導向教學的核心理念。根據美國國家科學教育標準 (NRC, 1996) 認為探究是一種多方面的活動，其中包括觀察、提出問題，從實驗、書籍和其他各種資訊來源中得到證據，用工具方法去搜集、分析及解釋資料、解答問題、說明及預測，並與別人交流結果、對假設進行鑑別、運用批判和邏輯思維，並考慮其他可供選擇的解釋。

英國教育技能部 (Department for Education and Skills [DfES], 2001, p. 21) 主張「探究是數學的核心，探究技能可以讓學生問問題、定義探究的問題、計畫研究 (plan research)、預期結果 (predict outcomes)、推論與作結論」。在此架構下，國內外不少學者也投入數學探究的研究。秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林(2009) 指出數學探究猶如數學的「實驗」或「探索」過程，包含「問題—臆測—論證—精緻」的循環程序。

在許多學者的研究之下，數學探究教學已逐漸成熟。然而，在台灣的教育現場卻不容易推動，可能的原因包括：第一，在教學內容方面，老師長久以來一直依賴教科書；第二，在教學時效方面，探究式教學較為費時，不易轉型，尤其在考量教學進度的情況下；第三，在教學引導方面，老師較擅長講述、說明或提問方式，不習慣帶領學生進行探究式學習。

二、iM-EECC

iM-EECC 的前身是「數學化課程的研發設計與實踐」(陳維民, 2013)。陳維民(2022)指出，iM-EECC 在探究式教學的基礎上，發展出引導式數學探究，其特點有兩個方面：一、教學節奏：以「設局」提升教學成效，先設置情境啟發學生的數學思維並豐富其經驗，再設計情境促使概念衝突，讓學生更有所領悟；二、課程設計：先「模擬數學知識的由來」，再考慮學生當前的生活經驗以及數學概念的發展，就能夠發展出一個符合 iM-EECC 教學理念的課例。

iM-EECC 教學系統和創課的設計方法介紹如下：

(一)、教學系統的簡介

iM-EECC 是「數學科起承轉合教學系統」的英文簡稱。其中，iM 代表數學探究(inquiry Math)，EECC 則是學生數學探究的四個階段，分別是投入(Engagement)、豐富知識(Enrichment)、領悟(Comprehension)和壓縮(Compression)。

特別的是，在承和轉的階段，iM-EECC 採用了「設局」的方式，以提升教學節奏和效果，因此被歸類為引導式探究教學。

(二)、創課的設計方法

以下是創課的設計方法，包括分析、模擬和考量三個觀點，以此提出教學設計：

1. 分析教科書：首先，需要清楚教科書的設計脈絡，包括數學知識點和學習鷹架。這樣可以釐清學習目標，有助於後續評估和調整。
2. 回歸數學本質：數學知識的產生源自於需求。需要先模擬數學知識的由來，找出關鍵的需求以及知識演化的路徑，以學科發展邏輯為教學設計的骨架。
3. 重視學生的數學概念發展：在小學階段，兒童的數學概念發展對學習有著重要的影響。因此，需要根據學生的年級和所處的階段來調整教學設計。

(三)、課堂引導方面的探討

引導式探究的課堂引導型態與講述式、操作式、提問式或自主式教學型態有所不同。在現場的課堂引導教學中，它其實是上述四種教學方式的綜合體。陳維民(2015)在《透過教育的衝擊發展自己的體系》一文，曾提到了「起-承-轉-合」四個階段中，老師在課堂引導時的關鍵與精神以及評估的標準「肯、做、悟、練」。本研究則是針對引導式數學探究 iM-EECC 課堂引導的細部研究，旨在發展更具體明確的課堂引導模組。

叁、研究方法

本研究使用內容分析法，以定性方式分析一位國小數學老師在課堂中使用引導式數學探究，進行教學時所展現的引導情況，並初步探討本次教學的引導模組。

一、研究對象與背景

本次研究的對象是一份以引導式數學探究為主要教學模式的教學錄影，影片中的教學者也是本研究的研究者，此錄影為其參加第九屆“新課堂·新教師”海峽兩岸基礎教育交流時所錄製的。以下說明錄製的過程：

(一)教學影片拍攝的緣由

受到疫情的影響，兩岸學術教學變得不易，因此改成線上或混合的方式進

行。在這種情況下，教學者在研討會之前，先錄製了自己的課堂，並在研討會當天，以混合和線上連線的方式參加了研討會。

影片的拍攝日期為2022年10月，原定的交流日期為2022年11月，但後來受到疫情的影響，延遲到了2023年3月2日。

(二)授課單元與教學內容

本次教學的單元是四年級的長條圖。教學內容改編自陳維民、謝滄婷(2018)于國教院素養導向數學教材「讓數據說話」，此單元設計是iM-EECC的課例之一。改編的部分從兩方面調整：首先是將「林書豪的影片」這個教學活動做了修改，因為原本的引導時間較長，且主要概念在統計表而非長條圖上；在本次教學活動中，我們改為使用「老師兒子的投球影片」，以更簡潔的方式進行引導。其次，我們加入了一些人生道理和激勵元素，期望在數學課中落實班級管理，同時營造溫馨的學習環境。

本次研究的教學影片，核心概念為長條圖，細分為四個活動：跟學生連結、原始紀錄和統計表的優勢、長條圖的優點、長條圖的重要元素。

(三)授課班級

教學者非授課班級的老師，向彰化縣某國小借用一個班級。教學者和授課班級的老師相識，而且該班的老師也經常在課堂中使用引導式數學探究iM-EECC的教學法。

二、研究流程

(一)文字稿原案的製作

藉著科技的進步，文字稿原案的製作變得更加便利。將這個過程分為兩個步驟，首先將文字稿導出，接著進行潤稿。

1. 導出文字稿：本研究先將教學影片放入剪映專業版軟體進行剪輯，並利用軟體內建的文本和智能字幕功能，將語音轉換為文字檔。示例如下：

[情節 1-1]

這是什麼球 籃球 打過籃球的舉手 哇手放下OK

2. 潤稿：通過比對原教學影片、添加簡單的肢體互動，將文字稿進行潤飾，讓其更容易閱讀，並更貼近教學影片的內容。示例如下：

[情節 1-1]

1. 老師：這是什麼球？

2. 學生：籃球。

3. 老師：打過籃球的舉手，(學生舉手)，手放下。

(二)原案的內容分析

內容分析包括三步驟，首先，將潤稿完成的文字稿原案切成一個個可被分析的、完整的情節，以便進行分析。本研究按照「分類(classify)」、「排序(sort)」、「確認核心(core)」、「尋找連結(connection)」四個步驟進行分析、建模。

分類主要在找出元素，排序是建立元素間的第一個關係，是時間軸的關係，確認核心主要在思考目標和基本型，最後連結則是把相關附屬功能搭配上來。

在本研究中，內容分析進行兩個層次，第一個層次是針對單一個情節，先抓關鍵字，再將其組合成課堂引導流程簡記。第二個層次是跨越多個情節的，將所有的課堂引導流程簡記分成「建立連結」、「佈題」、「分享」、「總結」四類，然後對每一類進行課堂引導模組的初探。

1. 切成情節：本研究將四個子活動分割成 23 個情節，第一個活動細分為五個情節，第二個活動也細分為五個情節，第三個活動細分為六個情節，第四個活動細分為七個情節。

2. 抓關鍵字組成課堂引導流程簡記：在本研究中，教學活動是以簡報引動教學，為了更貼近、符合原教學現場的情況，在抓關鍵字時，先考慮簡報所提供的素材和教學企圖。接著閱讀原案，思考課堂進行的流程，並將課堂引導進行文字描述，以抓出適當的關鍵字。在必要時，重新檢視教學影片，以確保關鍵字符合當時的情況。示例如下：

情節 1-1

(1) 文字轉錄

1. 老師：(簡報)這是什麼球？

2. 學生：籃球。

3. 老師：打過籃球的舉手，(學生舉手)，手放下。

(2) 課堂引導描述：老師先給出一張照片，兩位小學生打籃球的照片，接著詢問學生：這是什麼球？當學生回答之後，老師進一步調查，那些人打過籃球，那些人沒有打過籃球。

(3) 課堂引導流程簡記：圖片+提問+作答+互動。

3. 課堂引導模組初探：依照原先的教學規劃以及課堂引導流程簡記，將流程簡記分成四類，每一類先抓出課堂引導的核心做為基本模式，接著提出一些現場教學的應變措施。擷取示例的部分如下：

情節 2-2 的課堂引導流程簡記：

重述佈題的關鍵+邀請+作答+重述+邀請+作答+重述+邀請+作答+追問+說明理由(溝通)。

情節 2-3 課堂引導流程簡記：

重述佈題的關鍵+邀請+作答+追問+說明理由(反思)+重述+邀請+作答+說明理由(反思)。

抓出課堂引導的核心是「重述佈題的關鍵+邀請+作答+重述」，先進行標註，剩下的「追問+說明理由(溝通)」、「追問+說明理由(反思)」再尋找連結。

2023年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集
*2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th
International Conference on Technology and Mathematics Education*

肆、研究結果

本研究包括四個子活動共 15 分 57 秒，第一個活動的目標在跟學生建立連結，包括老師跟孩子在學習心理上的連結，以及課程上的連結；本子活動共 3 分 20 秒，細分為五個情節(episode)。第二個活動的目標在讓學生了解原始紀錄和統計表的優勢；本子活動共 3 分 48 秒，也細分為五個情節。第三個活動的目標在讓學生了解長條圖的優點；本子活動共 3 分 20 秒，細分為六個情節。第四個活動的目標在讓學生了解長條圖的重要元素；本子活動共 5 分 29 秒，細分為七個情節。

在本研究中所使用的課堂引導模組分為「建立連結」、「佈題」、「分享」、「總結」四類，茲分述如下：

一、「建立連結」的課堂引導模組

本模組出現在第一個子活動。它的功能是在學生之間建立情緒上的聯繫，以便後續活動能夠更順利地進行。

建立連結的基本模式為：圖片(或影片+暫停)+提問+猜測或作答，根據課堂現況，可以進行以下五種調整：

1. 在提問之前，為了讓教師和學生之間產生連結，也為了讓課程和學生的生活產生聯繫，可以新增「與老師相關的話題、生活話題」；也可以新增「提醒注意事項」，以便活動進行得更順利。
2. 在學生作答期間，可以增加「是否更改猜測」以提高學生的注意力。
3. 在學生作答後，可以增加「互動」以提高班級氣氛。
4. 在學生完成猜測或作答後，如果活動已經告一段落，必須新增「確認猜測(答案)」。
5. 如果學生感到挫折，可以新增「再給一次機會」。

二、「佈題」的課堂引導模組

本模組分布在第二、第三和第四子活動。它的功能是延續第一個活動的情緒狀態，將其轉化為對探究的期望，試圖連結學生的舊有經驗，並使佈題更加聚焦，啟動學生數學思維。

佈題基本模式包括三部分：前段是「佈題+小組討論」，中段是「巡視行間」，後段是「結束討論的預令與動令」。後段可以在學生熟悉、有默契的情況下，嘗試取消或淡化。根據課堂現況，可以進行以下三個類別六種調整：

(一)學習情緒

1. 當班級剛開始，學生對討論規範不熟悉，或需要調整規範時，可以新增「小組討論分享的規範和默契」。
2. 為了鼓勵學生的學習動機或安撫情緒，可以新增「設定目標」、「接近完成任務」或是「指出問題有困難度」。

(二) 有感佈題

3. 為了讓學生對佈題更有感覺，可以在佈題之前，初級階段新增「補充說明」，中級階段新增「先給表格紀錄(或統計圖)+再補述由來」，進階階段新增「先給圖示+再聚焦到細節」。
4. 為了讓學生的討論更加聚焦，老師可以嘗試犯錯誤，新增「先給不適當答案+再精準提問」或「先給出有趣或荒謬的答案+再引導修改方向+最後提出精準的提問」。

(三) 簡潔高效

5. 最後，當老師察覺到學生覺得問題很簡單時，可以改成「佈題+暗示集體回答」或甚至「佈題+老師直接給予答案」，不要拖延時間，直接完成一個小知識點。當然，如果老師有點擔心，可以在集體回答之後新增「再釐清」。

三、「分享」的課堂引導模組

本模組分布在第二、第三和第四子活動。它的功能首先在協助溝通，透過相互交流來豐富數學知識；接著進入反思與批判，以更深刻的領悟學習內容。

分享基本模式是：佈題+邀請+作答+重述，根據課堂現況，可以進行以下五個類別十三種調整：

(一) 鼓勵、激勵

1. 在分享開始時，當學生沒有想法時，可以使用不同的鼓勵語，新增「鼓勵(勇敢猜)」或「鼓勵(試一試)」。
2. 在分享的過程中，當學生沒有新想法時，可以新增「提醒還有答案」，這樣學生會更勇於嘗試。
3. 在學生說明理由之後，可以不急著判斷對錯，先新增「鼓勵」，鼓勵可以單單只是鼓勵行為，例如「鼓勵不同意見」。

(二) 聚焦與自主選擇佈題

4. 當第二次詢問時，佈題可以改成「重述佈題的關鍵」。
5. 如果佈題是題組時，可以讓學生自由選擇想回答的問題，新增「在題組中自行挑選佈題」。

(三) 發表時的引導

6. 學生在回答問題之後，可以新增「追問+說明理由」，有些理由僅僅是溝通交流，而有些理由需要反思思考。
7. 特別需要注意的是，在課堂開始之初或每次核心佈題之後，老師可以先採取兩次「邀請+作答+重述」的方式，緩和學生的情緒，或尋求支持與認同，等到第三次邀請再加上追問，不要著急。漸漸地，學生會建立「作答+說明理由」的默契。
8. 學生在分享想法時，如果講話沒有講完整，老師可以新增引導語「然

後呢？」來協助學生完整表達自己的想法。

9. 如果老師想要促使學生進行反思，可以提醒學生進行比較，新增「詢問是否有相同意見」或「尋找不同意見」的引導語。

(四)發表後老師的反饋

10. 在許多學生分享不同想法之後，老師可以使用「採蜜模式」，選擇有用的訊息，並進行補充。新增「選用某位的訊息+補充說明」，以幫助學生更深入地理解討論內容。
11. 如果引導的結果不如預期，老師可以嘗試接下學生的答案，然後再補充自己原先的構想。新增「提取回答的關鍵字+老師重新詮釋、介紹原由」或「老師歸納並突顯答案」。
12. 如果老師想加入自己的觀點與想法，可以再新增「釐清並延伸想法」，也就是釐清想法，有時甚至可以接續學生的意見進行延伸，詳細解說老師想介紹的內容。

(五)課堂中的練習與檢核

13. 最後，在學習的最後階段，可以新增「再重問一次原問題，以確認答案」或「邀請練習」，以幫助學生更深入地理解課程內容。如果有機會新增「詼諧方式喊口令」，這可以讓學生對課堂內容更有印象。

四、「總結」的課堂引導模組

本模組出現在每個子活動的最後。它的功能在針對所學，進行局部的壓縮。

總結基本模式是：簡潔描述+引出學習目標+壓縮。首先簡單扼要地描述上一段活動，接著提醒這段活動的學習目標，最後可以給予鼓勵、練習、提醒回家作業或壓縮成一個標語，如「三三」代表長條圖的三個優點和三項重要元素。

伍、建議

依據本研究提出下列幾點建議做為未來研究者的參考。

一、研究成果

本研究針對國小四年級長條圖單元的前半段進行研究，未來仍有可能補充後半段複合型長條圖，或拓展到不同能力指標。在不同內容範疇，譬如數與計算、量與實測、代數或幾何，可能會發展出不同的課堂引導模組。

二、研究方法

在本研究中，研究者即為教學者，未來可以加強研究的信、效度。

三、文獻探討

有關數學探究的文獻缺乏近幾年的研究，課堂引導模組的文獻仍需進一步

補充。

參考文獻

- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏(2013)。教育部提升國民素養實施方案－數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。
- 秦爾聰、林勇吉、林晶珮、段曉林(2009)。數學探究教學對數學解題能力提升之個案研究。科學教育研究與發展季刊，55，83-116。
- 陳維民.(2013). 何謂「數學化課程的研發設計與實踐」？2023年4月5日擷取自網頁[部落格文章]。取自 http://mathematize7.blogspot.com/2013/09/blog-post_20.html
- 陳維民.(2015). 透過教育的衝擊發展自己的體系。2023年4月5日擷取自網頁[部落格文章]。取自 <https://mathematize7.blogspot.com/2015/07/flipped-learning-inquiry-collaboration.html>
- 陳維民、謝滄婷(2018)。讓數據說話。單維彰(主編)：素養導向數學教材(頁2-26)。新北市：國家教育研究院。
- 陳維民(2022)。以「模擬數學知識由來」為素材引導學生數學探究之探討。2022 Annual Conference on Curriculum and Pedagogy in East-Asia (2022 ACCPEA)。
- 黃毅英(2004)。數學課程改革之路向。《數學傳播》，第20卷第3期，頁51-59。
- 潘文忠(2019)。讓孩子不再害怕數學 | 探究的歷程，就是素養。2023年4月5日擷取自網頁[臉書]。取自 <https://www.facebook.com/panwenzhong/posts/2617262934973882/>
- Chapman, O. (2007). Preservice Secondary Mathematics Teachers' Knowledge and Inquiry Teaching Approaches. In Woo, J.H., Lew, H.C., Park, K.S. & Seo, D.Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 97-104. Seoul: PME.
- Department for Education and Skills. (2001). *National strategy for key stage 3*. London: DfES.
- National Research Council [NRC]. (1996). *National science education standards: observe, interact, change, learn*. Washington, DC: National Academy Press.

**Exploring the Classroom Guidance Modules of Guided
Mathematics Inquiry: An Example of using the iM-EECC
Curriculum for Fourth-Grade Bar Graphs**

Wei-Min Chen

Taichung Qingshui District Qingshui Elementary School

Abstract

The study used the guided mathematical inquiry iM-EECC lesson, adapted from the NAER math curriculum "Let the Data Speak," and recorded teaching videos as research material.

The study followed the four steps of "classification, sorting, confirming the core, and finding connections" to build the model. In the 15-minute and 57-second instructional video, the "Establishing Connections," "Assignments," "Sharing," and "Summary" modules of classroom guidance were analyzed and summarized, including the basic modes of each module and the adjustments made in the classroom situation.

Key words: Mathematical inquiry, iM-EECC, Classroom

2023年台灣數學教育學會年會暨第十五屆科技與數學教育國際學術研討會論文集

*2023 Annual Meeting of Taiwan Association for Mathematics Education and the 15th
International Conference on Technology and Mathematics Education*

guidance modules, Competency-based teaching.

一年級學生在臆測教學中的數學創造力表現

邱貞瑛、林碧珍

(1)國立清華大學數理教育研究所研究生

(2)國立清華大學數理教育研究所教授

betty9014@gmail.com

linpj@mx.nthu.edu.tw

摘要

本研究主要探討國小一年級學生在數學臆測教學課堂中表現的數學創造力。研究對象共計 25 位一年級學生，臆測教學單元包含兩個相似單元「合 10 加法」及「18 以內的加法」。研究資料主要為臆測教學中的個人猜想、小組猜想及全班猜想，資料的分析架構是以林碧珍(2020)數學創造力評量架構，分析猜想的流暢性、變通性、原創性及精緻性。研究結果發現：臆測教學可以實施於一年級課堂，而且有助於提升一年級學生的數學創造力，特別有助於數學程度不錯的學生之精緻性思考。數學創造力提升的原因，是教師提供鷹架及示範，讓學生有機會對個人猜想進行檢驗、分類、歸納、討論及修正，讓學生將猜想敘述更清楚且完整，而能提升下一次提出猜想的品質。

關鍵字：數學臆測教學、數學創造力、一年級

壹、緒論

我國傳統的數學課堂由教師講解，學生照著指令解題，只知其然不知其所以然，可能是導致台灣四年級學生在 TIMSS 國際數學與科學教育成就趨勢調查，數學能力名列前茅但卻普遍不喜歡學數學，也沒自信學數學(林碧珍，2019)。林碧珍(2021)指出臆測教學主要是從數學的本質去探究問題，創造一個能讓學生主動思考的課室，從觀察資料開始，發現數學想法，再找例子試驗、到驗證，類似數學家經歷發現數學定理的過程。學生透過造例，而對觀察數學有感，有助於尋找規律，發現關係。且有助於引發學生的好奇心，過程中學生在小組中互相討論及論辯，共學及共好，因而建立學生的自信心(Lin, 2022)。一年級學生對於知識的求知慾非常直接與單純，在課堂中勇於回答問題且易獲得學習成就而感到開心。相反的，一年級學童由於學習經驗不足，觀察問題切入的角度較為單一，教師若能提供機會讓一年級學生多從不同角度觀察資料，而發現數量較多且類別較多的數學想法，並能鼓勵他們在課堂中踴躍分享意見，以增進學童學習數學的成功經驗，將助提升學生的數學思考的流暢性和變通性，這些都是構成數學創造力的元素(Leikin, 2009)。雖然林碧珍的研究團隊過去幾年投入臆測教學提升學生的數學創造力的研究，但是大部分的臆測教學都是在中高年級教學課堂，臆測教學是否適用於一年級學生數學課堂，因此，本次研究初步嘗試以數學臆測教學模式，來探討學生數學創造力的表現情形，研究的焦點旨在教師如何在臆測教學中來提升一年級學生的數學創造力，具體的兩個待答的研究問題是：(一)教師如何引導一年級學生提出數學猜想；(二)從數學猜想分析學生數學創造力的表現。

貳、文獻探討

一、數學臆測教學模式

本研究採用提出臆測教學模式五個階段中的造例階段、提出猜想階段、效化階段、一般化階段以及證實階段(Lin, 2018)。林碧珍(2021)提出的數學臆測五個階段：(一)造例階段：教師提供素材，學生造例、組織及彙整。學生透過組內一同觀察並檢驗個人造例是否正確，再彙整為小組例子。(二)提出猜想階段：觀察彙整的例子，尋找數學關係並提出個人猜想；組內需要共同檢驗個人猜想，移除可能錯誤或無憑無據的個人猜想。(三)效化階段：個人猜想彙整成小組的猜想後，需要他組更多的例子來支持或反駁。(四)一般化階段：目的是將全班的非恆真猜想以限縮範圍或條件推論到所有的例子都成立，成為恆真的猜想；將恆真猜想加入全稱量詞(如：所有、任意等)放諸四海皆準。(五)證實階段：將歸納得出的恆真命題利用已知知識來說服他人相信。

二、數學臆測教學提升創造力的學理基礎

我國十二年國教課程綱要總綱(教育部，2021)提及學習者應能選擇適當學習方式，進行系統思考以解決問題，並具備創造力與行動力，由此可見數學課堂中培養創造力是十二年課綱實施不可忽視的教學重點。

Cropley(2006)主張創造力的創造過程是聚斂性思考和發散性思考互相結合，可以克服思考固著，有助於學生未來多元的想法與解決問題能力。Isaksen 和 Parnes (1985)指出創造力是內在能力且可以透過教育活動獲得刺激與培養。臆測教學教師提供的造例素材，讓學生以個人或小組方式建立資料，學生會對自己的造例更有感，將利於觀察並發現數學關係(林碧珍，2021)。Sriraman(2005)指出數學充滿了不確定性，教師要求學生暴露在創造數學的不確

定性和困難中，又要能捍衛自己想法與經驗，正是臆測教學中提出猜想的階段，學生需勇敢提出自己的見解，並承擔不確定性的感受，所以臆測教學不僅可激起學習的動機和興趣，更可培養學生思考和創造能力(Lin, 2022)。Chamberlin 與 Moon (2005) 將學生的數學創造力定義為產生新穎實用的解決方案和以數學方法去解決虛擬或真實的應用問題的能力，教師營造一個鼓勵學生辯論與質疑的課堂環境，共同討論解決問題方法的有效性，即臆測教學中的效化階段與證實階段。

究竟數學創造力如何在課堂中進行形成性評量？雖然近幾年數學創造力的研究學者，以 Leikin (2009) 10-1-0.1 評量架構的評量架構作為分析架構(如林碧珍, 2020; Elgrably & Leikin, 2021)，因為架構中包含了 Torrance(1974)提出創造力的流暢性、變通性和原創性，而且數學創造力與多元解答任務相依。林碧珍(2020)的數學創造力評量架構是依據 Leikin 的評量架構進行調整修正，修正的主要理由為：(一)Leikin 的評量架構是評量的解題任務下學生的個人解答，而林碧珍的評量架構是評量臆測任務下學生提出的數學猜想，而非數學問題特定的數學解法。(二)增加 Torrance(1974)的精緻性元素，因為數學臆測教學中學生提出的猜想可以區分恆真、非恆真、與恆假命題。由於本研究目的是探究數學臆測任務下的學生數學創造力表現，因此分析學生數學創造力的流暢性、變通性、原創性和精緻性四種的指標，是採用林碧珍(2020)的數學創造力評量架構。

參、研究方法

一、研究對象

研究對象為一年級 25 位學生，毫無接觸過臆測教學模式。學生進行第一次(合 10 的加法)數學臆測教學為上學期末，才剛學會注音符號及少許國字，口語表達與文字書寫尚不熟練；學生進行第二次(18 以內的加法)數學臆測教學時為一下學期初，較為熟悉課堂規範，但表達力尚需教師給予較多地引導與補充。

二、臆測教學活動設計

兩個單元的數學臆測任務分別是「合 10 的加法」和「18 以內的加法」。選取此兩單元的理由是考慮「相似單元」及「相似的教學引導」，兩個臆測教學活動設計比較如下表 1。兩次教學的時間間隔為寒假的三個禮拜，無校內其他數學教學，設計的任務皆在常規的數學課堂及配合回家作業中進行教學。

表 1 活動設計的比較

活動	一上 合 10 加法	一下 18 以內的加法
造例	1.學生的回家作業為每人找出六條不同合為 10 的加法算式。 2.組內輪流在提供空白的算式條中寫出不同的算式，計有 11 條算式(11 條造例)。 3.請學生依照各組的想法排序 11 條算式，形成組內彙整單。學生排序的準則有：被加數越來越大、被加數越來越小、加法交換律的排法。(圖 1)	1.每組有六張造例單和六張連續的數字牌，組員抽數字牌，將數字寫入加法算式即完成個人造例。例如：第一組的六個造例為 $9+()=()$ ，數字牌為 2、3、4、5、6、7，將數字牌填入加數後找出答案。每一組的造例都不同。 2.請學生依照各組的想法排序 6 條造例單，形成組內彙整單。 學生排序的準則有：：加數固定，被加數越來越大、加數固定被加數越來越小、被加數固定，加數越來越大、被加數固定，加數越來越小。(圖 2)

他們兩次都提出表層現象的猜想，只有流暢性分數，無其他指標分數，故無法判斷數學創造力。

肆、研究結果

一、學生在數學臆測教學課堂的創造力表現

數學創造力分析資料是從整理個人猜想、小組猜想及全班猜想，依據評分規準對每位學生個人猜想做評分，以下討論四位學生(S06、S15、S17、S19)在兩次臆測教學下猜想內容及創造力分數，如下表 2 及表 3：

表 2 數學猜想為例(合 10 加法)，彙整單的造例排法是被加數由小到大。

全班猜想	小組猜想	個人猜想	流暢性	變通性	原創性	精緻性	數學創造力	
IC1 答案都是 10 的時候，前面的數字多 1 個，中間的數字就會少 1 個。	I1 後面的數字都是 10	IS06-1 後面的數字都是 10	1	10	0.1	10	10	
		IS19-1 前面的數字是 0~10	1	10	0.1	1	1	
		IS17-1 後面的數字都是 10	1	10	0.1	10	10	
		I2 前面的數是 0 再加 1 個再加 1 個到 10	IS15-1 前面的數字是 0~10	1	10	0.1	1	1
			IS19-2 前面的 0 加 1 個加 1 個	1	10	10	10	1000
	I3 中間的數字都不一樣	IS17-2 我發現中間的數字都不一樣	1	10	1	1	10	
總合			6	60	11.4	33	11.4	

註：I 為合 10 加法， C_i 代表全班猜想序號， I_i 小組的猜想序號，S06-1 代表座號 6 的學生第一個猜想。

表 3 數學猜想為例(18 以內加法)，彙整單是圖 2 中的第 1 張。

全班猜想	小組猜想	個人猜想	流暢性	變通性	原創性	精緻性	數學創造力
IIC1 被加數不變，加數少 1，和少 1		IIS06-1 加數減 1 合減 1	1	10	10	10	1000
	I11 加數減 1 合減 1	IIS06-2 加數變成倒過來的數	1	10	1	0.1	1
		IIS15-1 加數都是加 1	1	10	1	1	1
		IIS17-1 加數的每個都加 1	1	10	1	1	10
		IIS17-2 我發現每個都會越來越大	1	0	0	0	0
		IIS19-1 加數就是再加 1 個	1	10	1	1	10

	IIS19-2 加數都是小 到大	1	0.1	1	1	0.1
II2 被加數 都是一樣 的	IIS06-3 被加數都是 一樣的	1	10	0.1	1	1
	IIS19-3 被加數都是 一模一樣	1	10	0.1	1	1
總合		9	70.1	15.2	16.1	1033.1

註：II為 18 以內的加法， C_i 代表全班猜想序號， I_i 代表小組的猜想序號，S06-1 代表座號 6 的學生第一個猜想。

表 2 和 3 對照，得到兩個研究發現：(一)學生經由兩次臆測教學後提出的猜想數量變多，小組流暢性分數提高。(二)學生透過臆測教學能發現數學關係而產生不同種類的猜想數目越多，代表其觀察及思考方向越來越多元，敘述及書寫想法時能練習表達符號轉譯能力，產出有憑有據的數學語言。

表 4 是個別學生在兩次臆測教學中，數學創造力分數較高學生的猜想內容，研究發現：數學創造力高的學生在變通性、原創性及精緻性分數都較高。

表 4 兩次臆測教學中數學創造力較高的學生

全班猜想	小組猜想	個人猜想	流暢性	變通性	原創性	精緻性	數學創造力
IC1 答案都是 10 的時候，前面的數字多 1 個，中間的數字就會少 1 個。	I2 前面的數字全部都是+1 個的數字(被加數多 1)	IS23-1 前面的數字全部都是+1 個的數字	1	10	10	10	1000
IC3 前面數字和中間數字交換不會改變答案。(加法交換率)	I3 我發現前中的數字是相反的	IS16-1 我發現前中的數字是相反的	1	10	10	10	1000
IIc1 被加數不變，加數少 1，和少 1	II5 加數少 1 和少 1	IIS2-2 加數少 1 和少 1	1	10	10	10	1000
IIc2 被加數相同，只要加越大的數字，答案就越大	II2 只要加越大的數字，答案就越大	IIS16-2 只要加越大的數字，答案就越大	1	10	10	10	1000

註：I為合 10 單元，II為 18 以內的加法單元， C_i 代表全班猜想序號， I_i 和 II_i 代表小組猜想，S16-2 代表座號 16 號第二個個人猜想。

在合 10 加法中與 23 號相似的猜想數只有一位，雖然用語不夠精準，但一年級學生卻可以發現一維的變動量，實屬不易，且修正後成為全班恆真猜想；16 號提出的猜想亦成為全班恆真猜想，故原創性及精緻性皆為 10 分。在 18 以內的加法中 2 號提出二維變動量的猜想，教師透過一般化修正後，能讓學生學習三維變動量的數學關係，可預期學生的猜想品質會逐漸提升。

伍、結論與討論

本研究發現臆測教學可以實施於一年級的數學課堂，而且一年級學生在課堂中表現的數學創造力，也可以用林碧珍的評量架構來評量。一年級學生在兩

次教學下，是有助於提升程度較好的學生創造力，而且流暢性、變通性、原創性、精緻性各項分數都有進步，特別有助於數學程度不錯的學生之精緻性思考，但是對於一般學生的精緻性的分數則不一定有提高(見表 2 和表 3)。兩次的教學有助於提升一年級學生的流暢性，但是仍含停留在觀察資料的表層現象的猜想。班上還有八位學生的流暢性有分數，但沒有表現出變通性、和原創性，或者一班學生的精緻性分數卻變低了，其原因是教學內容因素、或是其他因素，值得進一步探討。

本研究發現數學臆測教學提供給一年級學生小組討論，透過合作學習互相檢驗造例的正確與否，及檢驗提出的猜想是否有憑有據。數學創造力提升的原因，是教師以示範如何整理猜想，提供鷹架與引導，讓學生有機會對個人猜想進行檢驗、分類、歸納、討論及修正，將猜想敘述更清楚且完整，而有助於提升個人猜想品質及猜想的多元；而能提升下一次提出猜想的品質。學生也在小組內或全班中學習數學想法的分享與聆聽，這些臆測教學規範都是有助於學生數學創造力的提升。

參考文獻

- 林碧珍(2019)。TIMSS 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告。**臺灣四年級學生數學成就及相關因素探討**，166-170。臺北市：國立臺灣師範大學科學教育中心。
- 林碧珍(2020)。學生在臆測任務課堂表現的數學創造力評量。科學教育學刊。28(S)，429-455。
- 林碧珍(2021)。素養導向數學臆測教學模式之理論與實務。台北：師大書苑。
- 國家教育研究院(2021)。十二年國民基本教育課程綱要：總綱。查詢日期：2023 年 4 月 1 日，檢自 <https://reurl.cc/zAOL10>。
- Chamberlin, S. A., & Moon, S. (2005). Model-Eliciting Activities: An Introduction to Gifted Education. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17, 37-47.
- Cropley, A. (2006). Functional creativity: A socially-useful creativity concept. *Baltic Journal of Psychology*, 7(1), 26-38.
- Elgrably, H., & Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem-solving expertise: Posing new problems through investigations. *ZDM—Mathematics Education*, 53(4), 891-904.
- Isaksen, S. G., & Parnes, S. J. (1985). Curriculum planning for creative thinking and problem solving. *The Journal of Creative Behavior*, 19 (1), 1-29. doi:10.1002/j.2162-6057.1985.tb00400.x
- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. doi:10.1163/9789087909352_010
- Lin, P. J. (2018). The development of students' mathematical argumentation in a primary classroom. *Educação & Realidade (Education & Reality)*, 43(3), 1171-1192.
- Lin, P. J. (2022). Struggling students' psychological safety and cognition in group discussion. *Journal of Mathematics Education*, 15(1), 35-53.
- Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 20-36.
- Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Princeton, NJ: Personal Press/Ginn and Company.

First-Graders' Mathematical Creativity Performing in Conjecturing Teaching

Jen-Ying Chiu¹, Pi-Jen Lin²

¹Graduate Student of Graduate Institute of Mathematics and Science Education
National Tsing Hua University

²Professor of Graduate Institute of Mathematics and Science Education
National Tsing Hua University

betty9014@gmail.com

linpj@mx.nthu.edu.tw

Abstract

The study mainly explored how to improve first-graders mathematical creativity via conjecturing teaching. The subjects included 25 first-graders. The conjecturing teaching was implemented into two similar units "addition within 10" and "addition within 18". The main sources of data consisted of students' individual conjectures, group conjectures, and whole-class conjectures. The assessment framework adopted from Lin, P. J. (2020), analyzing mathematical creativity with fluency, flexibility, originality and elaboration. The results indicated that students in the same group could improve mathematical creativity. Conjecturing teaching can be implemented in the first-grade classrooms, and it is helpful to improve first-graders' mathematical creativity, Particularly elaboration for the better-achievers. The reason for enhancing the mathematical creativity is that teachers provide scaffolding and demonstrations, so that students had the opportunity to check, classify, sequence, discuss and modify their individual conjectures engaged in the conjecturing teaching. Thus, students were able to describe clearly and precisely their conjectures, and then improve their mathematical creativity.

Keywords: mathematical conjecturing teaching, mathematical creativity, first-grade

初探國小三與六年級學生數學擬題表現和錯誤類型之差異 —以某國小三與六年級各一班級為例

曾釋慧¹ 李心儀²

¹ 臺北市立大學教育學系學生 G11001002@go.utapei.edu.tw

² 臺北市立大學教育學系教授 sylee@go.utapei.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討國小三年級與六年級學生數學擬題表現和錯誤類型之差異。為達研究目的，研究者以「結構式」、「半結構式」以及「自由」三種擬題類型自編數學擬題學習單，藉以分析國小三年級與六年級學生數學擬題表現和錯誤類型之差異。研究結果為：三年級在數學擬題表現中，結構式與半結構式的數學擬題表現皆呈現單步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在自由情境的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。六年級在數學擬題表現中，結構式與自由情境的數學擬題表現皆呈現多步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在非結構式的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。在擬題錯誤類型的研究結果為，三與六年級不管在結構式、半結構式還是在自由情境擬題的錯誤類型，皆是以數學題目，但是有語文方面的錯誤為最多。

關鍵字：數學擬題、擬題表現、錯誤類型

壹、緒論

一、研究動機

文獻探討指出，擬題研究在各年級皆有實施，但是多數研究皆只有針對特定年級進行探討。Kar 等 (2021) 提出擬題在不同年級之間可能存在差異，故而本研究將以此角度出發，探討不同年級的數學擬題表現和錯誤類型之差異。

根據皮亞傑 (Piaget, J.) 的理論，國小三年級學生的認知發展是屬於具體運思期階段，學生可對具體存在事務進行合乎邏輯的思考，能根據具體經驗思維來解決問題，但尚無法抽象思考，而國小六年級學生的認知發展是屬於形式運思期階段，學生已轉變成可以對抽象性事務進行合乎邏輯的思考，包含邏輯假設、系統性思考等能力。因此本研究以國小三年級與六年級的學生作為研究對象，探討國小三年級與六年級學生的數學擬題表現和錯誤類型之差異。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究目的為分別探究國小三年級與六年級學生的數學擬題表現和錯誤類型，以及進一步去分析國小三年級與六年級學生，兩個不同年級之間在數學擬題表現和錯誤類型之差異。

三、研究問題

根據研究目的，本研究的待答問題如下：

1. 國小三年級的數學擬題表現與錯誤類型為何？
2. 國小六年級的數學擬題表現與錯誤類型為何？
3. 國小三年級與六年級的數學擬題表現之差異為何？

4. 國小三年級與六年級的數學擬題錯誤類型之差異為何?

貳、文獻探討

一、擬題的定義

(一)擬題的定義

在本研究中，我們可以將擬題定義為學生在了解給予的訊息後，根據個人所具備的數學知識、生活經驗和思想角度所想出的數學題目，而研究者可從擬題中瞭解學生所學到的數學知識及將數學概念表達的能力。

二、擬題活動的類型與評量

(一)擬題活動的類型

Silver (1994) 提出擬題可以分為兩種類型，一種類型是從已給定的題目中再產生出另一個新的問題，另一種類型則是藉由情境或經驗去創造出一個新的問題。

Stoyanova & Ellerton (1996) 將擬題分為三種不同的情境類型：第一種為結構(structure)的情境、第二種為半結構(semi-structure)的情境、第三種為自由(free)的情境。首先，結構的情境是指擬題者可以藉由現有的題目，加上自己的想法、創意，形成新的題目；其次，半結構的情境是指擬題者被給予一個開放的情境，擬題者將過去所學習過的數學知識、技巧以及概念關係連結起來，形成一個完整的題目。最後一種，自由的情境是指擬題者在一個自然情境下，自由地發揮其創造力，擬出一個題目。

(二)擬題的評量標準

1. 擬題表現的評量標準

林原宏、許淑萍 (2002) 將乘除問題分為單步驟與多步驟兩種類型，在單步驟問題的評分共有五分，擬題表現評分準則的項目分別為第一步驟數字表徵、第一步驟運算符號、未知數表徵、未知數單位以及語意表達，而在多步驟問題的評分共有八分，與單步驟的評分項目相同，不過兩步驟問題的評分會再加上隱含元素表徵、第二步驟數字表徵和第二步驟運算符號，每符合一項標準可得一分。

Lowrie (2002) 將擬題的類型分為四個部分：分別為單步驟問題、兩步驟問題、非典型問題以及新奇的問題，他以上述的四種分類作為擬題表現的分析，單步驟問題是指一個運算的操作即可得到答案；兩步驟問題是指需要進行兩次的運算操作才能完成解題；非典型問題是指不僅是運用一種解法，而是運用多種的策略來完成，此類型的問題也不只涉及四則運算，大多是需要透過實際的操作來解決問題的；新奇的問題是涉及到了開放性的問題，且此問題是需要解題者去對題目所給的資訊超越思考才有辦法獲得解答。

2. 擬題錯誤類型的評量標準

Leung (2013) 提出一套評量擬題之工具。第一大類為非題目，第二大類為題目中的非數學題目，在評量過程中，先判斷整段文字是否足夠可以成為一個題目，若無法成為一個題目屬於第一類，相反地，若可以成為一個題目但是卻不是數學題目則屬於第二類。接著，如果可以成為一個數學題目，再分別將題目分類為第三類：不可行（數學邏輯不合或有矛盾的題目）、第四類：資料不足（無法完成解題），和第五類：資料適中或過多（只要可解即屬此類）。

Silver & Cai (1996) 運用擬題的反應來進行複雜性的分析，第一層分為非數學問題、數學問題以及陳述，可以藉由不同類型的反應分析學生的思考模式；在數學問題之下可以再分為第二層，可分成可解的問題與不可解的問題，若學生擬出的問題為不可解的問題，可能是因為缺少了足夠的資訊或是給予的條件有所矛盾；在第三層的部分分為語意的分析與語言學句法的分析，藉由這兩方面的分析可以更深入了解學生擬題的複雜程度。

三、擬題的相關研究

(一) 國小低年級擬題研究

擬題教學能有效提升學生的擬題能力 (林昭伶, 2015 ; 康滋容, 2004), 並且能增進學生的擬題興趣 (阮涼驛, 2017; 林昭伶, 2015)。另外, 我們也可以發現, 擬題教學已在低年級實施, 低年級學童是能擬出題目並且喜愛擬題活動 (阮涼驛, 2017; 林昭伶, 2015 ; 康滋容, 2004)。另外, 在擬題錯誤類型方面發現, 擬題錯誤類型可以分為數學邏輯方面與語文方面做分析 (陳珮琦, 2003), 從學生擬題的錯誤類型可以得知, 數學學習與國語文學習是相輔相成的, 當學生在擬題時, 缺乏數學的邏輯思考會影響題目的好壞, 相反地, 若學生擁有數學知識但是在語文的表達或書寫程度不佳時, 也會影響數學擬題的品質。

(二) 國小中年級擬題研究

對於三、四年級的學生來說, 擬題活動除了可以提升學生數學學習態度、增加學習的信心與興趣外, 也讓學習轉變成以學生為本位, 老師則擔任從旁協助的角色 (Divrik et al., 2020; 楊惠如, 2000)。透過擬題活動的實施, 教師若能事前先詳盡地做好教學準備, 在教學上多設計非例行性的擬題情境給予學生練習, 學生就能擬出較多樣化的題目 (English, 1998), 而擬題教學也可協助教師釐清學生數學概念之學習情形 (Whitin, 2004; 楊惠如, 2000)。鄭乃赫 (2011) 發現國小三年級學生的除法擬題錯誤類型分析可以區分為 11 類, 其認為錯誤類型的分析可以了解學生錯誤概念的成因。Kar 等 (2021) 指出同年級學生的擬題在算術複雜性表現沒有發現差異, 但是擬題的算術複雜性在不同年級之間可能會存在差異, 因此, 數學擬題表現在不同年級之間的探討是需要且值得注意的。

(三) 國小高年級擬題研究

擬題的研究設計可以包含多種的擬題類型, 並且可以根據研究的目的著重於不同的面向分析 (吳育榕, 2008; 陳金章, 2006)。在擬題融入教學的研究中, 擬題活動能有效提升學生的數學學習表現與數學擬題表現 (邱微惠、劉祥通, 2016; Chen 等, 2015; Chang 等, 2012; 陳逸亮, 2013; English, 1997)。而陳逸亮 (2013) 指出在未來研究中研究對象可以是六年級的學生, 因年紀的增長、所學的知識愈加豐富, 所擬出來的題型也更加多元, 因此, 本研究嘗試將六年級學生納入研究對象之一。另外, 能發現擬題類型的設計多以算式表徵轉為文字表徵的擬題形式 (鄭麗貞, 2012; 何森曜, 2005; 林原宏、許淑萍, 2002), 因為算式 (符號) 與數學有直接的對應關係, 教師也可藉有學生將算式轉化為文字的過程中, 了解學生對於算則方法的了解程度以及迷思概念。

(四) 不同年級的擬題研究

除上述分類外, 有些文獻的研究對象包含不同的年級, 而此類別的研究數量是有限的。擬題研究在各年級皆有實施, 但是多數研究皆只有針對特定年級

進行探討，少數研究是以不同年級作為研究對象進行擬題研究。Sevgi & Çaliskan (2020) 雖是以不同年級的學生作為研究對象，但在主題的設計上是在探討數學考試焦慮和擬題的自我效能感的關係，並沒有針對不同年級的數學擬題表現與錯誤類型做分析。Erdoğan & Gül (2020) 的研究對象為資優生且年齡為六到八年級，在擬題設計上是以一個半結構化的任務為主並設定低、中、高三種不同的難度請學生進行擬題，與梁淑坤 (1997) 的擬題類型對照的話屬於圖表類，請學生依據給定的圖形擬出與該圖形相符的題目。Lowrie (2002) 進行不同年級的研究，研究對象為年齡較小的低年級與中年級，主要的研究目的為探討教師的介入對於學生擬題類型的改變情形，而本研究的設計是沒有涉及教師的教學介入。探討不同年級數學擬題表現和錯誤類型，可以清楚地了解到不同年級的學生擬題表現情形的差異，藉由研究分析結果，不僅可以進一步思考擬題表現對於學生的年齡和能力之間的差異，在教學上，可以幫助教師設計出更符合學生學習數學需求的教學。因此，本研究以國小三年級與六年級的一般生為研究對象，探討不同年級在結構、半結構、自由此三類擬題類型中，數學擬題表現與錯誤類型有何差異。

參、研究方法

一、研究對象

本研究對象為一班國小三年級學生(19人)以及一班國小六年級學生(20人)，共計39位學生為研究對象。所有學生皆沒有相關的擬題經驗。

二、資料蒐集

本研究針對研究目的設計數學擬題學習單：數學擬題學習單共有三大題，題目是依照 Stoyanova & Ellerton (1996) 所提出的擬題活動類型做設計，共有三題，「結構式」、「半結構式」以及「自由」的擬題設計各一題。

題目一為「結構式」的擬題設計：請學生將「阿吉有10根長度不同的蠟燭，最短的蠟燭長5公分，最長的蠟燭長14公分，而每根蠟燭之間皆相差1公分，如果已知1公分的蠟燭要燒2分鐘，請問燒完1根最短的蠟燭需要多久的時間？」這個題目回答完後，加上自己的想法、創意，設計出一個數學題目。

題目二為「半結構式」的擬題設計：請學生擬出一個「減法」的數學題。

題目三為「自由」情境的擬題設計：請學生自由地發揮其創造力，擬出一個自己認為「最困難」的數學題目。

三、資料分析

(一)數學擬題表現分析

為了探討學生在結構式、半結構式與自由此三類擬題活動上的數學擬題表現之情形，研究者在學生擬題完畢後，將三年級與六年級各一個班級的數學擬題學習單收回，並將學生擬出的正確問題，根據研究者對 Lowrie (2002) 單步驟問題、兩步驟的問題、非典型問題以及新奇的問題此四項分類的改編來進行分析，以了解三與六年級學生的數學擬題表現與差異。

研究者將數學擬題表現分為兩個階段分析，第一階段先將學生擬出的數學題目分成單步驟題目、兩步驟題目或多步驟題目，第二階段再進一步判斷學生擬出的數學題目屬於例行性題目或非例行性題目，因此經改編後，學生的數學擬題表現共分為六類：單步驟且例行性問題、單步驟且非例行性問題、兩步驟且例行性問題、兩步驟且非例行性問題、多步驟且例行性問題以及多步驟且非

例行性問題。

(二)擬題錯誤類型分析

研究者綜合改編 Silver & Cai (1996) 和 Leung (2013) 提出的類型，將學生擬出的錯誤問題依照研究者加以改編後的擬題錯誤類型進行分析，擬題錯誤類型共分為以下五個類別：1. 非題目。2. 非數學題目。3. 是數學題目，但是有數學方面的錯誤。4. 是數學題目，但是有語文方面的錯誤。5. 是數學題目，但是有數學與語文方面的錯誤。

(三)評分者間信度

本研究使用評分者間信度來檢驗兩位評分者在上述的「數學擬題表現分析」和「數學擬題錯誤類型分析」中，對於定義的理解與評分面向是否達成一致。評分後，若是評分者間不一致，再由兩位評分者進行討論重新評定，直到 100% 的一致。

肆、研究結果

一、三與六年級數學擬題表現資料分析

(一)結構式數學擬題表現

表 4-1 三與六年級結構式數學擬題表現之描述性統計分析

	1 單步驟 且例行性 問題	2 單步驟 且非例行 性問題	3 兩步驟 且例行性 問題	4 兩步驟 且非例行 性問題	5 多步驟 且例行性 問題	6 多步驟 且非例行 性問題
三年級	12	2	4	0	1	0
六年級	6	0	6	0	10	0

由表 4-1 可知，在結構式數學擬題表現中，三年級最多的擬題類型為單步驟且例行性問題，共有 12 人。六年級最多的擬題類型為多步驟且例行性問題，共有 10 人。

(二)半結構式數學擬題表現

表 4-2 三與六年級半結構式數學擬題表現之描述性統計分析

	1 單步驟 且例行性 問題	2 單步驟 且非例行 性問題	3 兩步驟 且例行性 問題	4 兩步驟 且非例行 性問題	5 多步驟 且例行性 問題	6 多步驟 且非例行 性問題
三年級	15	0	1	0	0	0
六年級	5	0	8	1	4	0

由表 4-2 可知，在半結構式數學擬題表現中，三年級最多的擬題類型為單步驟且例行性問題，共有 15 人。六年級最多的擬題類型為兩步驟且例行性問題，共有 8 人。

(三)自由情境數學擬題表現

表 4-3 三與六年級自由情境數學擬題表現之描述性統計分析

	1 單步驟 且例行性 問題	2 單步驟 且非例行 性問題	3 兩步驟 且例行性 問題	4 兩步驟 且非例行 性問題	5 多步驟 且例行性 問題	6 多步驟 且非例行 性問題
三年級	7	0	8	0	2	0
六年級	3	0	8	0	9	0

由表 4-3 可知，在自由情境數學擬題表現中，三年級最多的擬題類型為兩步驟且例行性問題，共有 8 人。六年級最多的擬題類型為多步驟且例行性問題，共有 9 人。除此在外，也可發現，三年級與六年級在兩步驟且例行性問題的數學擬題表現上的人數一樣多。

綜上所述，三年級在數學擬題表現中，結構式與半結構式的數學擬題表現皆呈現單步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在自由情境的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。六年級在數學擬題表現中，結構式與自由情境的數學擬題表現皆呈現多步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在半結構式的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。

此外，三與六年級不管在結構式、半結構式還是在自由情境擬題的數學擬題表現，皆是以例行性問題為最多。三年級人數最多的數學擬題類型為半結構式數學擬題表現中的單步驟且例行性問題，以下圖 4-1 與 4-2 分別為三年級在半結構式數學擬題表現中之其一「單步驟且例行性問題」以及六年級在半結構式數學擬題表現中之其一「兩步驟且例行性問題」。

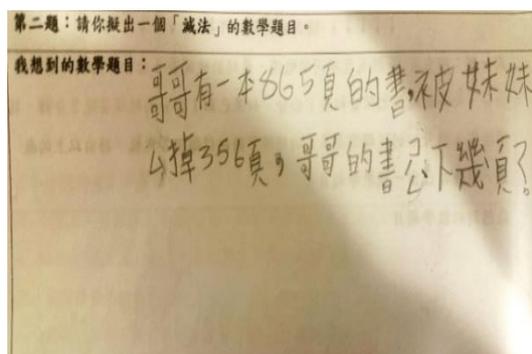


圖 4-1 三年級-單步驟且例行性問題

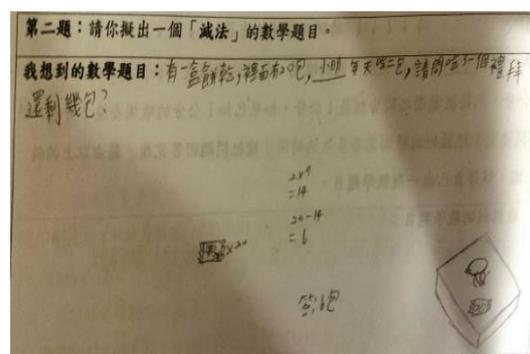


圖 4-2 六年級-兩步驟且例行性問題

二、三與六年級擬題錯誤類型資料分析

(一) 結構式擬題錯誤類型

表 4-4 三與六年級結構式擬題錯誤類型之描述性統計分析

	1 非題目	2 非數學題目	3 是數學題目，但是有數學方面的錯誤	4 是數學題目，但是有語文方面的錯誤	5 是數學題目，但是有數學與語文方面的錯誤
三年級	0	0	0	13	3
六年級	0	0	0	8	3

由表 4-4 可知，在結構式擬題錯誤類型中，三年級與六年級最多的擬題類型皆為是數學題目，但是有語文方面的錯誤，分別為 13 人和 8 人。

(二) 半結構式擬題錯誤類型

表 4-5 三與六年級半結構式擬題錯誤類型之描述性統計分析

	1 非題目	2 非數學題目	3 是數學題目，但是有數學方面的錯誤	4 是數學題目，但是有語文方面的錯誤	5 是數學題目，但是有數學與語文方面的錯誤
三年級	2	0	0	11	1
六年級	0	0	1	12	0

由表 4-5 可知，在半結構式擬題錯誤類型中，三年級與六年級最多的擬題類型皆為是數學題目，但是有語文方面的錯誤，分別為 11 人和 12 人。

(三)自由情境擬題錯誤類型

表 4-6 三與六年級自由情境擬題錯誤類型之描述性統計分析

	1 非題目	2 非數學題目	3 是數學題目，但是有數學方面的錯誤	4 是數學題目，但是有語文方面的錯誤	5 是數學題目，但是有數學與語文方面的錯誤
三年級	2	0	1	10	1
六年級	0	0	0	9	3

由表 4-6 可知，在自由情境擬題錯誤類型中，三年級與六年級最多的擬題類型皆為是數學題目，但是有語文方面的錯誤，分別為 10 人和 9 人。

綜上所述，三與六年級不管在結構式、半結構式還是在自由情境擬題的錯誤類型，皆是以數學題目，但是有語文方面的錯誤為最多。三與六年級人數差異最多的錯誤類型為結構式數學擬題表現中的是數學題目，但是有語文方面的錯誤，三年級 13 人，六年級 8 人，相差 5 人。

伍、結論與建議

一、結論

研究結果發現，三年級在數學擬題表現中，結構式與半結構式的數學擬題表現皆呈現單步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在自由情境的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。六年級在數學擬題表現中，結構式與自由情境的數學擬題表現皆呈現多步驟且例行性問題為最多的擬題類型，而在非結構式的數學擬題則是以兩步驟且例行性問題為最多的擬題類型。在擬題錯誤類型的研究結果為，三與六年級不管在結構式、半結構式還是在自由情境擬題的錯誤類型，皆是以數學題目，但是有語文方面的錯誤為最多。

二、建議

對未來研究的建議

(一)本次研究是以三年級與六年級為研究對象，建議未來若有機會可以研究更多不同年級的研究對象，對於不同年級實施擬題教學可能會產生不同的研究結果，因此未來研究可以考量此因素，比較不同年級的研究對象，以了解不同年級學生的數學擬題表現和錯誤類型之差異。

(二)本研究為一較大型研究之一部分，只以國小三與六年級各一班級為初探，該較大型研究將研究更多的班級，未來甚至也可以進行跨校的數學擬題與錯誤類型之研究。

(三)本研究在學生的擬題錯誤類型分析上，僅針對非題目、非數學題目、是數學題目，但是有數學方面的錯誤、是數學題目，但是有語文方面的錯誤和是數學題目，但是有數學與語文方面的錯誤，這五大類進行分析，建議在未來研究上可以對於學生擬題的精緻性、細膩度、數學內容的難易度及語文方面更詳細的錯誤分類等面向再進行進一步的分析。

參考文獻

一、中文文獻

- 何森曜 (2005)。國小六年級學生對分數加減法擬題及分數概念之相關研究 [未出版之碩士論文]。國立臺中教育大學。
- 阮涼驛 (2017)。合作擬題教學法融入國小二年級學童乘法單元學習成就影響之研究 [未出版之碩士論文]。國立臺南大學。
- 林原宏、許淑萍 (2002)。乘除擬題能力測驗編製及其實證研究。測驗統計年刊, 10, 135-171。
- 林昭伶 (2015)。以擬題融入教學探討國小一年級學童加減法擬題之表現 [未出版之碩士論文]。臺北市立大學。
- 吳育榕 (2008)。Moodle 平台上數學擬題類型對國小五年級學生擬題能力之影響 [未出版之碩士論文]。國立臺灣師範大學。
- 陳金章 (2006)。擬題活動融入國小五年級數學學習對數學解題表現、數學學習態度影響之研究 [未出版之碩士論文]。國立屏東教育大學。
- 陳逸亮 (2013)。合作擬題教學法對國小五年級學生在怎樣列式單元學習成效之研究 [未出版之碩士論文]。國立臺南大學。
- 康滋容 (2004)。擬題活動對國小二年級學生解題能力和擬題能力的影響 [未出版之碩士論文]。國立屏東師範學院。
- 梁淑坤 (1994)。 「擬題」的研究及其在課程的角色。《國民小學數學科新課程概說(低年級)》。臺北：臺灣省國民學校教師研習彙編。
- 梁淑坤 (1997)。擬題能力之評量：工具之製作。國科會專題研究計畫成果報告 (NSC84-2511-S-023-006)。
- 鄭乃赫 (2011)。國小三年級學生除法概念結構分析與其擬題能力之探討 [未出版之碩士論文]。國立臺中教育大學。
- 鄭麗貞 (2012)。國小學生分數除法之解題與擬題表現及類型探討 [未出版之碩士論文]。國立臺中教育大學。

二、英文文獻

- Chang, K. E., Wu, L. J., Weng, S. E., & Sung, Y. T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers & Education*, 58(2), 775-786.
- Divrik, R., Pilten, P., & Tas, A. M. (2020). Effect of Inquiry-Based Learning Method Supported by Metacognitive Strategies on Fourth-Grade Students' Problem-Solving and Problem-Posing Skills: A Mixed Methods Research. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 13(2), 287-308.
- Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 103-116. [SSCI]
- Lowrie, T. (2002). Young Children Posing Problems: The Influence of Teacher Intervention on the Type of Problems Children Pose. *Mathematics educational research*, 14(2), 87-98
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*. 14(1), 19-28.
- Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). *A framework for research into students' problem posing in school mathematics*. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp.518-525). Melbourne, Australasia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Sevgi, S., & Çaliskan, A. N. (2020). An Investigation of the Middle School Students' Mathematics Exam Anxiety and Self-Efficacy for Problem-Posing. *International Online Journal of Education and Teaching*, 7(4), 1774-1789.

Whitin, P. (2004). Promoting problem-posing explorations. *Teaching Children Mathematics*, 11(4), 180-186.

Exploring the Differences between Third and Sixth Graders' Mathematical Problem Posing Performances and Error Patterns - Using One Class from Third and Sixth Grades Respectively in An Elementary School as An Example.

Shi-Hui Tzeng ¹, Shin-Yi Lee ²

¹ Student, Department of Education, University of Taipei

² Professor, Department of Education, University of Taipei

Abstract

The main purpose of this study was to investigate the differences in mathematical problem posing performance and error patterns between third and sixth grade elementary school students. To achieve this goal, the researcher developed three types of problem posing tasks, including structured, semi-structured, and free problem posing tasks, to analyze the differences in mathematical problem posing performance and error patterns between third and sixth grade students. The results showed that in terms of mathematical problem posing performance, for third graders, both structural and semi-structural mathematical simulation tests exhibited single-step and routine problems as the most frequent type. On the other hand, in free-context mathematical simulation tests, two-step and routine problems were the most common. For sixth graders, both structural and free-context mathematical simulation tests exhibited multi-step and routine problems as the most frequent type. However, in non-structural mathematical simulation tests, two-step and routine problems were the most common. Regarding error patterns in simulation tests, regardless of the structure, semi-structure, or free-context of the test, both third and sixth graders posed mathematical problems, but linguistic errors were the most common.

Key words: mathematical problem posing, problem posing performance, error pattern

六年級個案學童在因數倍數單元的解題探究

高國憲¹ 姚如芬²

¹ 國立嘉義大學教育學系數理教育碩士在職專班研究生 kxk2039@gmail.com

² 國立嘉義大學教育學系教授 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究是採用個案研究法，以研究者任教的國小六年級學生共三名為個案研究對象，探究個案學童在因數倍數單元解題歷程。為達到研究目的，本研究施以學習單、情意問卷、學生學習日誌、訪談及教師觀察紀錄等資料進行分析。研究發現個案學童在四個解題階段的表現如下：一、有理解題意中因數倍數條件的困難；二、缺乏因數與倍數的概念內涵，無法寫出完整的預定解題計畫；三、對因數與倍數概念偏誤只完成部分答題計畫；四、作答問題時無法回顧檢視是在解答因數或倍數。透過此發現希望能提供研究者於探究學童與因數倍數解題表現時能有更多面向的參考。

關鍵字：因數倍數、解題困難、解題歷程

壹、緒論

一、研究動機與背景

因數及倍數概念熟悉與否不僅是學童對於數的完整概念呈現，更是學習分數約分、擴分的概念的鷹架。國外學者(Zazkis & Campbell, 1996 a, 1996 b)提出：因數、倍數概念學習可做為銜接與溝通算術與代數的鷹架且因數、倍數概念具有規律性，學生可進行概念中的項目辨識、推理並連結項目關係，以算式表達問題的結構進而擴展至其他情境解題。而，在教育部(2009)頒布「國民中小學九年一貫課程數學領域綱要修正」及教育部(2021)「十二年國民基本教育課程綱要修正」的高年級階段課程規劃內容皆有明示。

然，此單元雖具重要性，但根據蕭金土(1994)、謝堅(1995)、游麗卿(1996)指出：國小高年級學生在因數、倍數、公因數及公倍數等知識表現並不理想。探究其原因，黃國勳、劉祥通(2003)認為：可能是高年級數學內容從具體變抽象，且因倍數教材卻與學生的生活經驗脫鉤，所以學生逐漸無法應付課程，因此對數學產生焦慮與學習障礙的學生變多。另林原宏、何欣玫(2005)提出：學生對此單元的迷失概念可能出現在數學溝通概念的不足，早成學習者雖理解教學者所要表達的觀念，但是不一定能自我表達高階而抽象的概念。綜上所述，有探究個案學童於因數倍數單元解題歷程之必要。

二、研究目的

研究者從事教學的場所是勇於突破傳統教學模式的學校，雖採用貼近學童情境經驗的教材，於教學現場也常採用圖形表徵教學，但仍有不少學習落後者的學習表現尚待加強或力有未逮。故，本研究目的希望透過個案研究「探究個案學童

在因數倍數單元的解題歷程」以期未來能以更合宜的教學方式對在此單元學習低成就的學生提升概念學習。

貳、文獻探討

一、因數與倍數概念在課程綱要的設計

教育部(2009)頒布「國民中小學九年一貫課程數學領域綱要修正」國小五、六年級學習階段數與量能力指標 N-3-03 至 N-3-075，以及教育部(2021)「十二年國民基本教育課程綱要修正」中 n-III-3、n-III-4 n-IV-1 及 n-IV-3 指標，分別在國小高年級階段的學習表現有相關的規範，指出學童由五年級到六年級為逐步由初步認識因數、倍數概念，到學習質數、合數、質因數分解，逐漸發展分數約分、擴分、通分並做等值分數的換算之計算。

二、解題歷程的相關研究

(一) Polya 的解題歷程

Polya(1945)在《怎樣解題》一書中提出的解題歷程四個階段：1. 「了解問題」、2. 「訂定計畫」、3. 「執行計畫」及 4. 「回顧」等。其內容次序，首先解題者應先了解問題中已知條件和未知條件的有用訊息，再經由問題中已知條件和未知條件間的關係，利用輔助題協助訂定解題計畫，並正確地執行解題計畫中的每一步驟；最後，再回顧檢視已得之解法。

(二) Mayer 的解題歷程

Mayer(1992)認為探討解題歷程須從解題者的心理運作過程來理解，其認為解題歷程，分別有 1. 「問題表徵階段」與 2. 「問題解決階段」。其中「問題表徵階段」包含(1)『問題轉譯』及(2)『問題整合』，也就是解題者在內心會先將已理解的問題陳述以其能運用的語言轉換為內在心理表徵，並運用其數學基模知識來組合問題的訊息形成連貫的問題表徵；「問題解決階段」包含(1)『解題計畫與監控』及(2)『解題執行』，解題者經過前階段心理運作後會運用策略知識來選用適當的策略並擬定解題計畫，最後以程序性的知識來運算進行解題。李心儀(2016)認為 Mayer 的解題歷程是著重解題者的心理歷程分析，但從一開始面對問題到最後解決問題的歷程分析中，並未強調解題後的回顧。

三、因數與倍數解題策略的相關研究

(一) 數學表徵

國內學者陳嘉皇、梁淑坤(2014)提出：表徵是以符號、特徵、影像或物件的輪廓圖像，代表或呈現事物。而美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000)在學校數學教學原則與標準(Principles and Standards for School Mathematics)中提到使用表徵來詮釋物理、社會、或數學現象時，可以使學生對於學習內容更容易理解。Bruner(1966)提出，認知發展歷程就是形成表徵系統的過程，其發展歷程，分別是：動作、圖像與符號表徵系統。而 Heddens(1984)更將學生的學習階段區分為具體、半具體、抽象、抽象等。因此對於概念發展應採以圖象表徵應該較能幫助看懂題目並提高學習表現。陳啟明(2000)發現：高年級學童在圖畫題的比現優於文字題與短語題。Friel(2001)也提出若學生對於解釋問題的意義也感到困難時，那麼學習表現也會降低，所以最好是同時搭配語文及圖形來呈現題目資料。

(二) 范恩圖(Venn diagram)

據前述，教學中若以圖象表徵法較能有效提升學生對數學概念的學習，相較於過去教學上以短除法方式來求得最大公因數(G.C.F.)與最小公倍數

(L. C. M.)，似乎易成為公式性的記憶，對此 Basserear(2001)認為可以使用范恩圖(Venn diagram)以視覺方式來理解最大公因數與最小公倍數，有助於幫助 G. C. F. 與 L. C. M. 這兩者的關係。

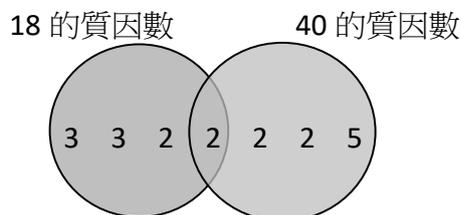


圖 1-1 范恩圖(Venn diagram)
 取自 Basserear(2001)

(三) 樹狀圖(tree diagram)

樹狀圖(tree diagram)是一種圖像的方式能將階層式的構造性質，以圖象方式表現出來。目前國內小學教材：南一、康軒、翰林等大都採用此紀錄方式表達因數分解的概念，也是學生在初學因數分解時較能理解的方式。Kennedy & Tipps (1997)提出在學習因數分解時可以用此圖象表示方式。

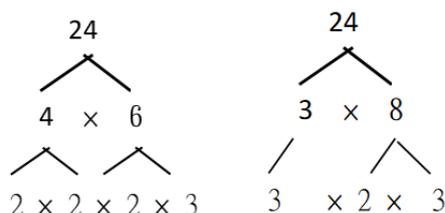


圖 1-2 樹狀圖取自 Kennedy & Tipps (1997)

四、因數與倍數解題表現的研究

(一) 學習迷思影響學習表現

國內對高年級學生在學習因倍數時的迷思概念多有著墨，如周文忠(2002)認為：1. 學生先備知識的不足(乘法、除法不經熟)；2. 概念錯誤不完整；3. 不同概念混淆不清(因數、倍數、最小公倍數、最大公因數)；4. 利用關鍵字解題(數字大就認為是倍數，數字小認為就是因數)；5. 直觀法則解題(文字題中認為「因數」就是用「除」的，「倍數」就是用「乘」的)；6. 語文知識不足，欠缺閱讀讀題能力；7. 問題轉譯能力不足影響解釋問題的能力；8. 策略知識不足，無法有效展開運算式；9. 不當遷移，無法將因數、倍數的概念應用在文字題上。黃寶彰(2002)提出學生在數學科學習困難的原因為：以錯誤解題策或迷思概念用在文字題解題，也因為數學語言轉譯不足或不理解如何使用最大公因數或最小公因數等概念來解題。

(二) 數學解題溝通能力影響學習表現

林原宏、何欣玫(2005)認為學生在因數、倍數的溝通能力長短而使得學生有

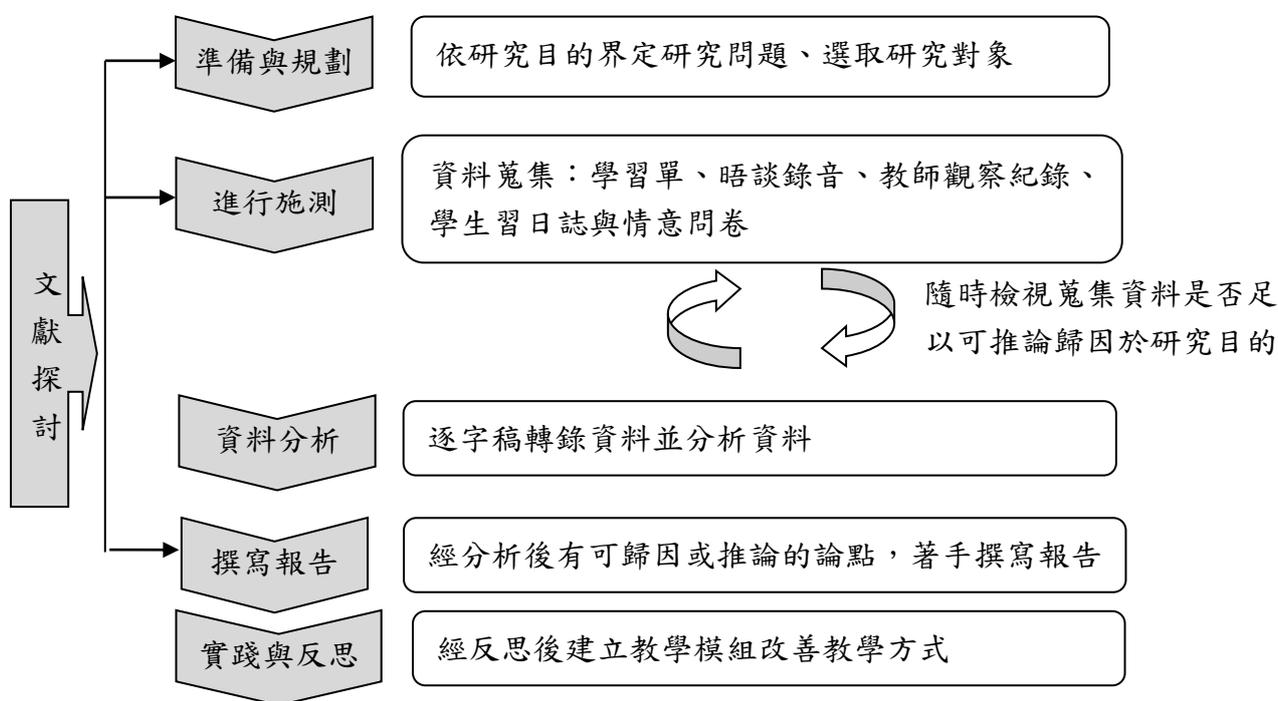
不同的學習表現有所不同，而溝通能力的欠缺可以歸因於：語言概念的錯誤、認知概念的錯誤、策略概念的錯誤及個人態度的錯誤等。

參、研究方法

一、研究規畫與研究流程

本研究是採個案研究法，探討研究對象在學習過因數與倍數概念後的解題歷程。此研究法之優點是在於蒐集資料具有彈性，得以深入瞭解與分析個案學童影響解題歷程中的因素。

圖 3-1 本研究之流程



一、學習單設計

研究者以南一版教科書為基礎設計學習單題型，並與任教學校的資深教師討論測驗架構與題目內容後設計符應研究目的學習單，繼而對個案學生施測。並從學生的施測表現、教師觀察紀錄、學生習日誌與情意問卷等資料來探究學生的認知與情意上的表現。同時也將晤談轉錄成逐字稿，探究學生未能在情意問卷上的其他情意表。期望能透過此研究讓研究者反思教學法的改進，並協助個案學生在對因數、倍數解題成效提升，或提供日後有其他研究者對類似個案之解題表現能有所因應。

二、研究對象

本研究選取對象為：研究者任教的國小六年級同一班的三位學生為個案研究對象。個案學生的選取分別為單元卷中成績排名的後 20% 為依據。

研究過程進行四次、每次 30 分鐘、共 120 分鐘的資料蒐集。資料蒐集內容為：學習單檢測、並進行填寫情意問卷、學生學習日記記錄、教師觀察紀錄及晤談等。晤談內容著重在探求個案學童對完成解題後檢視其在解題歷程中的想法，期望能讓研究者能更客觀、詳實記錄個案學童所產生的解題困難。

表 3-1 研究對象的學習特質與學習表現

	S1	S2	S3
性別	女	女	女
學習特質	有學習意願，偶爾向師長詢問解惑，但私下會向表現優異的同學請益。	有學習意願，常向師長詢問解惑，且會自己加強額外演練	有學習意願，傾向自己學習或問家教，在學校不常向師長、同儕詢問求解
學習表現	受限語文閱讀能力與不佳且單元概念無法理解在基本計算容易出錯；文字題受限題意無法理解所以解題表現差。	單元概念不穩固、概念間的組織能力較弱；基本運算偶而出錯；部分文字題無法轉譯題意而無法完成解題。	單元概念不穩固、概念間的組織能力較可；基本運算容易出錯；解文字題時容易出錯。

三、資料蒐集與分析

本研究針對研究目的進行的資料蒐集及分析，如下表 3-1 所示：

表 3-2 本研究資料分析

資料蒐集種	使用目的	使用方式	使用次數
學習單	了解個案學生解題表現，作為分析解題歷程的探討	隨活動進度使用，蒐集紙本資料	四次
情意問卷	了解學生個人在因數、倍數學習上的意願與期待	隨活動進度使用，蒐集紙本資料	四次
學生學習日誌	紀錄學生解題時對那些概念的困惑	隨活動進度使用，蒐集紙本資料	四次
晤談逐字稿	理解學生在解題時的內心歷程或無法在情意問卷中陳述的情意表現	全程錄音、錄影	四次
教師觀察紀錄	記錄學生解題表現，做為日後改善教學法的依據。	隨活動進度使用，蒐集紙本資料	四次

肆、研究結果

一、發現個案學童在因數倍數的的解題困難

研究者觀察並分析個案學童在因數倍數單元之學習單之答題情形，並輔以訪談方式，來瞭解個案學童於因數倍數單元發展解題歷程所遭遇的困難。本研究依循 Polya 的解題歷程彙整個案學童發展解題歷程上困難的因素如下表 4-1。

表 4-1 個案學童在因數倍數單元的解題困難(資料來源：本研究的研究成果)

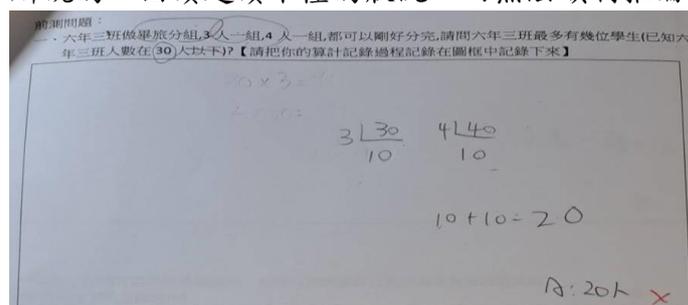
因數倍數單元解題困難	S1	S2	S3
了解問題	✓		
訂定計畫	✓	✓	✓
執行計畫	✓	✓	✓
回顧	✓	✓	✓

註：✓表示個案學童具有該部分的解題困難

個案學童在因數倍數單元的發展解題歷程上的困難分述如下

1. 有理解題意中因數倍數條件的困難：

個案學生在閱讀題目後，無法了解題意中已知的條件或未知條件表示意思，辨識求出因數或公因數的條件，如圖 4-1。而訪談後個案學童 S1 表示：「我是用題目中說的班級人數說這個班有 30 人直接作 3 個人分組來算」，研究者問：「可是這邊(手指學習單)你是用 40 人作分組嗎？」S1：「這邊是我寫錯本來是要寫 30 人才對」(訪 1120109-S1)。因此受限於學童閱讀能力，或公因數概念的欠缺以至於學童只會分解數字，無法理解已知條件(題幹：3 人一組或 4 人一組)與未知條件(題幹：班級人數未滿 30 人)彼此間的訊息關聯，而不能將未確定的條件當成已知條件來分辨求出因數或公因數的條件進而開展解題計畫，也就是一般所說的：因讀題讀不懂的狀況，而無法順利推論下一歷程。

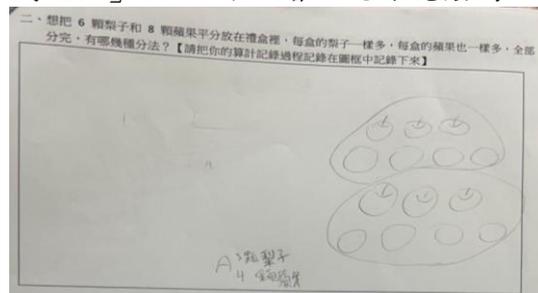


(學 1120109-S1)

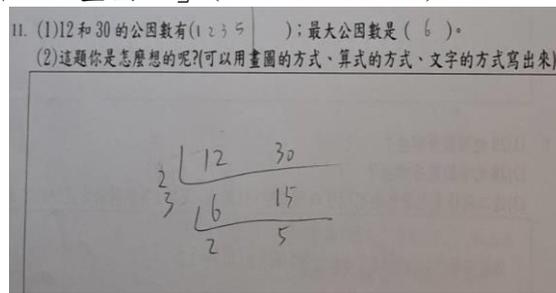
圖 4-1 個案學童 S1 於因數倍數單元的了解問題困難

2. 缺乏因數與倍數的概念內涵，無法寫出完整的預定解題計畫：

個案學生在閱讀題目後雖能了解問題題意並畫出初步的預訂解題計畫草圖(學 1120109-S3)，但鏈結原學得的因數倍數概念時卻無法找到對應關係，產生訂定解題計畫的困難(學 1111221-S3)，如圖 4-2 所示。訪談個案學童 S3 表示：「我知道可以將 6 顆梨子和 8 顆蘋果平分到盒子，所以先畫出兩的盒子再放入梨子和蘋果。」研究者問：「有沒有想過如果全部都放在一盒也是一種分法呢？」S3：「有想過啊，但我想說這樣好像不是平分」研究者問：「有沒有辦法寫出算式呢？」S3：「不太會、忘了怎麼寫，所以用畫圖。」(訪 1120109-S3)。



(學 1120109-S3)

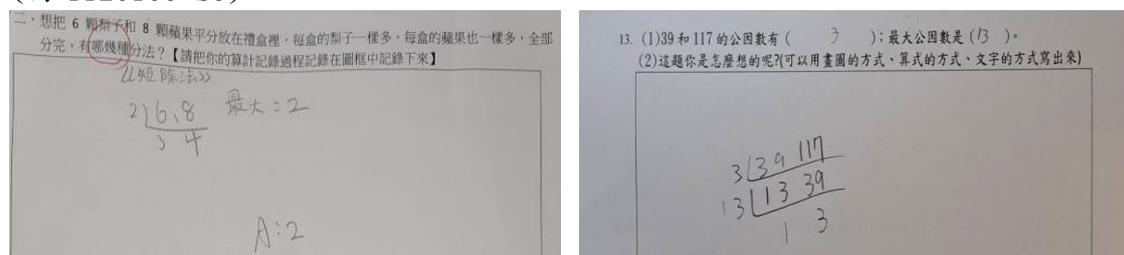


(學 1111221-S3)

圖 4-2 個案學童 S3 於因數倍數單元訂定解題計畫的困難

3. 對因數與倍數概念偏誤只完成部分答題計畫：

個案學童執行寫出解題步驟或執行解題計畫時，有時沒有留意到自己只寫出部分的解題步驟或計畫內容，而造成沒有完整的答題內容；甚至有時會因為觀念的偏誤而無法正確執行解題計畫，如圖 4-3 所示。訪談個案學童 S2 時，研究者問：「為什麼寫出最大 2 (最大公因數) 就完成了呢？」S2 表示：「題目問說有哪幾種分法，我想說先求出最大公因數 2 後，就可以再寫出其他的因數，但是每次就漏了再分下去小一點的因數。」另外，在訪談個案學童 S3 時，研究者問：「為什麼在公因數上寫 3，在最大公因數上寫 13 呢？公因數與最大公因數有什麼分別嗎？」談個案學童 S2 表示：「啊！這我寫錯了公因數應該是 3 和 13，最大公因數是公因數中最大的。」研究者問：「那有沒有想過還有題它更小的公因數呢？」S2 表示：「有！我沒有寫出來 1，我看到短除法後以為只要寫左邊的數字就好。」(訪 1120109-S3)



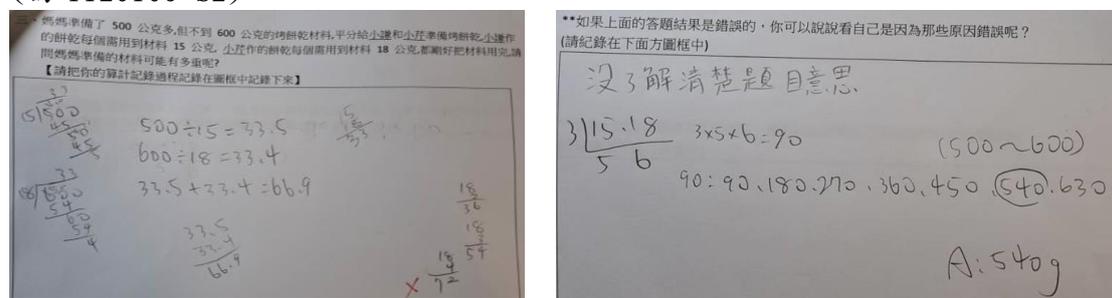
(學 1111221-S2)

(學 1111221-S3)

圖 4-3 個案學童 S2 及 S3 於因數倍數單元訂定解題計畫的困難

4. 作答問題時無法回顧檢視是在解答因數或倍數：

解題後研究者讓研究個案學童自己再次回頭檢驗自己的解題表現是否能正確，發現個案學童雖能力可以檢驗自己的論點，且知道如何用不同且快速的解法來類比推論其他相同概念的數學問題，但解題時的當下卻是無法同時回顧檢視解題計畫是否與解題目標相符，如圖 4-3 所示。研究者提問：「可以說說看妳怎認為自己當時並沒有發現自己解題方式與題目要問的意思不同呢？」個案學童 S2 表示：「當時沒有發現不一樣，只想到要分材料做餅乾，現在知道題目是要分掉 500~600 公克的材料給兩個人用，不是有兩種材料 500 公克和 600 公克個別分給兩個人，所以現在我可以用最小公倍數來求出答案。」研究者問：「你在找最小公倍數時大多用列舉的方式，在這邊用的是短除法的理由是什麼？」S2：「因為要寫 15 及 18 在 500 到 600 間的公倍數太大了，所以我得用較快速的解法解題。」(訪 1120109-S2)



(學 1120109-S2)

圖 4-4 個案學童 S2 於因數倍數單元回顧檢視的困難

二、歸納個案學童在因數倍數單元的發展解題歷程上的困難的可能原因。

(一) 在「對因數或倍數題意條件理解困難，無法確認條件與目的關聯」的可能原因：

受於閱讀能力的對於題意題中因數或倍數的已知條件或未知條件等訊息無法提取關聯性，往下的解題計畫無法開展或是產生解題錯誤。

(二) 在「缺乏因數與倍數的概念內涵，無法寫出完整的預定解題計畫」的可能原因：

學童有時只是模仿因數、倍數的解題步驟的外觀，缺乏基礎概念的內涵，即使知道題意條件與解題目的關聯，卻無法有效對應，使得解題計畫無法正確開展。

(三) 在「因數與倍數概念偏誤或只完成部分答題計畫」：

因數倍數基本概念間尚有包含關係（如：最大公因數、公因數或最小公倍數、倍數），而以為是全然獨立產生的偏誤；或沒有留意只寫出部分的解題步驟或計畫內容，而造成沒有完整的答題內容，都無法正確回答問題。

(四) 在「作答問題時無法回顧檢視是在解答因數或倍數」：

答題過程中無法即時檢驗自己的答題計畫是否與符合想要的結果、無法檢驗自己正在實施解答因數與倍數的步驟等，這些記錄過程是否是題目要問的。而解題方式中甚至慣性適用窮舉法方式列出結果，無法使用短除法快速解正確答題。

基於上述原因個案學童產生在因數倍數單元解題歷程上的困難，所以個案學童無法使用類比、一般化或特殊化的解題策略解決問題。

伍、教學建議與限制

一、教學建議

為達成「探究六年級個案學童在因數倍數單元的解題歷程」之研究目的，研究者對自己任教國小的三位六年級個案學童進行紙本與晤談等方式的資料蒐集與分析後，提出教學建議可能解決個案學童與解題歷程因發生之困難，如表 5-1 所示：

表 5-1 可能解決個案學童於因數倍數解題歷程發生之困難的教學建議

在因數或倍數解題歷程發生之困難	教學建議
有理解題意中因數倍數條件的困難	教學者以圖形表徵方式(如：畫出思考草圖)來幫助學童提取所需解題條件的訊息
缺乏因數與倍數的概念內涵，無法寫出完整的預定解題計畫	教學者應協助學童釐清基礎概念的內涵，或在文字題中引導學童區辨概念與題意條件的定應關係
對因數與倍數概念偏誤只完成部分答題計畫	教學者引領學童草擬解題的步驟並逐項勾選檢視自己有沒有達成所擬定的解題計畫
作答問題時無法回顧檢視是在解答因數或倍數	學童完成解題計畫後，教學者可以引導學童檢視已經勾選解題計畫是否符合解題目的，或檢視與原始訂定的解題步驟是否相符、是否應該要導正。

二、限制

本研究係對研究者任教學校的三位六年級學童在因數倍數單元的解題歷程作個案研究，為相關教學和未來後續研究之參考，對研究對象與範圍有限制不宜擴大推論。

主要參考文獻

- 教育部 (2021)。十二年國民基本教育課程綱要總綱修正。臺北市：教育部。
- 李心儀(2016)。不同解題歷程模式中的回顧。臺灣教育評論月刊, 5(8), 157-161。
- 陳嘉皇(2014)。小學生因、倍數問題之解題表現研究。高雄師大學報, 36, 71-90。
- 黃國勳、劉祥通 (2003), 實踐小學因數教學模組之研究。科學教育學刊, 11(3), 1-22。
- 謝堅(1995)。因倍數教材設計。國民小學實驗課程教師手冊第九冊。臺北市，國家研究院籌備處。
- Zazkis, R. & Campbell. S. R. (1996). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 540-563.

Problem-solving exploration of sixth-grade case students in the factor and multiple unit

Gao Guoxian ¹ Yao Rufen ²

¹National Chiayi University, Department of Education, Master of Science
in Education, on-the-job graduate student kxk2039@gmail.com

²Professor, Department of Education, National Chiayi University
rfyau@mail.ncyu.edu.tw

Abstract

This study uses the case study method, with three primary school 6th grade students taught by the researcher as the case study subjects, and explores the problem solving process of the case students in the factor and multiple unit. For the purpose of the study, the study was analysed by using worksheets, affective questionnaires, case students learning logs, interviews and teacher observation records. The study found that the performance of the case students in the four problem-solving stages was as follows: 1. there is difficulty in understanding the condition of factor multiples in the meaning of the topic; 2. lack of conceptual connotation of factors and multiples, unable to write a complete predetermined solution plan; 3. Only partially complete the answer plan for the bias of factor and multiple concepts; 4. When answering questions, case students cannot review whether it is the answer factor or multiple.

Through this discovery, we hope to provide researchers with more references when exploring the performance of students about factor and multiple problem solving.

Keywords: factor multiple, problem solving difficulty, problem solving process

將金融知識融入國小五年級數學之教學活動設計研究 —以比率單元為例

林文華¹

¹ 臺北教育大學數學暨資訊教育學系 pluto820925@gmail.com

摘要

本研究目的旨在探討金融知識融入國小數學課程之教學活動設計，並以國小五年級數學課程中的比率單元為例，以探討學生在教學後的學習興趣和學習成效，期望能藉此提升學生之金融素養及數學素養。而本研究採用行動研究法，在研究者與諍友教師共同討論下，將課程設計不斷進行修改，亦從教學過程中觀察學生表現，以進行課程設計之檢視及修正。

關鍵字：金融知識、比率、金融素養、數學素養、行動研究

壹、緒論

一、研究背景與動機

(一)研究背景

舉凡生活中之食衣住行育樂皆與金融緊密相關，而國人相關金融理財知識極為匱乏，如消費觀、儲蓄、投資、保險、利息、分期付款及危險認識等，在投資失利與受騙情況下，衍生更多社會問題(許朝信，2006)。而金融理財已不再是成年人的專利，向下紮根的金融教育正是各國當前正積極推廣的新教育目標(侯宛君，2012)。金融訊息變化迅速，有學者也提出國小教師認為小學階段的理財教育，對於學生的未來生活是具有正面意義的，然而，現行教科書中並沒有足夠的活用教材(黃美筠、呂啟民、陳國益、蕭郁瑩，2012)。

而國小經濟教育的先驅 Senesh 主張小學乃開始經濟教育最佳時機，Hansen 亦指出小學階段發展出的術語、認知和態度對日後的學習有相當大的影響(引自黃劍華，1999)。有學者亦提出「金融理財」課程是現今社會生活中不可或缺的知識，因而有必要進行設科或融入其它課程中進行教學(許朝信，2006)。亦有學者提及「金融教育」已融入社會、綜合領域及彈性課程中，然而「金融教育」與數字脫不了關連，但「金融教育」融入數學領域相關研究卻仍稀少，由此可見國內在金融教育的推廣尚有待發展(胡雅筑，2018)。

而金融知識與數學有許多關聯，英國國家課程(Department for Education UK, 2014)提到數學對日常生活至關重要，對金融知識和大多數就業形式都必不可少。因此學生需要發展以數學解決問題的能力，包括金融數學。像是發展學生對於百分比相關問題，包括：利潤增減、成本問題及簡單的利率問題。學生應將數學知識應用到其他學科或與金融相關的任何地方。由以上可知數學與金融知識密切相關，要具備良好的數學素養必然涉及金融素養；相對的，要有好的金融素養，也必然須具備一定的數學

素養，如此才能將數學應用於金融環境中。因此數學素養與金融素養兩者相輔相成。

許多學者強調金融理財教育向下紮根的重要性，然而金融教育在現今小學階段並未單獨設科教學，故將金融教育融入其他學科中是較佳的方式。雖然國小社會領域等課程中已融入金融理財相關課程，但數學科尚未正式融入相關課程，而研究者經由文獻探討後發現數學與金融密切關連，因此金融教育亦適合融入數學領域課程中，故將金融教育融入於國小數學領域中有其必要性。

(二)研究動機

雖目前金融理財相關課程已融入於國小社會課程當中，但由實際教學現場來看，學生對金融知識的理解仍尚未完整，因而影響數學相關問題之解題，所以研究者認為應加強學生的基本金融知識。研究者欲設計一套金融教學活動融入數學現有單元中，使學生強化基本的金融素養，亦使數學之應用能力更為踏實，以達到現今強調之素養教學。期望本研究之金融教學活動能提升學生的金融素養及數學素養，使學生得以解決生活中所遇到的金融或數學之相關問題。

有學者也發現，多數六年級學生不清楚題目中出現的利潤、售價、成本這幾個經濟名詞的意義與關係，經過教師解說後，課堂上仍然只有少數同學理解，能列出等量關係。若比較分析各領域教科書、習作內容或基測理財相關試題，可發現國內教材單一，偏知識、觀念題，忽視運用技能、情意的面向(周玉秀, 2015)。由以上得知金融知識應從小灌輸，而目前國小數學課程並未正式將金融知識融入，雖有少數題型具有金融知識概念，但學生常不瞭解背後金融知識的真正意涵，只是利用題目給的線索解題，而失去了題目的實際用意。而研究者曾在高年級數學學習扶助班教學時，發現學生對於數學常感到無力，因此研究者嘗試將存摺、消費比價、匯率等融入教學，發現學生會對於課程較有感，也會提出相關問題。故研究者欲設計一套金融教學活動融入於國小五年級下學期數學課程之比率單元中，使學生能夠更加理解金融相關知識，並將其運用於數學解題中，以提高學生的數學素養，亦希望藉由金融教學活動來提升學生之金錢使用觀念，以提高學生之金融素養。

基於上述，故研究者欲自行設計金融知識融入國小數學之教學活動，以高年級學童適合的金融教學活動來輔助數學的學習，並提升學生的金融素養。而五年級比率單元涉及關於金融基本知識問題，如：打折、成本、利潤、利率等相關名詞，學生可能因不瞭解這些名詞而不會運算，故研究者以此單元設計一套金融教學活動，對學生進行金融教學實驗，除了使學生的數學素養更加扎實，也使學生增加金融相關知識，期望學生達到小學階段應學得的金融素養。

在近期十二年國教推動下，強調素養是知識、技能及態度的全面性學習，雖然政策已推行，但許多教科書、評量試題、教學上並未全面跟進，故研究者希望設計一套將金融知識融入數學課程的教學活動，讓學生能夠將金融知識與數學知識結合，以培養學生能夠面對生活中的金融相關問題，也希望提升學生對金錢的正確觀念及使用態度，而使其具備金融素養及數學素養。

二、研究目的與待答問題

研究者將自行設計一套金融教學活動融入國小高年級數學課程中，並以角色扮演、模擬情境的方式進行教學，課堂評量則以 Hiteach 軟體輔助，以提高學生的學習動機，希望能藉此金融教學活動提升學生之金融知識及金錢使用觀念，並能將金融知識運用於數學或生活中，以達到金融素養與數學素養的提升。

除了期盼學生未來遇到相關之數學問題時，能將數學與金融知識連結，以提升運用數學解決生活問題的能力及金融素養外，亦期此教學活動、教材設計與研究能作為教師及未來教學上或相關研究的參考。

依據研究者之研究背景與動機，本研究目的與待答問題如下：

(一)研究目的

1. 探討學生經本研究金融知識融入數學之教學後，對於數學課程的學習態度及在數學學習上的表現。
2. 探討學生經本研究金融知識融入數學之教學後，對於金融課程的學習態度及在金融學習上的表現。
3. 探討研究者在實施本研究設計的金融知識融入數學之教學歷程中，對於金融教學的反思與成長。

(二)待答問題

4. 學生經本研究金融知識融入數學之教學後，對於數學課程的學習態度及在數學學習的表現上有何影響？
5. 學生經本研究金融知識融入數學之教學後，對於金融課程的學習態度及在金融學習的表現上有何影響？
6. 研究者在實施本研究設計的金融知識融入數學之教學歷程中，對於金融教學的反思與成長為何？

貳、文獻探討

一、金融知識介紹及相關研究

有學者在研究中提出：在學校所實施的金融教育可能著重於專有名詞與定義等知識，而學生識別與金融產品和市場有關的詞彙能力可能是應用金融知識的重要基礎。由金融知識中所衍生出的技能也很重要，包括執行基本任務：像是計算金融數學，如：計算簡單利息；或解釋更抽象的概念，如：機會成本。學者根據文獻分析後發現金融教育對於學生的態度是有效改變的，因而認為未來可以對小學生進行態度面的調查和訪談，並可參考心理學測量信心、未來方向和控制因素的態度測量方式，經過直接採用或部分修改的方式應用於小學生的評估研究。最後，學者亦提出金融教育的計畫中，規劃、實施、培訓、學生課堂時間和教育者的資源方面都有重要的機會成本，因此可投入決定最佳的金融教育計劃目標研究，這將有助於改善青少年和成人的金融決策潛力，且最終將提高公民的財政福利(Collins and Odders-White, 2015)。

二、金融知識認知發展相關研究

依據黃建華(2009)第一至第三階段所應學習之理財素養，研究者將內容整

理成表 1 如下：

表 1 五至十四歲所應學習之理財素養

階段	年齡	所應學習之理財素養
第一階段	5~7 歲	1. 能做出儲蓄、花費的選擇。 2. 了解金錢來源、花費的目的。 3. 了解金錢管理的重要性。 4. 能做出消費的選擇。 5. 了解消費引發之社會道德議題。
第二階段	7~11 歲	1. 做簡單的理財決策。 2. 了解不同目的使用金錢的影響性。 3. 能妥善儲蓄以因應未來的需求。 4. 了解經濟能力因人、時間的相異性。 5. 了解每個人有不同的金錢觀。 6. 能了解並解決利率問題。
第三階段	11~14 歲	1. 了解影響花費和儲蓄的因素，並能依情況有效管理金錢。 2. 了解政府資金來源。 3. 了解保險與風險。 4. 了解金錢使用對社會的影響性。 5. 能解決百分比、比率與比例的金錢問題。

根據黃劍華(2009)學者對五至十四歲所應學習之理財素養中，可知道從小就要開始教導孩子金錢相關知識，再來學會對金錢做選擇，其中也牽涉到利率的計算，最後要能夠管理金錢，就算是超出目前經驗，也應學習相關知識，其中也涉及到百分比、比率、比例的計算，而本研究的比率單元能夠學習到利率等比率相關數學知識，並能結合金融相關知識，以作為金融知識融入數學教學，使學生對未來提早做準備。

參、研究方法

本研究採行動研究法，主要目的為設計一套融合金融知識於數學比率單元之教學活動，並對已經上過五下數學之比率單元學生進行此金融教學活動，欲使學生提升金融素養及數學素養，以解決現行生活或未來生活中可能會面臨的問題，並根據所蒐集資料採用質性為主、量化為輔之分析，以了解學生對於金融教學活動之學習態度，藉此提升學生對於金融教學之學習興趣，並增進教學者即研究者自身教學知能。

一、研究架構

研究者根據研究動機後，並經由文獻資料探討後訂定題目方向，並持續進行相關文獻之探討，以設計出一套金融教育方案。在設計過程中，研究者會與研究徵友一同討論金融教育方案的設計，經由文獻探討及討論後，將金融教育方案設計好，以進行金融教學實驗，希望藉此能夠解決教育現場之問題，並對研究者自身教學進行省思，以求研究者即教學者個人教學成長。教學實驗過程

中會請研究諍友協助觀察學生學習表現等教學歷程，並將教學實驗過程錄影以便紀錄及分析。而每一堂課教學過後，研究者會對自身教學繕寫省思札記紀錄，並將諍友給予的回饋進行反思，以求日後教學能有所改善。

本研究之研究架構參考 Shulman(1987)的教學推理與行動模式，將依據其模式提到的六階段：「理解」、「轉化」、「教學」、「評量」、「反思」、「新理解」進行研究。其中教學前為「理解」與「轉化」階段；教學中為「教學」和「評量」(形成性評量)階段；教學後為「評量」(總結性評量)、「反思」與「新理解」階段。「理解」為對於教學內容之分析與對教學目標的確立；「轉化」為將教學內容轉化成教學教材，以思考教學時之表徵方式；「教學」則是將轉化後的教學計畫具體實現，以觀察課堂中之師生的表現；「評量」有包括教學中的形成性評量、教學後的總結性評量以及相關之問卷調查；「反思」則為教學後對於教學設計、個人教學、學生表現之現況進行回顧檢視，並將徵友教師給予之回饋建議作省思；「新理解」則是對教學狀況之問題與批判內化後而作的調整，以從經驗中得到新的理解，以便下一個循環。故本研究架構圖如下：

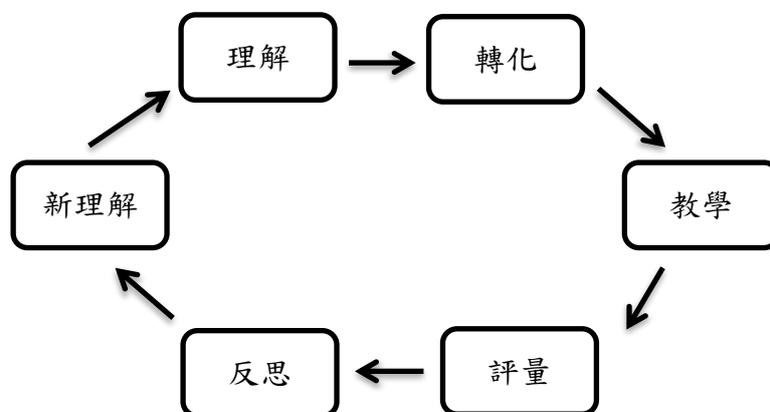


圖 1 研究架構圖

二、實驗流程

行動研究是根據實際教學不斷修正，以因應目前的教學現況。而本研究將對國小高年級學生進行教學實驗，希望藉此提升學生對於金融及數學之學習態度。本研究配合五年級下學期比率單元所進行之金融教育課程，將對已具備此單元概念之高年級學生進行教學實驗，一共四個班，每個班進行四堂之金融教育課程。

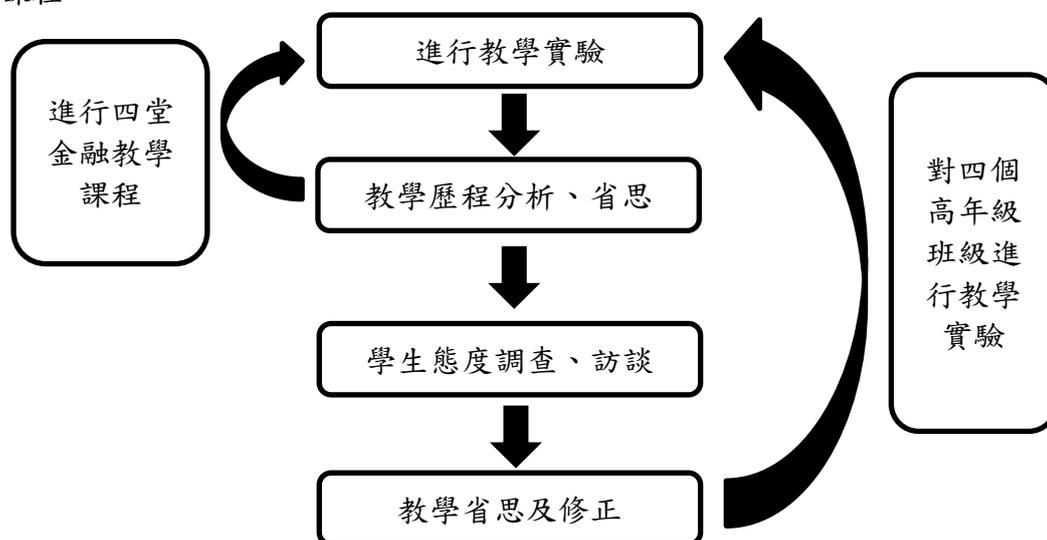


圖 2 實驗流程圖

三、研究對象

研究對象為研究者任教的某桃園市公立國小之高年級學生，因本研究設計之金融知識融入數學課程之教學活動配合五年級下學期之比率單元，故研究對象必須是已具備五年級下學期比率單元教學經驗的學生，研究者預計對任教學校的四個高年級班級進行教學實驗，希望能對自身之教學有所成長。

四、教學活動設計

本研究將進行共四節課的金融教學，搭配國小五年級數學比率單元進行教學活動，研究者將四節課之各單元名稱、金融主題、所教之金融概念及搭配之數學比率概念整理如下表：

表 2 各單元所含之金融與數學概念

教學節次	單元名稱	金融主題	金融概念	數學概念
第一節	知己知彼，百戰百勝	廠商(賣方)定價策略—究竟場商賺多少？	<ol style="list-style-type: none"> 消費市場的關係：了解生產者、批發商、零售商、消費者之間的關係。 廠商定價策略：了解成本、加成、獲利、定價之間的關係及意涵。 	加成的比率計算。
第二節	我是消費高手	廠商(賣方)促銷策略—我是消費高手(進行比價活動)	<ol style="list-style-type: none"> 定價(原價)、售價(賣價或買價)、打折、營收的名詞概念及關連性。 促銷方案/消費選擇：打折、買一送一、第二件半價的判斷。 促銷後的營利(利益或獲益)為營收(收入)扣除成本之概念。 	打折的比率計算。
第三節	我是儲蓄高手	儲蓄、利息、投資、風險	<ol style="list-style-type: none"> 了解儲蓄所帶來的好處，如：定存利息。 了解本金、利率、利息、複利的名詞概念及關係。 並能夠了解其他的儲蓄或投資方式，進而了解風險是什麼，並知道風險與利益的關係。 	利率的比率計算。
第四節	我是金錢管理高手	金錢管理、金錢來源	<ol style="list-style-type: none"> 知道錢的來源包括：工作薪資、利息、投資獲利、交易獲利等。 能將所擁有的金錢做規 	金錢配置占可支配金額的百分比。

劃，並知道各消費、儲蓄或投資之比重。

肆、研究結果

研究者已進行前兩輪的教學實驗，先將第一輪教學實驗之結果作初步分析。因部分學生未參與前測，故研究者將有參與前測和後測試題的 18 位學生之作答狀況作比對整理，各學生前測和後測之答錯題數、答對題數及分數如下表：

表 3 第一輪實驗前後測作答及分數比對

學生代碼	前測			後測		
	答錯題數	答對題數	分數	答錯題數	答對題數	分數
S1	11	9	45	12	8	40
S3	6	14	70	3	17	85
S4	6	14	70	8	12	60
S5	11	9	45	9	11	55
S6	7	13	65	4	16	80
S7	7	13	65	0	20	100
S11	12	8	40	8	12	60
S12	12	8	40	13	7	35
S13	6	14	70	7	13	65
S14	13	7	35	14	6	30
S15	12	8	40	10	10	50
S16	10	10	50	6	14	70
S17	11	9	45	8	12	60
S18	8	12	60	6	14	70
S19	11	9	45	15	5	25
S20	8	12	60	4	16	80
S21	5	15	75	2	18	90
S22	11	9	45	11	9	45

前測平均分數為 53.61，後測平均分數為 61.11，雖有明顯進步，但仍有很大的進步空間，這讓研究者反思教學、教學設計、評量上尚須深入了解，並尋求方法改良教學設計及教學的方式。

而研究者將 20 位參與教學實驗的學生填寫之態度量表進行敘述性統計，而本研究態度量表採用五點量表，分為非常同意、同意、普通、不同意、非常不同意五個選項，五個選項分別為 2 分、1 分、0 分、-1 分、-2 分。研究者將第一輪實驗班級平均分數統計如下表：

表 4 第一輪實驗態度量表之各問題平均分數統計表

課程	問題	平均
	1.我喜歡這次的課程活動。	1.15
	2.我很認真的參與課程活動及討論。	0.85

	3.我覺得課程活動對我的課業很有幫助。	0.85
	4.我覺得課程活動可增加我與他人的互動。	1.05
	5.我覺得課程對我的生活有很大的幫助。	1.05
數學興趣	1.經由本次課程，可提升我對數學的興趣。	0.2
	2.經由本次課程，可使我的數學概念更穩定。	0.5
	3.經由本次課程，可使我的比率概念更加明確。	1.05
	4.經由本次課程，可使我在比率的計算更順利。	0.65
	5.經由本次課程，可使我對數學的信心提升。	0.65
金融教育	1.經由本次課程，可提升我對金融知識的興趣。	1.1
	2.經由本次課程，可使我的金融知識增加。	1.45
	3.經由本次課程，可使我更了解消費市場。	1.25
	4.經由本次課程，使我更理解比率單元的題目。	0.85
	5.經由本次課程，我希望未來其他數學單元也可融入金融知識。	0.75
	6.經由本次課程，我希望未來其他科目也可融入金融知識。	0.6
	7.經由本次課程，可提升我對金錢的管理能力。	1.25
	8.經由本次課程，可使我對理財能力信心提升。	1.15

研究者根據態度量表統計結果分析後，發現學生對於課程抱持樂觀正面的態度，多數學生喜愛此課程並認為課程對生活具幫助性；而多數學生亦對金融知識的興趣及自信程度提升；在數學方面，多數學生對比率概念更加明確，但對於數學本身的興趣、自信度上相對上較無明顯提升。

伍、結論

研究者將研究結果之各面向整理如下：

- 一、數學學習方面：學生對於比率單元多更加熟悉，但經由訪談後發現數學學習程度較弱的學生自信心尚較弱，也可發現學生本身的數學程度會影響此研究施測的結果。
- 二、金融學習方面：學生對於金融知識的學習態度正面積極，從教學過程中可發現學生對金融知識很感興趣，而由教學後之蒐集資料亦發現學生對金融的興趣、自信及知識面均有明顯之提升。
- 三、研究者的反思與成長：研究者與諍友教師討論教案的過程中學習到許多金融相關知識，因而觸發研究者教學活動設計上的靈感。也在教學後得到其他教師的寶貴建議，而使得教學能有更多元的修改方向。

整體來說，如從學習態度面來看，學生多數是積極正面的，多數會希望金融與數學結合來提升數學之趣味性。而從學習表現來看，學生會受到原先數學程度影響作答表現及自我數學信心，亦可發現原先程度較佳的學生多有明顯成績提升，但程度中等和較弱的學生就可能因本身之課堂參與度、作答技巧和自信心等因素影響其作答表現。

研究者於接續的實驗將對程度中等和弱後的學生給予更多的關注，以提升學習成效，並且將對課程進行不斷的修改，期望能使學生的金融素養及數學素

養能有更大的提升，並希望能使數學課程有更不一樣的走向及多元性。

參考文獻

- 周玉秀(2015)。以 PISA 理財素養評量架構探究國內學童之理財教育。《國民教育》。第 55 卷第 1 期，68-77。
- 胡雅筑(2018)。金融教育融入國小四年級數學領域課程之行動研究。國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系碩士論文。未出版，臺北市。
- 侯宛君(2012)。國小兒童理財素養現況與使用兒童理財網之初探研究—以台北市高年級學童為例。國立臺北教育大學國民教育學系碩士班碩士論文。未出版，臺北市。
- 許朝信(2006)。現階段國民中小學創新課程設立之理念與實施芻議—以「金融理財」課程為例。《國民教育研究學報》。17，147-172。
- 黃劍華(1999)。臺北地區國民小學高年級學生經濟知識之評量。國立臺灣師範大學公民訓育研究所碩士論文。未出版，臺北市。
- 黃劍華(2009)。理財教育融入國小課程之策略與實施之研究。國立台灣師範大學公民教育與活動領導研究所博士論文。未出版，臺北市。
- 黃美筠、紀博棟、黃劍華、饒玉屏、呂啟民(2011)。臺灣地區中小學金融教育課程綱要建構之研究。《公民訓育學報》，21，1-43。
- 黃美筠、呂啟民、陳國益、蕭郁瑩(2012)。中小學個人理財教育教師的教學準備與能力之研究研究成果報告。行政院國家科學委員會專題研究成果報告(編號：NSC 100-2410-H-003-028-)。未出版。
- Department for education UK(2014). *The national curriculum in england: Framework document. Department for education.*
(https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/381344/Master_final_national_curriculum_28_Nov.pdf)
- Collins and Odders-White.(2015). A Framework for Developing and Testing Financial Capability Education Programs Targeted to Elementary Schools. *The Journal of Economic Education* , 46(1), 105-120.
- Shulman(1987).Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.

Research on the design of teaching activities for integrating financial knowledge into fifth-grade mathematics in elementary schools—Taking the ratio unit as an example

Lin-Wen Hua¹

¹Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Abstract

The purpose of this study is to explore the teaching activity design of integrating financial knowledge into the elementary school mathematics curriculum. And take the ratio unit in the mathematics curriculum of the fifth grade of elementary school as an example. To explore students' learning interest and learning effect after teaching, It is expected to improve students' financial literacy and mathematical literacy. The research method of this research is action research. The curriculum design is constantly revised under the joint discussion of researcher and other teachers. Students' performance is also observed during the teaching process to review and revise the curriculum design.

Key words: financial knowledge, ratios, financial literacy, mathematical literacy, action research



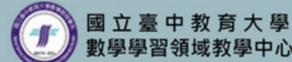
台灣數學教育學會



指導單位：



主辦單位：



贊助單位：

