2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

論文全文集

研討主題
「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

目錄

其他數學教育和數位議題

海報發表

大會組織

指導單位：

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

大會主席：

國立臺中教育大學校長 郭伯臣
國立臺北教育大學校長 陳慶和

大會副主席（依姓氏筆劃排序）：

楊凱琳教授（台灣數學教育學會理事長）
黃國禎教授（國立臺中教育大學副校長）
陳錦章教授（國立臺中教育大學理學院院長）
劉柏宏教授（科技部數學教育學門召集人）

議程主席：

袁 媛教授（國立臺中教育大學 數學教育學系系主任）

議程委員（依姓氏筆劃排序）：

王婷瑩教授 左台益教授 吳正新教授 吳昭容教授 李梓楠教授 李林滄教授
李源順教授 林勇吉教授 林原宏教授 林碧珍教授 林素微教授 姚如芬教授
洪文良教授 胡豐榮教授 英家銘教授 徐偉民教授 張育萍教授 張淑怡教授
許慧玉教授 陳中川教授 陳建誠教授 陳致澄教授 陳嘉皇教授 陳錦章教授
單維彰教授 黃馨瑩教授 游自達教授 黃國禎教授 楊晉民教授 楊凱琳教授
詹勳國教授 劉柏宏教授 劉宣谷教授 鄭英豪教授 鄭博文教授 賴冠州教授
謝佳叡教授 謝豐瑞教授 謝闓如教授 魏士軒教授 蘇意雯教授 蘇柏鑫教授

2025 年台灣數學教育學會年會暨第 17 屆科技與數學教育國際學術研討會

時間：2025.05.17-2025.05.18 地點：國立臺中教育大學

2025.05.17 (星期六)

時間	項目	地點	主持人
08:00-08:30	報到	大廳 K108	行政組
08:30-08:40	研討會開幕(校長來賓致詞)	音樂廳 K101	袁媛教授
08:40-09:30	**特邀演講 I** **主講者**：Jinfa Cai Professor, University of Delaware, USA **講題**：Supporting Teachers to Teach Mathematics Through Problem Posing	音樂廳 K101	單維彰教授
09:40-10:20	**【林福來教授博碩士論文獎頒獎暨獲獎人論文主題報告】** 博士學位論文獎(從缺) 碩士學位論文獎 頒獎人：林福來教授	音樂廳 K101	楊凱琳教授
10:20-11:20	茶敘暨海報展示	大廳 K108	行政組
10:30-11:20	**TI 工作坊(I)** **主講者**： Siew Tong Lee School of the Arts, Singapore **講題**：圖形計算機技術在統計學的應用	數學樓 3 樓 C301	李明恭教授
11:20-12:10	**TI 工作坊（II）** **主講者**：李睿紘 T3 Instructor **講題**：運用圖形計算機科技理解變換的意義	數學樓 3 樓 C301	李明恭教授
11:20-12:10	台灣數學教育學會 第九屆第 2 次會員大會	音樂廳 K101	楊凱琳教授
12:20-13:10	台灣數學教育學會 第九屆第 4 次理監事會議	求真樓 4 樓 K401	楊凱琳教授
12:20-13:40	午餐	大廳 K108	行政組
13:40-15:20	數學教材教法教授們與師資生論壇 (大學教授與師資生場次)	演講廳 K107	主持人: 李源順教授 與談人: 林原宏教授 姚如芬教授 單維彰教授
13:40-15:20	**論文發表場次一** AI 語言處理與情緒運算在數學學習行為測量上之應用 偏鄉教師專業學習社群融入 JDM 教材之行動研究	數學樓 3 樓 C301	楊凱琳教授

	數學史融入國小教學-九章算術圓田		
15:20-15:40	茶敘	大廳 K108	行政組
15:40-16:30	**專題演講** 主講者：Siew Tong Lee School of the Arts, Singapore 講題：圖形計算機技術在微積分教學的應用	演講廳 K107	Eric Chin
16:30-17:20	**專題演講** 主講者：Eric Chin Education Technology Consultant, Singapore 講題：STEM 之教育探索篇	演講廳 K107	Siew Tong Lee
15:40-17:20	**論文發表場次二**	數學樓 3 樓 C301	謝佳叡教授
	國中數學教科書試題之比較與分析 —以二元一次聯立方程式為例		
	臺灣與中國國小數學教科書在分數不同意義的數學活動類型之比較		
	臺灣高中數學教師對導數概念的認識論觀點		
	論文發表場次三	數學樓 3 樓 C302	李源順教授
	國小五年級視知覺及操弄之個案研究		
	國小六年級擬題的數學創造力表現之研究		
	結合提問和數學感提升學生文字題解題表現之個案研究		
	論文發表場次四	數學樓 3 樓 C303	張育萍教授
	八年級學生經歷數位數學遊戲學習等差數列的感受		
	數學教育相關研究結果在數學課堂實踐情況的調查研究： 以差異化教學為例		
	數學奠基模組融入國小六年級圓與扇形面積教學之個案研究		
	論文發表場次五	數學樓 3 樓 C304	魏士軒教授
	六年級個案學生在比與比值及其相關單元的解題信念		
	國小六年級學生錯誤類型之研究 —縮圖、放大圖與比例尺為例		
	提升四年級學習扶助學生文字題解題能力之個案研究		

2025 年台灣數學教育學會年會暨第 17 屆科技與數學教育國際學術研討會

2025.05.18 (星期日)

<table>
<tr><th>時間</th><th>項目</th><th>地點</th><th>主持人</th></tr>
<tr><td>08:30-09:00</td><td>報到</td><td>大廳 K108</td><td>行政組</td></tr>
<tr><td>09:10-10:00</td><td>特邀演講 II
主講者：Charalambos Y. Charalambous
Associate Professor, University of Cyprus
講題：Studying and Understanding Teaching Quality in Mathematics: Advancements Made and Challenges Faced</td><td>音樂廳 K101</td><td>許慧玉教授</td></tr>
<tr><td>10:00-10:50</td><td>茶敘</td><td>大廳 K108</td><td>行政組</td></tr>
<tr><td>10:50-11:40</td><td>特邀演講 III
主講者：Lynda Ball
Senior lecturer, University of Melbourne, Australia
講題：Technology for Teaching and Learning Mathematics: Opportunities and Issues</td><td>音樂廳 K101</td><td>楊凱琳教授</td></tr>
<tr><td>11:40-13:30</td><td>午餐</td><td>大廳 K108</td><td>行政組</td></tr>
<tr><td rowspan="16">13:30-14:30</td><td>論文發表場次六</td><td rowspan="4">數學樓 3 樓
C301</td><td rowspan="4">林勇吉教授</td></tr>
<tr><td>運用 Polya 解題策略教學降低五年級學生數學學習焦慮之行動研究-以臺中市某國小為例</td></tr>
<tr><td>運用數學寫作於國小五年級整數四則計算之行動研究</td></tr>
<tr><td>國小高年級學生數學情緒初探</td></tr>
<tr><td>論文發表場次七</td><td rowspan="4">數學樓 3 樓
C302</td><td rowspan="4">陳建誠教授</td></tr>
<tr><td>數學奠基模組融入國小四年級「假分數和帶分數互換」 教學之個案研究</td></tr>
<tr><td>以探究教學提升國小五年級學生數學推理與系統性思考之研究</td></tr>
<tr><td>以《圖騰島》桌遊探討小學生空間推理能力之促進效果</td></tr>
<tr><td>論文發表場次八</td><td rowspan="4">數學樓 3 樓
C303</td><td rowspan="4">許慧玉教授</td></tr>
<tr><td>診斷教學應用於數學分數單元教學成效之研究</td></tr>
<tr><td>異分母分數加減的迷思概念探究與教學設計</td></tr>
<tr><td>應用四階段評量診斷六年級學童在分數除法問題的表現</td></tr>
<tr><td>論文發表場次九</td><td rowspan="4">數學樓 3 樓
C304</td><td rowspan="4">李梓楠教授</td></tr>
<tr><td>學生影片製作與討論促進數學參與：比較 YouTuber 型式與教學型式任務設計</td></tr>
<tr><td>因倍數概念之學習診斷工具開發之前導研究</td></tr>
<tr><td>應用三階段評量探討國小五年級學童在因倍數問題的解題表現</td></tr>
<tr><td rowspan="3">14:40-15:40</td><td>論文發表場次十</td><td rowspan="3">數學樓 3 樓
C301</td><td rowspan="3">吳正新教授</td></tr>
<tr><td>差異化教學中的彈性分組策略對國小六年級學生數學學習成效之影響</td></tr>
<tr><td>探究教師在數學數位差異化教學中轉變之理論框架</td></tr>
</table>

時間	項目	地點	主持人
	論文發表場次十一	數學樓 3 樓 C302	謝闓如教授
	國小二年級低成就學童數學外加課程舉例能力之教學初探		
	國中數學課後學習扶助使用數位學習平台之個案研究		
	學生小組成就區分合作學習融入六年級小數與分數的計算教學之研究		
	論文發表場次十二	數學樓 3 樓 C304	楊晉民教授
	以數學感「舉例」策略融入一年級數的單元之初探		
	IMPROVE 後設認知教學法對國小學生數學學習影響初探		

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(1) 數學教學設計與學習科技

研討主題
「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

Student Video Production and Discussion for Mathematical Engagement: Comparing YouTuber and Tutorial Video Task Designs

Ho-Chieh Lin
New Taipei Municipal Qing Shui Elementary School
linhochieh@gmail.com

Abstract

As digital media becomes increasingly integrated into classrooms, video production offers promising opportunities to support student engagement in mathematics. While prior research suggests that creating videos on mathematical topics can promote student agency and engagement, little is known about how video production styles influence students' mathematical engagement. This study investigated how elementary students engaged in producing and discussing their mathematical videos across two contrasting design environments: YouTuber-style video tasks and tutorial-style video tasks. Drawing on multimodal analysis and a mathematical engagement framework, this study examines students' discourse, use of mathematical strategies, and interaction patterns. Findings reveal that the students who participated in the tutorial-style video tasks demonstrated higher levels of mathematical engagement than the students who participated in the YouTuber-style video tasks. The study contributes to emerging scholarship on video-mediated mathematical discussion and offers insights for designing culturally responsive, media-rich learning experiences in mathematics.

Key words: video production, online video platform, student mathematical engagement

Introduction

Digital media has increasingly become an integral part of education, offering innovative ways to engage students. Although video production is recognized for enhancing student engagement across various disciplines, its application in mathematics remains in its early stages. Existing literature suggests that engaging students in producing videos on mathematical topics fosters student agency and mathematical learning (Oechsler & Borba, 2020). Furthermore, online video-sharing platforms, such as Flip (formerly Flipgrid, now retired), have been used as tools for promoting student mathematical discussion and identities (Hicks, 2021; Chao et al., 2022). Despite these promising findings, research is scarce on the ways video production styles may shape students' engagement with mathematics.

To address this gap, I investigated how elementary students engaged in producing and discussing their mathematical videos within two design environments: YouTuber-style video tasks and tutorial-style video tasks. Both designs were informed by contemporary online video-sharing culture. This study is guided by three research questions aimed at illuminating how these distinct video production styles influence students' mathematical engagement.

- **RQ1:** In what ways do students engage in producing and discussing their YouTuber-style mathematical videos?
- **RQ2:** In what ways do students engage in producing and discussing their tutorial-style videos?
- **RQ3:** How does student engagement with video production and their peer's mathematical ideas differ between the YouTuber-style and tutorial-style video tasks?

Literature Review

This literature review draws on three areas of research: student video production in mathematics education, the use of online video-sharing platforms for asynchronous communication, and frameworks for analyzing student mathematical engagement. Together, these bodies of literature provide a foundation for understanding how video tasks can support and shape children's participation in mathematical practices.

Student Video Production for Mathematical Practices

Student video production involves students designing and editing digital videos, either individually or collaboratively (Henderson et al., 2010). Early initiatives in the 1990s, such as those by community-based arts organizations in the United States, expanded media-making practices beyond teaching digital tool skills alone (Tyner, 1994). For example, the Educational Video Center in New York enabled youth to produce documentary videos on social issues, reflecting broader goals of media literacy—empowering learners to access, critically evaluate, and generate diverse forms of communication. Despite these promising foundations, research on student video production specifically in mathematics remains limited. Oechsler and Borba's (2020) project in Brazilian middle schools, for instance, demonstrated that collaboratively produced mathematics tutorial videos on fraction addition can harness a range of communicative modes—speaking, writing, gestures, and facial expressions—to convey mathematical meaning. Their findings suggest that video production supports learning through the sign-making process and enhances student agency by enabling learners to create and deliver their own curriculum content. Similarly, Campbell et al. (2020) found that a six-week video production assignment in an online STEM course led to significant gains in content knowledge, self-efficacy, and engagement, highlighting the potential of tutorial video production as an effective instructional tool. These studies highlight student video production as a promising approach for fostering multimodal communication, deepening understanding, and empowering active participation, although its broader application in mathematics warrants further study.

Use of the Flip Platform for Asynchronous Communication

Online video platforms such as YouTube and TikTok have transformed communication by facilitating asynchronous interactions. Building on this trend, Flip (formerly Flipgrid, now retired)—originally developed at the University of Minnesota and later acquired by Microsoft—became a popular tool in educational settings (Green et al., 2021; Mango, 2021). Flip allowed instructors to create discussion prompts, with students producing and submitting video responses that could be viewed and commented on by their peers. While some proposals advocate for incorporating Flip into mathematics classrooms (e.g., Zhang et al., 2022), empirical studies in this area remain limited. In their review of existing literature on Flip in education, Kleftodimos and Triantafillidou (2022) noted that most research focuses on higher education or English language learning, with a lack of studies situated in K–12 mathematics contexts. However, Hicks (2021) demonstrated Flip's potential to support mathematical discourse among pre-service teachers, highlighting that features such as pausing and replaying videos enable more in-depth analysis of verbal explanations and visual representations. This evidence points to an untapped opportunity for exploring Flip's effectiveness in fostering mathematical engagement among younger students.

Student Mathematical Engagement

Measuring student engagement in mathematical discussion has been approached from several perspectives. Webb et al. (2014) characterized engagement along two dimensions: explaining one's own ideas and engaging with peers' ideas. Their framework evaluates the detail and validity of explanations, as well as the extent to which responses build on or challenge a peer's reasoning (see Table 1). In contrast, Hähkiöniemi and colleagues (2022) focused on the dialogicity of interactions, categorizing moves such as questioning, challenging, and elaborating as indicators of higher-level engagement compared to simple commenting or responding. Together, these frameworks provide valuable lenses for evaluating the quality of student mathematical discourse. Yet, despite these insights, a comprehensive understanding of how students engage with peers' ideas in video-mediated contexts remains limited.

Table 1: Student Engagement With Another's Mathematical Idea (Webb et al., 2014)

Level	Description	Type
high	Adding details to another student's idea	Adding correct details to another student's correct idea Proposing correct details in response to an incorrect idea Proposing incorrect details in response to a correct suggestion Working together to co-construct solutions
Medium	Referencing the details of another student's idea	
Low	Referencing another student's idea without providing detail	

Theoretical Framework

This study is grounded in the humans-with-media perspective (Borba & Villarreal, 2005), which posits that human thinking co-evolves with digital media through interaction. From this perspective, discourse mediated by digital technologies—especially those combining visual and auditory modes—offers a distinct form of communication that can reorganize and enhance human understanding. In this study, students' mathematical discourse is mediated by the online videos they create and view. The act of producing a video prompts students to externalize and coordinate verbal explanations with visual representations, while watching peers' videos engages them in noticing these multimodal cues. I argue that leveraging video tasks to promote student engagement in mathematics requires careful design that attends to how digital media shapes student expression and attention.

Methodology
All sessions were conducted via Zoom using a task-based interview format (Goldin, 2000). Four fifth-grade students, Pin-Hsin, Pin-Yen, Madiha, and Neha (pseudonyms), from a midwestern U.S. state participated in the study. Pin-Hsin and Pin-Yen, twin Taiwanese sisters who have lived in the United States for two and a half years, engaged in the YouTuber-style video tasks. Madiha and Neha, Pakistani American classmates from an online program at an Islamic school, engaged in the tutorial-style video tasks. In an initial orientation, all participants learned to use the Flip platform and practiced by producing self-introduction videos and providing feedback to their partner.

Two task contexts were implemented:

- **YouTuber Video Tasks:** Pin-Hsin and Pin-Yen first solved a mathematical problem individually (a cookie-sharing problem) and then produced Flip videos in which they adopted a YouTuber persona. Their videos were designed to mimic popular online content, including calls to action (e.g., "subscribe," "like," "comment"). After video production, they watched and discussed each other's videos.
- **Tutorial Video Tasks:** Madiha and Neha also began by solving a mathematical problem (a pizza parlor problem; Lubiensky, 2000) individually. They then produced tutorial videos explaining their strategies step-by-step while using a Flip whiteboard to illustrate ideas. After producing their videos, they watched each other's work twice and provided structured feedback using sentence stems ("I noticed…," "I wonder…," and "I would suggest…") (see Table 2). Finally, they gathered for a group discussion to talk through their comments.

Table 2. Video noticing form.

I noticed…	
I wonder…	
I would suggest...	

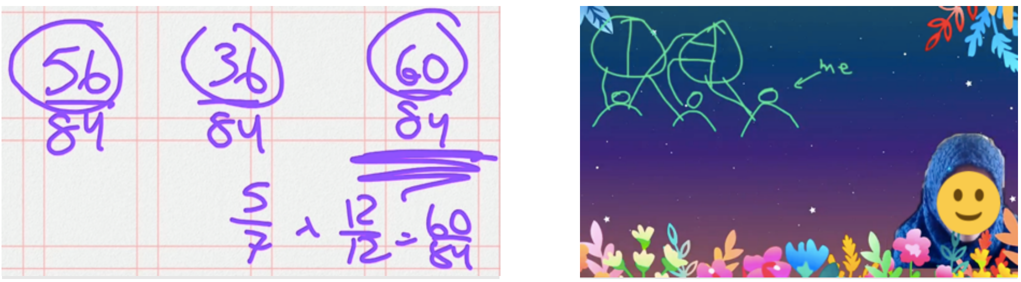
Data were collected from multiple sources, including video recordings of sessions and one-on-one interviews, typed responses from the video noticing forms, participants' written work, and researcher memos. The analysis consists of two parts. To examine participants' engagement in video production, I conducted a multimodal analysis of their videos. To analyze how participants engage in discussing their peer's mathematical ideas through the peer's video, I first organized their typed responses into a spreadsheet and then reviewed video recordings to triangulate findings. Levels of student mathematical engagement were subsequently identified using Webb et al.'s (2014) framework.

Findings and Discussion
Engagement in YouTuber-Style Video Tasks (RQ1)
Pin-Hsin and Pin-Yen adopted a YouTuber persona in their strategy videos. They spoke passionately, used natural gestures, and included typical YouTube expressions such as "make sure to give my video a big thumbs up" and "subscribe to my channel" (see Figure 1). Their enthusiastic style indicated comfort and creativity in using the digital medium. However, the emphasis on stylistic performance sometimes overshadowed the clarity of their mathematical explanations. For example, in Pin-

Yen's video, a significant portion of her narrative was dedicated to channel promotion and giveaways. During a post-viewing discussion, Pin-Hsin's feedback—"I think you can articulate it better"—highlighted that while the YouTuber style was engaging, it did not always promote sustained mathematical discussion. Their subsequent dialogue rarely focused on the mathematical content, and their engagement with each other's strategies remained at a low level.

Figure 1: Pin-Yen Pointing to the Subscription Button in Her Video

Engagement in Tutorial-Style Video Tasks (RQ2)
In contrast, Madiha and Neha's tutorial videos were more structured and focused on mathematical reasoning. They maintained a steady pace, kept the camera still, and used a Flip whiteboard to illustrate their step-by-step strategies (see Figure 2(a) & (b)). Their videos also included visual and audio enhancements; for instance, Neha used vibrant music and a decorative backdrop, while Madiha opted for a plain background and gentle music. Although in one case the music in Neha's video was too loud and interfered with her verbal explanation, both participants effectively used the provided sentence stems to articulate what they noticed about each other's strategies. For example, Neha's structured responses—"I noticed…," "I wonder…," and "I would suggest…"—helped her articulate both strengths and areas for improvement in her peer's approach (see Table 3).



(a) Madiha's drawing (b) Neha's writing

Figure 2: Snapshots of Neha's Video and Madiha's Video

Table 3. Neha's noticing comments

I noticed…	that she is using fractions in the more complicated way, and she is going fast (I understand this though, she had limited time)
I wonder…	why she always uses fractions with inequivalent denominators then changes them to common denominator fractions

I would suggest...	to try a different technique, like, using a less complicated way for maybe 5th or 4th graders?

During group discussions, Madiha and Neha engaged in sustained dialogue about their mathematical strategies. In one vignette, Neha questioned Madiha's consistent use of a technique to convert fractions with unlike denominators, prompting Madiha to explain her reasoning in detail while using the Zoom whiteboard to provide visual support (see Figure 3). Their dialogue, marked by questioning and elaboration, reflected medium- to high-level engagement as defined by Webb et al. (2014).

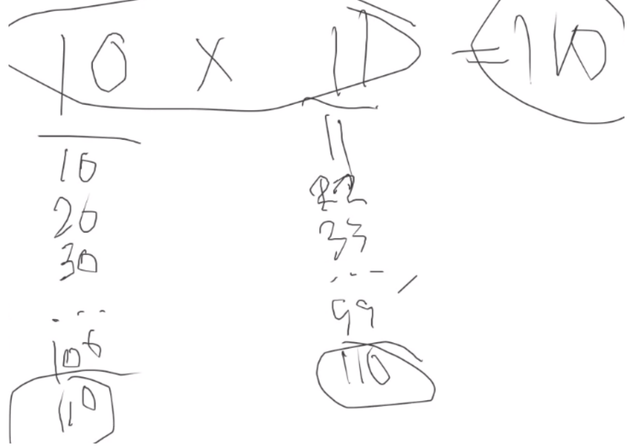


Figure 3: Madiha's Writing on Zoom Whiteboard

Comparative Engagement (RQ3)

The comparison between the two video tasks reveals distinct differences in how students engaged with both video production and their peers' mathematical ideas. The YouTuber-style tasks fostered an energetic and performative approach; however, this style appeared to divert Pin-Hsin and Pin-Yen's attention away from meaningfully engaging with each other's mathematical reasoning. In contrast, the tutorial-style tasks supported Madiha and Neha in producing focused, step-by-step explanations and sustaining mathematical discussions, resulting in deeper engagement. These findings suggest that while the YouTuber style may appeal to young learners, the tutorial approach more effectively supports meaningful mathematical engagement.

Conclusion and Implications

The findings of this study suggest several implications for designing video tasks in mathematics education. First, it is important to strike a balance between stylistic expression and clarity of mathematical content. Providing students with clear video production guidelines—such as limiting background music or emphasizing clear audio and visuals—may help prevent aesthetic elements from overshadowing mathematical ideas. Second, refining the sentence stems used in tutorial-style video tasks may promote a more inquiry-driven orientation, encouraging students to not only attend to specific features of a peer's strategy but also interpret the underlying reasoning. Finally, future research could employ comparative studies that contrast contexts with and without the designed video tasks to generate stronger evidence of their impact on students' mathematical engagement.

This study has limitations. The participants were upper elementary students who were familiar or acquainted with each other, had prior experience with video production, and felt comfortable sharing their mathematical ideas online. It remains unclear how students with different backgrounds, levels of familiarity, or digital literacy might engage with the proposed tasks. Additionally, the study did not examine how participants' understanding of fraction comparison developed over the course of the sessions. These areas warrant further investigation to better understand how to support children's mathematical learning through online video tasks.

Overall, this study explores how intentionally designed video tasks can be refined to promote mathematical engagement. By comparing YouTuber-style and tutorial-style video formats, it contributes to the growing body of research on student-generated mathematical videos and offers practical guidance for educators interested in integrating video production into mathematics instruction.

References

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation* (Vol. 39). Springer Science & Business Media.

Campbell, L. O., Heller, S., & Pulse, L. (2022). Student-created video: An active learning approach in online environments. *Interactive Learning Environments*, *30*(6), 1145-1154.

Chao, T., Adams Corral, M., Ozturk, A., Lin, H.-C., & Li, Y. (2021). Community math stories: Informal adult educators exploring mathematics identity through digital mathematics storytelling. In Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. M. (Eds.), *Proceedings of the 43rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Green, T. D., Besser, E. D., & Donovan, L. C. (2021). More than Amplifying Voice and Providing Choice: Educator Perceptions of Flipgrid Use in the Classroom. *TechTrends*, *65*(5), 785–795.

Henderson, M., Auld, G., Holkner, B., Russell, G., Seah, W. T., Fernando, A., & Romeo, G. (2010). *Students creating digital video in the primary classroom: Student autonomy, learning outcomes, and professional learning communities*. *24*(2), 9.

Hähkiöniemi, M., Hiltunen, J., Jokiranta, K., Kilpelä, J., Lehesvuori, S., & Nieminen, P. (2022). Students' dialogic and justifying moves during dialogic argumentation in mathematics and physics. *Learning, Culture and Social Interaction*, *33*, 100608. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2022.100608

Hicks, S. (2021). *Facilitating and Supporting Mathematical Discourse of Teacher Candidates Both Online and Face-to-Face with the Use of FlipGrid*. 1398–1401.

Kleftodimos, A., & Triantafillidou, A. (2022). The use of the Video Platform FlipGrid for Practicing Science Oral Communication. *TechTrends*.

Lubienski, S. T. (2000). Problem Solving as a Means toward Mathematics for All: An Exploratory Look through a Class Lens. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 454–482.

Mango, O. (2021). Flipgrid: Students' Perceptions of its Advantages and Disadvantages in the Language Classroom. *International Journal of Technology in Education and Science*, 277–287.

Oechsler, V., & Borba, M. C. (2020). Mathematical videos, social semiotics and the changing classroom. *ZDM*, 52(5), 989–1001.

Tyner, K. (1994). Video in the Classroom: A Tool for Reform. *Arts Education Policy Review*, *96*(1), 18–26.

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrou, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research*, *63*, 79–93.

Zhang, L., Jackson, H. A., Hunt, T. L., Carter, R. A., Yang, S., & Emerling, C. R. (2022). Maximizing Learning Management Systems to Support Mathematical Problem Solving in Online Learning. *TEACHING Exceptional Children*, *54*(3), 192–201.

AI 語言處理與情緒運算在數學學習行為測量上的應用

萬依萍[1] 賴郁儒[2] 李湘[3] 林原宏[4]

[1]國立政治大學語言學研究所教授 ipwan@mail2.nccu.tw

[2]國立政治大學語言學研究所 112555008@g.nccu.edu.tw

[3]國立政治大學語言學研究所 xianglee2947@gmail.com

[4]國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究將建議使用量化方式，用於評估與測量小學低年級生學習數學之解題能力，並整合先進之方法來探討如何利用情感偵測學童數學解題之困境。本研究透過行為影像從顏面識別及聲紋探測學童之學習認知與情緒感知，透過情感運算系統能進一步透過語言分析，顯現學童數學學習成果之狀態與潛力。從顏面識別影像能提取認知行為特徵，藉此進一步評估學童解題所遇到之困難。透過聲紋偵測與多模態之間的相互作用，本研究期望提供進一步情感運算之的演算與模型，為更深入理解數學語境下學童溝通之情感層面與基礎。

關鍵字：情感運算、數學教育、聲紋語音、多模態

Introduction

The rapid advancement of educational technology and pedagogical frameworks in Taiwan has opened new avenues for enhancing mathematics education. Recent research, drawing on insights from leading scholars, proposes a comprehensive approach that integrates technology, culturally responsive teaching, self-regulated learning, and teacher professional development. These strategies, often supported by technological tools or statistical modeling, have been shown to improve learning outcomes (e.g., Lin & Wu, 2018; Chiu et al., 2022; Cheng, 2022; Chin, 2023; Weng, 2023; Wang et al., 2024; Y. C. Lin, 2024; Y. H. Lin, 2024; Yang et al., 2024). Alongside these advancements, there is growing recognition of values as critical affective and non-cognitive components in education. Studies increasingly highlight the role of values in shaping human development, demonstrating their influence not only on cognitive processes but also on the broader learning experience in mathematics classrooms (e.g., Hannula, 2002; Pintrich, 2003; Seah, 2019; Chiu et al., 2022; Chiu & Seah, 2024; Wan & Yu, 2024). This paper introduces a quantitative measurement approach to assess students' problem-solving skills within evaluation and assessment frameworks. Utilizing advanced methodologies such as voice spectrogram analysis and speech communication metrics, the study explores the potential of affective computing in educational settings. A voice spectrogram, which visually represents the frequency spectrum of voice signals over time, illustrates how energy is distributed across different frequencies during speech or vocalization. This detailed visualization of vocal frequencies enables the analysis of speech patterns and emotional cues, providing deeper insights into students' cognitive and emotional states as they engage with mathematical learning.

Methodological approaches

Research by Cherian et al. (2024) examined the performance of various AI models across mathematical domains, revealing notable disparities between human and AI capabilities. Humans consistently outperform AI in geometry, demonstrating superior spatial reasoning skills. In number and algebra, AI models such as GPT-4 exhibit competitive abilities, though humans still maintain an edge. In logic-based tasks, the gap is even more pronounced, with humans vastly outperforming AI; no current model achieves accuracy beyond 35%. For image-text tasks, humans demonstrate superior performance, while GPT-4 shows some capability. However, in text-only tasks, GPT-4 surpasses human performance, highlighting its strength in text-based reasoning and language processing. These findings emphasize a significant gap between human reasoning and AI capabilities, particularly in areas requiring complex logic, visual reasoning, and problem-solving. Bridging this gap underscores the need to reinforce key problem-solving skills in mathematics education, which serve as essential foundations for cognitive development.

Therefore, it is essential to explore key aspects of geometry, number sense, logic, image-text, and text-only formats to assess young children's cognitive development and emotional engagement with mathematical problem-solving. Number sense fosters an understanding of digit values, enables representation in expanded and word forms, and enhances fluency in addition and subtraction through tools such as number lines. Proficiency in multi-digit calculations and multiplication strengthens numerical reasoning and pattern recognition, while division equips students with strategies for equal grouping and problem decomposition. Fractions support comparative reasoning and equivalence through visual models like area diagrams, and geometry bridges abstract mathematical concepts with real-world applications by examining shapes, perimeter, and area.

Emphasizing these interconnected problem-solving skills not only helps navigate challenges but also bridges the gap between human reasoning and AI capabilities in complex cognitive and computational tasks. In affective computing systems, key linguistic elements have been found to reveal emotional states and influence children's learning performance in mathematics. These elements include acoustic features such as F0 (pitch), jitter, and shimmer, as well as speech hesitations and pauses (Maclay & Osgood, 1959; Goldman-Eisler, 1961, 1968; Rochester, 1973; Levelt, 1983; Mahl, 1987; Shriberg, 1994; Clark & Tree, 2002). These features can be quantitatively measured to analyze human emotional responses during learning activities (e.g., Clark & Tree, 2002; Vasilescu et al., 2007). In English, filled pauses (e.g., uh, um) signal cognitive processing delays and play a critical role in understanding human engagement. Such speech disfluencies provide valuable insights into cognitive effort and emotional states during complex tasks. These pauses, which reflect delays in linguistic signal transmission, have been extensively studied for their connections to cognitive processing and speech production. Consequently, extracting these linguistic features can serve as a valuable tool for assessing students' emotional states during interview-based evaluations in mathematics classrooms. As the complexity of learning materials increases, the cognitive demands on students rise accordingly, and their linguistic performance reflects their perceptions and assessments of instructional methods in mathematics education.

Initial analyses of pilot studies

An ongoing study in mathematics classrooms in Taiwan is examining the integration of key mathematical elements to extract linguistic features for emotion recognition. Initial analysis reveals systematic patterns in this incorporation, highlighting measurable linguistic indicators that provide insights into students' emotional states while solving mathematical problems. These features include pitch (measured in Hertz, Hz), formants (Hz), energy (decibels, dB), timing (milliseconds, msec), and articulation (e.g., vowel pronunciation) at the word level. Data from pilot participants' interviews further illustrate how these linguistic markers reflect children's emotional engagement and cognitive processing during problem-solving tasks.

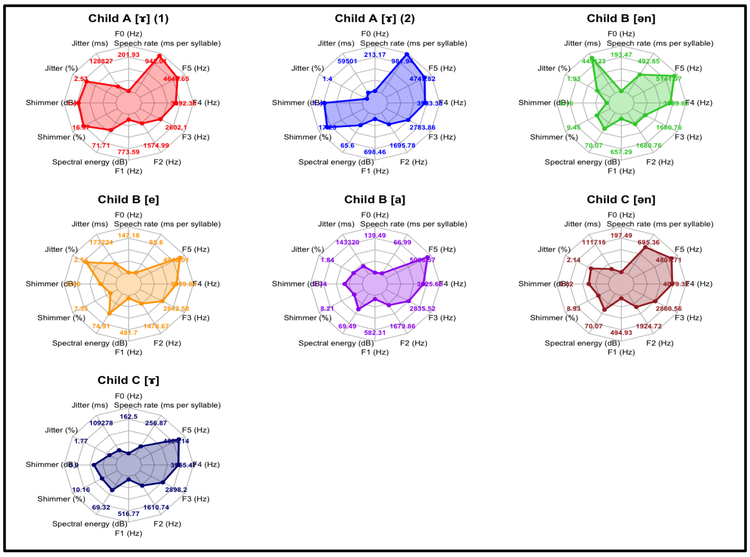


Figure 1: Radar charts in children's speech with linguistic features

The radar charts provide a comprehensive analysis of speech communication by measuring various acoustic parameters. The fundamental frequency (F0), expressed in Hertz (Hz), represents pitch and serves as a key indicator of vocal tone. Jitter, measured in milliseconds (ms) or as a percentage, captures pitch variability and offers insights into voice stability, while shimmer, recorded in decibels (dB) or as a percentage, reflects fluctuations in amplitude, indicating vocal effort and quality. Spectral energy, also measured in dB, describes the distribution of energy across frequencies, providing information about loudness and emphasis in speech. Formants, specifically F1 through F5 in Hertz, highlight resonant frequencies related to vowel articulation and overall speech clarity. Speech rate, typically quantified in milliseconds per syllable, reveals the pacing of speech and provides insight into cognitive effort during communication. Additionally, the analysis includes hesitation markers and filled pauses, which are distinct in Mandarin, such as [ɤ], [ən], [e], and [a]. The data for each child is analyzed in relation to these acoustic features, offering a detailed perspective on their speech patterns and emotional dynamics.

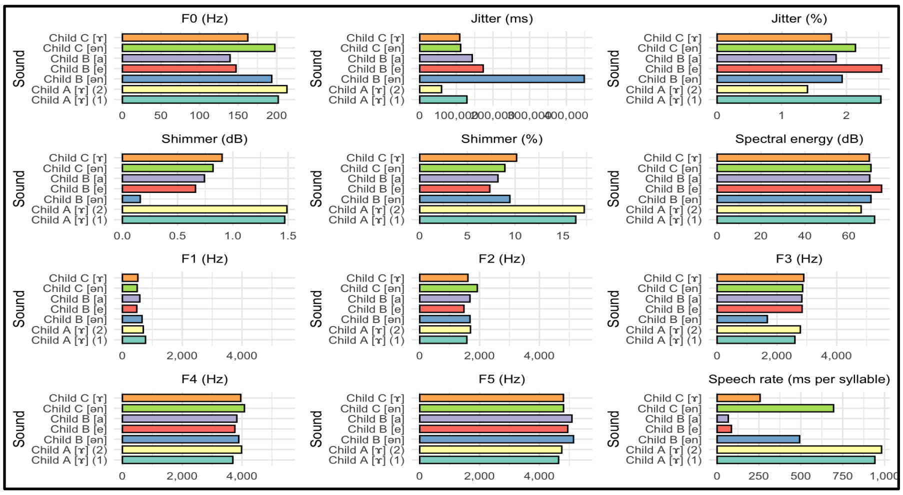


Figure 2: Components of acoustic parameters in mathematics context

The radar charts visually represent the acoustic analysis of speech data from three children (Child A, Child B, and Child C), focusing on their use of specific speech elements. Each chart captures the acoustic properties of particular sounds or pauses, highlighting variations in speech characteristics across individuals and utterances. Child A exhibits higher levels of jitter, shimmer, and spectral energy, along with a slower speech rate, suggesting emotional instability and frustration. In contrast, Child B demonstrates moderate acoustic parameters, indicative of calmness and confidence in speech delivery. Child C, however, displays elevated jitter and shimmer with a slower speech rate, signaling hesitation and potential cognitive processing difficulties. These radar charts offer an intuitive and effective means of visualizing emotional states in human-computer interactions. Within the scope of this study, they facilitate the evaluation and assessment of emotional responses in key mathematical contexts, including geometry, number sense, logic, image-text reasoning, and text-only reasoning.

Concluding remarks

Gaining a deeper understanding of how hesitations and speech elements naturally emerge in emotional or affective contexts within mathematics classrooms can provide valuable insights for developing emotionally intelligent systems. In affective computing, recognizing the emotional cues embedded in hesitations is essential for designing responsive and adaptive human-machine interactions. Integrating knowledge about the affective dimensions of speech communication is expected to enhance the development of systems that can dynamically adjust to students' emotional states while learning mathematics. By examining the connections between emotions, speech elements and facial expressions, researchers in affective computing can refine algorithms, models, and technologies to better interpret and respond to the emotional nuances of human communication and speech dynamics. Such advancements can contribute to the creation of more empathetic and context-aware systems, improving user experience across applications such as virtual assistants, educational software, and human-computer interfaces. However, the findings in this study may be influenced by the relatively small dataset, warranting further research to validate these observations.

References

Cheng C.-M. (2022). Research and Development of Mathematical Financial Literacy Assessment Tools and Build Norm for Fifth to Eighth Grade Students. Nation Science and Technology Council, Taiwan.

Cherian, A., Peng, K.- C., Lohit, S., Matthiesen, J., Smith, K., Tenenbaum, J. B. (2024). Evaluating Large Vision-and-Language Models on Children's Mathematical Olympiads. arXiv:2406.15736. https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.15736

Chin E.-T. (2023). The Instructional Design of Integrating Creative Problem Solving with Mathematical Writing into Senior High School Mathematics and Its Influence on High Achieving Students' Mathematical Literacy. National Science and Technology Council, Taiwan.

Chiu, M.-S., Lin, F.-L., Yang, K.-L., Hasumi, T., Wu, T.-J., & Lin, P.-S. (2022). The interplay of affect and cognition in the mathematics grounding activity: Forming an affective teaching model. Eurasia Journal of Mathematics, *Science and Technology Education, 18(2),* em2187. https://doi.org/10.29333/ejmste/12579.

Chiu, M.-S., & Seah, W. T., (2024) Values and valuing pedagogies in affect-focused mathematics teaching, *Social Sciences and Humanities Open*, 10, 101050.

Clark, H. H., & Tree, J. E. F. (2002). Using uh and um in spontaneous speaking. *Cognition, 84(1),* 73-111.

Goldman-Eisler, F. (1961). The significance of changes in the rate of articulation. *Language and Speech, 4(3),* 171-174.

Goldman-Eisler, F. (1968). Psycholinguistics: Experiments in Spontaneous Speech (New York).

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics, 49(1)*, 25-46.

Levelt, W. J. (1983). Monitoring and self-repair in speech. *Cognition, 14(1),* 41-104.

Lin, Y.-C. (2022-2024). Investigating Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Noticing through Eye-Tracking: Curricular Noticing, Noticing of 360-Degree Videos and In-The-Moment Noticing. National Science and Technology Council, Taiwan.

Lin, Y. -H. & Wu, S. P. (2018) Clustering Assessment on Statistical Literacy Performance of Primary School Students. Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, National Taiwan Normal

University, Taipei.

Lin, Y.-H. (2024). Investigation on Effective Instruction of Questioning and Feedback for Students' Mathematical Cognition, Affect and Conation: Longitudinal Study of Professional Learning Community. National Science and Technology Council, Taiwan.

Maclay, H., & Osgood, C. E. (1959). Hesitation phenomena in spontaneous English speech. *Word, 15(1),* 19-44.

Mahl, G. F. (1987). Everyday disturbances of speech. *In Language in psychotherapy: Strategies of discovery* (pp. 213-269). Boston, MA: Springer US.

Pintrich, P. R. (2003). A motivational science perspective on the role of student motivation in learning and teaching contexts. *Journal of Educational Psychology, 95,* 667-686.

Rochester, S. R. (1973). The significance of pauses in spontaneous speech. *Journal of Psycholinguistic Research, 2,* 51-81.

Seah, W. T. (2019). Values in mathematics education: *Its conative nature, and how it can be developed. Research in Mathematical Education, 22(2),* 99-121.

Shriberg, E. E. (1994). Preliminaries to a theory of speech disfluencies (Doctoral dissertation, University of California, Berkeley).

Vasilescu, I., Nemoto, R., & Adda-Decker, M. (2007). Vocalic hesitations vs vocalic systems: a cross-language comparison. Proceedings of 16th International Congress of Phonetic Sciences. University of Saarland, Germany.

Wan, I-P. & Yu, P. (2024). Exploring disfluency patterns in EMI math education. Paper presented at the Sixteenth International Conference on Technology and Mathematics Education and Workshop of Mathematics Teaching, National Taichung University of Education, Taichung, Taiwan.

Wang, T.-Y., & Yang, K.-L., & Lin, F.-L. (2024). Exploring the feasibility of co-construction among mathematics teachers and teacher educators: analysis of discourse in a product-based teacher professional development program. *Mathematics Teacher Education and Development, 26(1),* article3.-1136.

Weng, T.-S. (2023). Exploring the Learning Outcomes of Metaverse Technology-Assisted Business Administration Statistics. National Science and Technology Council, Taiwan.

Yang, K. L., Krawitz, J., Schukajlow, S., Yang, C. C., & Chang, Y. P. (2024). German and Taiwanese secondary students' mathematical modelling task value profiles and their relation to mathematical knowledge and modelling performance. *European Journal of Psychology of Education,* 1-21.

AI-Based Methodologies in Language Processing and Affective Computing for Analyzing Mathematical Learning Behaviors

I-Ping Wan[1] Lai, Yu-Ju[2] Li Xiang[3]
[1]Graduate Institute of Linguistics, National Chengchi University
[2]Graduate Institute of Linguistics, National Chengchi University
[3]Graduate Institute of Linguistics, National Chengchi University

Abstract

This paper presents quantitative methodologies for assessing lower-grade students' problem-solving abilities within evaluation and assessment processes, integrating advanced methodologies to explore the impact of affective computing and facial expressions in mathematics education. By focusing on interconnected problem-solving skills, the study investigates how to bridge the gap between human reasoning and AI-driven approaches in complex cognitive tasks. Affective computing systems, utilizing linguistic analysis, have shown promise in identifying emotional states that influence children's mathematical learning outcomes. Extracting key linguistic features from interview tasks in mathematics classrooms enables the evaluation of students' emotional and cognitive states as they engage with increasingly complex material. By examining the interplay of emotions, complex facial expressions and speech dynamics, this research enhances affective computing algorithms and models, paving the way for a deeper understanding of the emotional dimensions of human communication in mathematical contexts.

Keywords: Affective Computing, NLP-driven methodologies, Mathematics Education, Multimodality

差異化教學中的彈性分組策略對國小六年級學生數學學習成效之影響

洪詠馨 [1]　陳建誠 [2]
[1]新北市樹林區育林國民小學 hsin870527@gmail.com
[2]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 jiancheng@mail.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在探討差異化教學中的彈性分組策略對於六年級學生對數學學習成效的影響。差異化教學強調根據學生的學習準備度、興趣與學習風格設計多樣化的教學內容與活動，以提升全體學生的學習表現；彈性分組則透過動態調整小組組成，促進同儕合作與資源共享，以滿足不同程度學生的學習需求。本研究以準實驗研究法進行研究，設計具體的教學活動，並結合多元評量方式，評估彈性分組策略在「角柱與圓柱」單元（本單元同時包含表面積與體積的計算）中的學習成效與學習態度影響。

本研究對象為研究者任教學校的六年級學生，採用不等組前後測設計（Nonequivalent Control Group Pretest-Posttest Design)，選取兩個班級進行實驗。實驗組採用彈性分組策略，對照組則維持原教學模式。研究工具包括數學學習成效測驗、學習態度與學習動機問卷，並透過 t 檢定與共變數分析（ANCOVA）進行統計檢定，以評估教學策略的效果。

關鍵字：差異化教學、彈性分組、數學學習成效

壹、緒論

一、研究動機與背景

本研究旨在探討差異化教學中的彈性分組策略對國小六年級學生在數學學習上的影響。學生在數學學習中普遍存在能力差異與學習風格的不同，特別是在「角柱與圓柱」單元中，由於該單元涉及空間概念、表面積與體積的計算，不僅需具備良好的運算能力，亦需具備空間想像與圖形理解力，常使基礎能力不足或缺乏學習動機的學生面臨挑戰，影響其學習成效與學習興趣。

研究者任教於新北市郊區一所中小型國小六年級，觀察到學生在學習資源與動機上的落差導致學習成效兩極。過去曾採異質或同質分組實施差異化教學，雖部分改善學習落差，卻難以因應學生學習歷程中的即時變化。為此，本研究引入彈性分組策略，根據學生學習進展與需求動態調整小組配置，使學生獲得適當的挑戰與支持。透過異質分組促進同儕互助，透過同質分組提供適性挑戰，強化高、低成就學生的學習動能。

二、研究目的

「角柱與圓柱」單元需運算能力與空間推理，對基礎較弱學生常造成理解困難，影響學習興趣與自信。本研究導入差異化教學中的彈性分組策略，藉由動態調整小組組成，促進同儕合作，提升學生數學學習成效。

本研究採用準實驗研究法，透過比較實驗組（採用彈性分組）與對照組（其他教學模式）的學習成果，分析此教學策略對學生學習的影響，以提供實證依據，進一步優化國小高年級數學教學方式。本研究的具體目如下：

(一) 探討差異化教學中的彈性分組策略對國小六年級學生數學學習成效的影響。

(二) 分析不同數學成就水平的學生在彈性分組策略下的學習成效變化。

(三) 探討彈性分組策略對學生學習態度與學習動機的影響。

貳、文獻探討

第一節 差異化教學的理論依據與相關研究

差異化教學強調依據學生的學習準備度、興趣與風格，調整內容、過程與成果，以達成更適性的教學。Tomlinson（2001）指出，差異化教學的三要素包括課程內容、學習方式與成果展現，應與學生特性相符。建構主義支持學生在主動學習中建構知識（Subban, 2006），研究亦顯示差異化教學有助提升學生的動機與成就。不過教師在實踐上需掌握學生需求並調整策略，否則可能導致教學資源分配不均與學生挫折。

第二節 彈性分組的策略與成效分析

彈性分組是一種根據學生需求、興趣或風格，動態調整小組的策略。其目標是打破固定分組，促進更有效的合作與學習。策略包括依學習準備度、興趣與風格進行分組，並配合形成性評量進行適時調整（The IRIS Center, n.d.）。研究指出彈性分組可提升數學成就與社交互動（Benders & Craft, 2016），但 McKeen（2019）亦指出效果受多重變因影響，需妥善設計與執行。

第三節 合作學習與分組策略的結合原理

Vygotsky 的 ZPD 理論指出學生在有同儕或成人協助下能達成更多學習。合作學習正可提供此發展空間。透過同儕間的支持，學生能於 ZPD 內挑戰更高層次任務並建構認知能力。教師若能透過彈性分組，使學生分配於能激發潛能的學習組合中，將有助於個別發展與整體學習效益的提升。

第四節 數學學習特性與常見困難

數學具有抽象與邏輯性特質，需累積性知識與良好的問題解決能力。幾何單元如角柱與圓柱涉及空間想像與符號轉換，對學生而言常見困難包括：缺乏空間概念、抽象概念難以理解、符號與圖形難以連結等。造成困難的成因包含認知差異、學習策略不足與學習動機低落。教學策略建議包括：多感官教學、分層任務、合作學習與即時補救，皆有助於提升學生的學習成效與自信。

第五節 差異化教學及彈性分組對學習成效與動機的影響

差異化教學與彈性分組的結合能因應學生差異，促進學習成效與動機。研究顯示彈性小組能提升學生成就（Benders & Craft, 2016），並有助於教師掌握學生需求（McKeen, 2019）。此外，差異化教學可提高學生興趣與自信（Guay et al., 2017），Pozas 等人也指出其與動機提升有關。不過實施仍需考量教師時間與課程設計能力，才能發揮最佳效益。

參、研究方法

本研究採用準實驗研究法(Quasi-Experimental Research），透過不等組前後測設計（Nonequivalent Control Group Pretest-Posttest Design），比較彈性分組策略與其他教學在「角柱與圓柱」單元教學上的影響，以驗證其對學生數學學習成效與學習態度的影響。

第一節 研究對象及研究背景

本研究於新北市某國小六年級數學課堂進行，採準實驗研究法，比較彈性分組策略與傳統固定異質分組合作學習對學生數學學習成效的影響。研究對象為兩班學生，各 21 人，分別作為實驗組與對照組。該校地處郊區，學生家庭背景差異大，部分為經濟弱勢或文化刺激不足家庭，學習資源與支持有限，學生學習表現分化顯著。研究單元為「角柱與圓柱」，涉及表面積與體積的計算，對基礎較弱學生為一大挑戰。研究者曾實施異質與程度分組，效果有限，因此本研究導入彈性分組策略，以因應學生不同需求。研究者身兼教師、教學設計者與分析者，負責教學實施與資料分析，期望透過實證結果優化數學教學策略。

第二節 研究工具

本研究結合量化與質性資料蒐集工具，包含前後測成效測驗、學習態度與動機問卷、教師觀察紀錄、學生訪談及課堂錄影。前後測評估學生在「角柱與圓柱」單元的基本概念、應用與進階題表現，並使用 ANCOVA 與標準化學習增益分析成果。問卷基於 Deci 與 Ryan 的動機理論，涵蓋學習興趣、自信、目標導向、合作與學習投入五向度。教師觀察記錄分析學生在課堂中的互動與情緒反應，學生訪談補充分組學習經驗與感受，課堂錄影協助記錄真實教學與學習互動，提供多元資料交叉驗證。

第三節 教學實施與分組設計

實驗組採用彈性分組策略，依據學生學習進展、學習風格與課堂表現調整小組成員，組合包含異質與同質分組。異質分組促進高低成就學生交流，提升學習信心與理解；同質分組則提供更有挑戰性的任務給高成就學生，深化概念理解。對照組維持固定異質分組，進行傳統合作學習。兩組皆使用相同教材與教學流程，由同校教師授課。分組策略搭配彈性教學內容調整，包含分層講義、多元評量與實作活動，教師根

據教學評量與課堂回饋隨時調整教學方式與小組配置。

第四節 研究限制

本研究雖設計嚴謹，但仍面臨樣本規模小、研究時間短等限制，外部效度有限。雖兩班條件相似，仍可能受班級文化、學生組成等影響。測驗與問卷為主要資料來源，可能受到社會期望與主觀回應影響。觀察與訪談亦存在研究者偏差可能性。彈性分組需學生適應，初期變化與動盪可能干擾學習表現。研究時間僅涵蓋單一單元，無法探討策略的長期影響。此外，學生課後學習資源、家庭支持、個人情緒等外在變因也可能干擾學習成效的衡量與歸因。

第五節 研究貢獻與教育意涵

本研究透過實證方式，分析彈性分組策略在國小六年級數學教學中之實施成效。研究結果可作為教師進行差異化教學與彈性教學規劃之參考，強化教學設計的回應性與適性。同時，本研究也揭示分組教學在實務上的挑戰與限制，有助於教學現場教師思考如何在真實課室中兼顧學生差異、教學節奏與學習效能，達成包容性教學目標。未來亦可擴大樣本與教學時間，進行更長期與多單元的追蹤研究，以探討彈性分組策略的延續性與整體學習歷程的影響。

參考文獻

中文文獻：

黃瓊慧（2013）。*以彈性分組合作學習提升國小學童數學解題能力之研究*（碩士論文）。國立屏東教育大學教育行政研究所。

張淑美（2014）。*差異化教學策略應用於國小五年級數學教學之行動研究*（碩士論文）。國立臺北教育大學課程與教學研究所。

教育部（2014）。*十二年國民基本教育課程綱要總綱*。教育部。

林坤煌（2011）。*教育研究法*（四版）。五南圖書出版。

英文文獻：

Benders, D., & Craft, T. (2016). The effect of flexible small groups on math achievement in first grade. *Networks: An Online Journal for Teacher Research*, 18(1), 1–8.

Guay, F., Chanal, J., Ratelle, C. F., Marsh, H. W., Larose, S., & Boivin, M. (2017). Intrinsic, identified, and controlled types of motivation for school subjects in young elementary school children. *British Journal of Educational Psychology*, 87(2), 224–240.

McKeen, L. (2019). *A study of differentiated learning and flexible grouping strategies* (Master’s thesis, Northwestern College).

Mursky, C. (2011). *Flexible grouping*. Wisconsin Department of Public Instruction.

Pozas, M., Letzel, V., & Schneider, C. (2020). Teachers and differentiated instruction: Exploring differentiation practices to address student diversity. *Journal of Research in Special Educational Needs*, 20(3), 217–230.

Subban, P. (2006). Differentiated instruction: A research basis. *International Education Journal*, 7(7), 935–947.

The IRIS Center. (n.d.). *Page 1: Defining differentiated instruction*. Vanderbilt University.

Tomlinson, C. A. (2001). *How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms* (2nd ed.). ASCD.

The Impact of Flexible Grouping Strategies in Differentiated Instruction on the Mathematics Learning Effectiveness of Sixth-Grade Elementary School Students

Ying-Hsin Hung[1], Chien-Cheng Chen[2]
[1]Yulin Elementary School, Shulin District, New Taipei City, Taiwan
\[2]Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education, Taiwan

Abstract

This study aims to explore the impact of flexible grouping strategies in differentiated instruction on the mathematics learning effectiveness of sixth-grade students. Differentiated instruction emphasizes the design of diverse instructional content and activities based on students' readiness, interests, and learning styles to improve overall student achievement. Flexible grouping dynamically adjusts group composition to foster peer collaboration and resource sharing, addressing the diverse learning needs of students at varying achievement levels.

This research adopted a quasi-experimental design, incorporating concrete instructional activities and multiple forms of assessment to evaluate the effectiveness of flexible grouping in the unit "Prisms and Cylinders," which includes the calculation of surface area and volume.

The participants were sixth-grade students from the researcher's school. A nonequivalent control group pretest-posttest design was employed, with two intact classes selected. The experimental group received instruction using flexible grouping strategies, while the control group followed the original instructional approach. Research instruments included a mathematics achievement test and a questionnaire on learning attitude and motivation. Data were analyzed using t-tests and analysis of covariance (ANCOVA) to assess the effects of the instructional intervention.

The anticipated outcomes of the study include:

(1) Verifying whether flexible grouping strategies significantly enhance students' mathematics achievement.

(2) Analyzing the learning performance changes of students at different achievement levels after instruction with flexible grouping.

(3) Investigating whether flexible grouping improves students' learning motivation and attitudes.

This study aims to provide empirical evidence for mathematics instruction, contributing to the optimization of sixth-grade geometry teaching strategies and promoting students' understanding and application of geometric concepts.

Keywords：
Differentiated instruction , Flexible grouping , Mathematics learning effectiveness

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(2) 數學課程內容與數學素養

研討主題

「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系

台灣數學教育學會

國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

六年級個案學生在比與比值及其相關單元的解題信念

石雅竹

國立清華大學數理教育研究所 ycyc00813@gmail.com

摘要

本研究是採用個案研究法，以研究者任教的國小三名六年級學生為個案研究對象，探究不同程度學生在比與比值及其相關單元的解題信念。本研究透過問卷、訪談等資料進行分析。研究發現高成就學生在解題時，偏好使用計算時間較少的算法，不會拘泥於課本在該單元所教的公式，能靈活運用先前所學過的概念，並與題目作連結，在解題上較具有彈性但對於估算類型的答案，接受度較低；中高成就學生在解題時，偏好使用課本在該單元所教的公式來作答，解題策略上較僵化，喜歡用一個方法來解所有題目，但面對不同算法時，會嘗試去理解每一個算式的意義，只是不見得能看懂，因此學生雖然能熟悉每一單元所要教的基本公式解，但連結不同單元間的概念的能力較弱；低成就學生在解題時，一樣偏好使用課本在該單元所教的公式來作答，因為學生認為這是一定可以算出正確答案的方法。面對不同算法，雖然接受度是最廣的，但不太會去做深入的思考，因此不見得是真正的理解，考試時也可能完全不會想到這樣的算法，他的認同可能只是來自於覺得老師不會教授錯誤的方法。

關鍵字: 比與比值、個案研究、解題信念

壹、緒論

一、研究動機與背景

臺灣的國民教育自 1960 年代起經歷多次改革，目前正在實施的十二年國教不僅希望學生要有數學素養，也提倡教師的數學教學素養，然而在教學現場會發現，課堂上仍多是教師直接與學生教授數學知識，因此教師對於數學觀念的解釋、觀點，以及教師的數學教學信念將直接的影響學生的概念形成，因此國內外皆有許多針對教師教學信念的研究與探討，然而學生的想法也並非總是一致，根據 Schoenfeld(1983)的研究，將學生的解題信念分為五類:1. 數學的解題性質 2. 解題過程的時間限制 3. 解題策略的使用 4. 數學能力的天賦觀 5. 數學知識的來源，由此可知，學生的解題信念受許多因素影響，教師在課堂上統一的解釋不見得適用於所有學生，然而國內尚未有太多針對學生解題信念的研究，因此本研究希望能了解學生在解題時的信念，以期更能針對學生的問題進行教學。

比與比值不僅在高年級數學中屬重點單元，更是與生活息息相關，例如:商品單價、兌換商品、濃度、速率、比例尺等，皆屬於比與比值的應用。比與比值在數學教材中，不僅承接學生先前學過的倍數、等值分數、擴分、約分等概念，更會連接到國中的的正比、反比、連比的概念，然而學生經常在比與比值

的概念上一知半解，造成學習的困難。因此本研究選定高年級中比與比值及其相關單元的題目，藉以了解不同程度學生在解題上的信念。

二、研究目的

本研究的目的希望透過探討不同程度學生對於比與比值相關單元題目的解題信念，利用二階段評量的方式了解學生在學習及解題上的偏好及困難點，以期未來能以更貼近學生想法的解題方法進行教學。

貳、文獻探討

一、比的意義及類型

比是用來描述兩個量 X 與 Y 存在有某一種特定倍數關係的一種表示法；或是並置的兩量具有對應關係的紀錄。所以，要用比來描述兩量的關係時，兩量必須存在有某種對應關係，兩數量的比才有意義(林碧珍, 2010)。

Lamon 將比的情境問題依其語意結構分為下列四類:良好合成的量數(well-chuncked measures)、部分−部分−整體(part-part-whole)、關聯的集合(associated sets)、放大與縮小(stretch and shrinker) (Lamon, 1993)。以下整理 Lamon 對此四類的說明並以康軒六上數學課本中的題目作為舉例。

表 1 不同種類比的情境問題的說明與舉例

語意結構	說明	舉例
良好合成的量數	兩個量之間的關係所形成的第三個量本身是一個眾所周知的概念。	妙妙全家到日本東京旅遊，飛機飛行 2100 公里，共花了 3 小時，飛機平均每 1 小時飛行多少公里?
部分−部分−整體	某個整體中的單一子集是由其所包含的兩個或更多的子集來表示。	全校男、女生人數的比是 3:2，女生有 160 人，男生有幾人?
關聯的集合	兩個元素之間的關係是未知或不明確的，除非在情境問題中，對這兩個元素的關係進行定義。	遊戲區可以用 2 張點券換 3 枝飛鏢，妮妮有 10 張點券，可以換幾枝飛鏢?
放大與縮小	兩個量之間存在著維持比例的一對一連續對應關係時，這種情形即為放大或縮小。	羽彤到東京旅遊，買了晴空塔模型當伴手禮，模型的比例尺是 1:2400，高是 26.5 公分，它的實際高度大約是多少公尺?

由此可知，比的概念不僅存在比與比值的單元中，在速率、比例尺等單元中，亦是用到比的概念來解題。

二、學生解題信念的相關研究

Schoenfeld 認為解題信念是一組穩定且長期影響個體數學學習與解題行為

的信念系統，包含對數學解題的本質、數學能力的來源、解題過程的時間與努力、有效解題策略的使用、數學知識的來源的認知與態度(Schoenfeld, 1983)，這些信念將影響學生是否能夠有效的應用解題策略、是否願意嘗試不同方法，甚至影響學生面對困難時的態度。Schoenfeld 的研究結果顯示：信念會影響解題行為，認為「數學是背誦公式」的學生，不會去推理或證明。控制行為是關鍵，能監控自己進度，及時調整策略的學生，不會執著於無效的方法。教學應關注信念轉變，老師需要幫助學生建立對數學的正確信念，使他們能夠靈活運用知識來解決問題，單純的教授數學概念是不夠的。

除 Schoenfeld 外，國外亦有許多學者對學生的解題信念做出定義及研究，例如：Lester 等人認為數學解題信念會影響學生如何處理問題、調整策略以及控制其解題歷程，若學生具有「數學是理解性的」這種信念，他們更可能在解題時進行推理與調整策略(Lester et al., 1989)。McLeod 將信念(beliefs)、情感(affect)與態度(attitudes)做區分，強調數學信念與情感的交互作用，認為負面情感可能強化消極的數學信念(McLeod, 1992)。Goldin 認為數學學習與解題信念是一種「認知—情感系統」，包含個體對數學與解題的期望、情感反應以及行為模式(Goldin, 2002)。Op't Eynde 等人則提出「數學信念系統」，強調學生的數學信念涉及對數學的信念、對自己數學能力的信念、對數學課堂環境的信念三個層面(Op't Eynde et al., 2002)。無論對解題信念的主要看法為何，這些研究都強調了信念將會影響學生的數學學習、動機與解題行為。

三、二階段評量

傳統紙筆測驗的題型中，多為選擇題與是非題，這兩類題型能快速評量學生是否能選出正確答案，但無法看出學生答題時背後的想法，即使學生答對，也有可能只是猜對的，這是這兩類題型最大的缺點，因此 Treagust(1988)提出了二階段評量的概念。

二階段評量的目的是要偵測出學生的學習困難、先存概念、另有概念、迷思概念等，作為改進學習效果或補救教學的依據。二階段評量試題包含兩個階段：第一階段為單選題，學生需根據提供的情境脈絡選擇最合適的答案，以評估其對「現象的敘述性知識」的理解。第二階段則進一步探究學生的「解釋性知識或心智模式」，讓學童從四個選項中選擇最能解釋第一階段答案的理由。透過這種方式，學生能反思自己的選擇，讓評量不僅檢測知識掌握程度，也深入了解其解題思維與概念理解。若兩階段皆以選擇題形式呈現，稱為封閉式二階段評量；若第一階段以選擇題呈現，第二階段選用開放式的作答方式，則稱為開放式二階段評量(朱容嫺, 2022)。

參、研究方法

一、研究工具

本研究根據康軒版六上數學課本內容，設計六道數學問題，第一、二題出自「比與比值」單元，第三、四題出自「認識速率」單元，第五、六題出自

「放大圖、縮圖與比例尺」單元。每題皆有四種算法，算法一是「公式解」，依據該單元主要教學的算法作為解題策略；算法二是「數學推理」，以倍數關係等方式推論出答案；算法三是「估算」，不精確算出答案，僅以簡單的估算推論可能的答案；算法四是「無解」，學生可能因無法理解題目，或認為條件不足等因素而認為該題無法計算。每一題的每一個算法皆會請學生勾選是否同意這樣的做法，並寫下同意或不同意的原因，最後統計學生的作答情形，認同為 1，不認同為 0，每一道題加總後平均，計算出學生對每一種算法的認同度，希望藉此了解學生在面對比與比值相關問題時是的解題偏好情形。以下舉題目中的第一題作為說明。

第一題是「比與比值」單元的題目，算法一是依據課本教法，用□表示未知數，並列出比的算式，最後算出答案。接著請學生勾選是否同意這樣的算法，並寫下原因。

第一題:姐姐想製作 25 個綠豆糕，要準備多少公克的細砂糖?

綠豆糕(10個)

綠豆仁	150g	鹽	$\frac{1}{8}$茶匙
水	300g	麥芽糖	30g
細砂糖	60g	無鹽奶油	30g

算法一:

10:60=25:□，25÷10=$\frac{25}{10}$，□=60×$\frac{25}{10}$=150，要準備 150 公克。

□同意 □不同意

原因:

圖 1 公式解

算法二是利用學生之前學過的倍數關係來推論解題，而不列出比的算式。首先將 25 個綠豆糕看成 20 個綠豆糕加 5 個綠豆糕，題目中做 10 個綠豆糕需要 60 公克的細砂糖，學生可推出做 20 個綠豆糕需要 120 公克的細砂糖，而做 5 個綠豆糕只要 30 公克的細砂糖，最後再將兩者的細砂糖重量相加即可得到答案。接著請學生勾選是否同意這樣的算法，並寫下原因。

算法二:

25 可分成 20+5，做 20 個需要 60×2=120 公克，5 是 10 的一半，所以需要 60÷2=30 公克，120+30=150，要準備 150 公克。

□同意 □不同意

原因:

圖 2 數學推理

算法三是利用估算的方式，因為 25 介在 10 的 2 倍跟 3 倍之間，因此用的砂糖量也會介在 60 的 2 倍跟 3 倍之間，也就是答案會介在 120 公克到 180 公克之間，但無法知道精確的答案。接著請學生勾選是否同意這樣的算法，並寫下原因。

算法三:
25 是 10 的兩倍多一點，不到三倍，所以需要的細砂糖會在 60×2 跟 60×3 之間，大約要準備 120 到 180 公克之間的細砂糖。

□同意 □不同意
原因:

圖 3 估算

算法四是無解，此題因為 25 不是 10 的整數倍，無法算出需要準備的細砂糖重量，故答案無法得知。

算法四:
25 不是 10 的倍數，所以無法算出需要準備多少公克的細砂糖。

□同意 □不同意
原因:

圖 4 無解

二、研究對象

本研究的研究對象為新竹市某國小六年級同一班的三位學生。學校鄰近兩所大學與科學園區，學生讀書風氣良好，家長社經地位普遍較高。學力測驗中，該校學生在數學各方面平均表現分數皆高於市平均分數。學校普通班總班級數共八十班，其中六年級有十五班。三位個案學生的整體數學成績表現大約分別落在班上 15%、30%、70%的區間，本研究以此為依據將學生分為高成就學生 A、中高成就學生 B、低成就學生 C。

高成就學生 A 邏輯推理與問題解決能力佳，對數學概念的理解快速，解題時能靈活運用新舊知識，舉一反三並能清楚解釋自己的解題過程，與同學或老師討論不同的解法。中高成就學生 B 依循學校進度學習，學習態度積極，基本運算能力佳，但對於較抽象的數學概念理解上較困難，需要經過充分練習才能精熟，有時不易理解同一題的多種不同算法。低成就學生 C 有學習意願，但理解速度較慢，小範圍的基本概念經反覆練習可精熟，大範圍時則無法靈活運用不同數學概念，且基本運算容易出錯，文字題題幹較長時也容易有題意理解的困難。

三、研究流程

本研究利用學生在校的早自修時間，請學生先利用四十分鐘的時間完成測驗，開始前向學生說明每一題共有四種算法，不須重新計算答案是否正確，只須看是否認同它的作法，無論是否認同都要勾選並寫下原因；過程中則讓學生自由發揮，不干涉學生的作答；學生全部作答完畢後再利用午休時間分別針對三位學生進行訪談，深入了解學生對於各種算法的想法，以釐清其解題信念。

訪談過程為半結構式訪談，以研究者的預設問題出發，接著再根據學生的回答產生延伸問題，深入探究學生的想法。訪談問題舉例如下:

問題一:請問你認為這個做法對的原因是什麼?

問題二:請問你不認同這個做法的原因是什麼?

肆、研究結果

一、學生對各種算法的認同情況

由表 2 可以看出，學生們對公式解(M=100%)及數學推理(M=83%)的的認同度都很高，估算的的認同度較低(M=39%)，無解則是完全不認同(M=0%)。

表 2 各題學生的認同情況

	第一題	第二題	第三題	第四題	第五題	第六題	總平均分數(%)
公式解	1	1	1	1	1	1	1 (100%)
數學推理	0.67	1	1	1	0.67	0.67	0.83 (83%)
估算	0.33	0.33	0.33	0.67	0.33	0.33	0.39 (39%)
無解	0	0	0	0	0	0	0 (0%)

註：認同=1，不認同=0

二、不同程度學生對不同算法的認同情形

(一)高成就學生 A

學生 A 的學習成就在班上屬於高成就的學生，學生 A 對於公式解(M=100%)及數學推理(M=100%)皆能完全認同，且從訪談中可得知，在考試時學生 A 會根據題目內容，靈活運用不同的解題方法來解題，節省作答時間。

T:考試的時候你會偏向用哪一種方法(指公式解和數學推理)?

S:第一種(指第六題的公式解)。

T:那其他題呢?

S:就看哪一個比較快。

而學生 A 對估算(M=33%)的認同度較低，僅有兩題認同，學生 A 認為當題目問的是「幾公克」或「幾公尺」，答案就要是一個精確的數字，不能是一個範圍，然而像第二題跟第四題問的是「哪個比較划算」跟「能不能在時間內跑完」，因此沒有算出精確的數字也沒關係，只要能判斷就可以了。對無解(M=0%)則完全不認同，因為用前面的公式解或數學推理都是能算出來的。

T:為什麼一定要有一個準確的數字?

S:因為題目問這是多少克，他沒有問一個範圍。(圖 5)

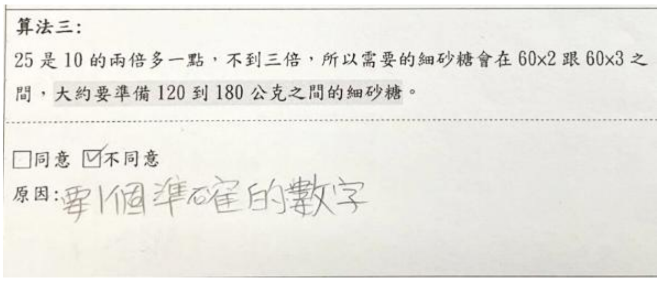
T:所以你覺得它問多少公克就是要一個準確的數字，而不是一個範圍。

S:嗯。

T:那這一題因為他只問你誰比較划算，所以你覺得沒有算出準確的數字沒

關係?

S:對。(圖 6)

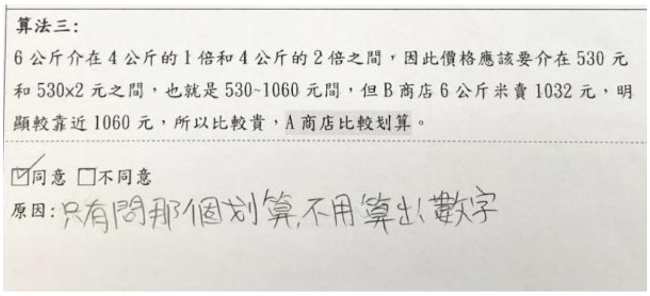

算法三：

25 是 10 的兩倍多一點，不到三倍，所以需要的細砂糖會在 60×2 跟 60×3 之間，大約要準備 120 到 180 公克之間的細砂糖。

□同意 ☑不同意

原因：要1個準確的數字

圖 5 學生 A 第一題作答情形


算法三：

6 公斤介在 4 公斤的 1 倍和 4 公斤的 2 倍之間，因此價格應該要介在 530 元和 530x2 元之間，也就是 530~1060 元間，但 B 商店 6 公斤米賣 1032 元，明顯較靠近 1060 元，所以比較貴，A 商店比較划算。

☑同意 □不同意

原因：只有問那個划算,不用算出數字

圖 6 學生 A 第二題作答情形

(二)中高成就學生 B

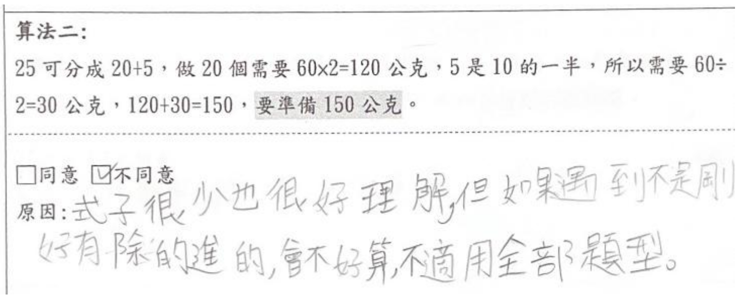
學生 B 的學習成就在班上屬於中高成就的學生，學生 B 對公式解(M=100%)完全認同，顯示學生 B 能吸收並運用課本的方法。學生 B 對數學推理(M=50%)的認同度不如學生 A 高，由其書寫的原因及訪談可以得知，學生 B 不認同第一題中數學推理的原因是他認為這樣的作法並沒有辦法適用在此種題型的每一題，當題目數字無法剛好被拆解時，就會無法計算。

T:這題你寫式子很少很好理解，但你不同意他的做法?(圖 7)

S:對阿，因為就是如果只有學這個方法，他遇到除不盡的話就沒有辦法做應用，就會卡在那邊。

T:可是這題不是有除盡嗎?

S:那時候大概是想，像這樣子的方法，如果不是這一題，數字可能就會除不盡。


算法二：

25 可分成 20+5，做 20 個需要 60×2=120 公克，5 是 10 的一半，所以需要 60÷2=30 公克，120+30=150，要準備 150 公克。

□同意 ☑不同意

原因：式子很少也很好理解,但如果遇到不是剛好有除的進的,會不好算,不適用全部題型。

圖 7 學生 B 第一題作答情形

而第五、六題的數學推理解法，學生 B 則因為看不懂而不認同，而第五、六題皆屬於「放大圖、縮圖與比例尺」單元的題目，顯示學生可能在此單元上仍無法靈活運用其比例關係。

T:這題是看不懂為什麼要 4÷9?(圖 8)

S:對，因為它又是比例尺，如果老師沒有講過的話就不會知道這樣算的原因。

T:哦，因為我們教比例尺是地圖上的和實際上的，但這個是地圖上和地圖上，所以你覺得很奇怪。

S:嗯。

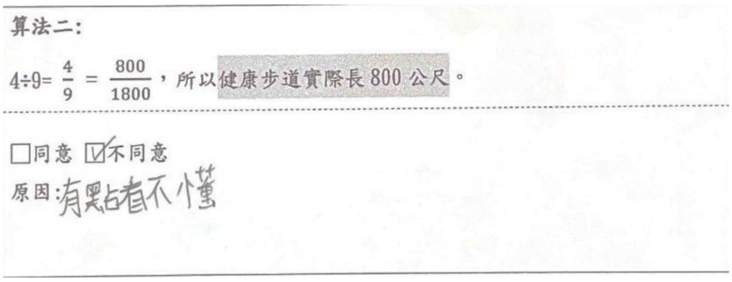


圖 8 學生 B 的六題作答情形

不過在訪談中，學生 B 也提到，即使其他題的公式解及數學推理他都可以認同，但在考試時，還是會選擇以公式解來作答，因為他認為那才是考試要他寫的。學生 B 對估算(M=0%)與無解(M=0%)則完全不認同，其中不認同估算的原因是因為過程皆非在計算出一個精確的數字，因此認為太過模糊，且與高成就學生 A 相同，認為題目要問的是一個準確的數字，而非一個區間。

（三)低成就學生 C

學生 C 的學習成就在班上屬於低成就的學生，學生 C 對於公式解(M=100%)及數學推理(M=100%)皆完全認同，但從訪談中可得知，學生 C 對於數學推理中每一個算式背後的意義其實不甚了解，只是認為它看起來是對的，且在考試時，仍會選擇公式解的做法，因為學生 C 認為這是課本教的，是最保險，一定能算出正確答案的方法。而學生 C 對於估算(M=83%)的認同度是三位學生中最高的，只有第二題，因無法理解計算過程與最後答案的關聯而不認同，而在訪談過程中可以發現，學生 C 在作答時並沒有思考太多，只要看過去覺得答案是合理的，就會認同該作法，並不會再去做深入的思考。學生 C 對無解(M=0%)的認同度與另外兩位學生一樣，因為認為算得出來，所以對無解的算法完全不認同。

T:你知道這個算法在做什麼嗎?

S:他在算他要用的細砂糖在幾到幾之間。

T:那為什麼會覺得他是對的?

S:不知道，就覺得他講的是對的。

T:所以你認為他不需要像前面一樣給你一個精確的數字也沒有關係嗎?

S:好像有關係欸……

T:那你在寫的時候為什麼會同意他的算法?

S:就我覺得他這句話說的對阿。

伍、結論

根據研究者對任教學校的三位六年級學童進行紙本與訪談等方式蒐集資料與分析後，發現不同程度的學生，其解題信念也不同，結果如下:

一、高成就學生:高成就學生在解題時，偏好使用計算時間較少的算法，不會拘泥於課本在該單元所教的公式，能靈活運用先前所學過的概念，並與題目作連結，在解題上較具有彈性但對於估算類型的答案，接受度較低。

二、中高成就學生:中高成就學生在解題時，偏好使用課本在該單元所教的公式來作答，解題策略上較僵化，喜歡用一個方法來解所有題目，但面對不同算法時，會嘗試去理解每一個算式的意義，只是不見得能看懂，因此學生雖然能熟悉每一單元所要教的基本公式解，但連結不同單元間的概念的能力較弱。

三、低成就學生:低成就學生在解題時，一樣偏好使用課本在該單元所教的公式來作答，因為學生認為這是一定可以算出正確答案的方法。面對不同算法，雖然接受度是最廣的，但不太會去做深入的思考，因此不見得是真正的理解，考試時也可能完全不會想到這樣的算法，他的認同可能只是來自於覺得老師不會教授錯誤的方法。

致謝

感謝清華大學林勇吉教授在論文寫作過程中的指導與協助

參考文獻

朱容嫺(2022)。**應用二階段評量探討國小六年級學童在小數乘除法問題的解題表現**〔未出版之碩士論文〕。國立臺中教育大學。

林碧珍(2010)。比與比值初始概念的教學初探。**新竹教育大學教育學報, 27**(1)，127-159。

Goldin, G. A. (2002).*Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Springer.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education*, *24*(1), 41-61.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. L. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 575-596.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Springer.

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*, *7*(4), 329-363.

Problem-Solving Beliefs of Sixth-Grade Case Study Students in the Unit of Ratios and Proportions

Ya-Chu Shih
Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

Abstract

This study adopts a case study approach, selecting three sixth-grade students from the researcher's elementary school class as research subjects to explore the problem-solving beliefs of students with different achievement levels in the unit of ratios and proportions. Data were collected through questionnaires and interviews.

The study found that high-achieving students prefer using algorithms that require less computation time when solving problems. They do not rigidly adhere to the formulas taught in the textbook for the unit; instead, they flexibly apply previously learned concepts and connect them to the given problems. These students demonstrate greater flexibility in problem-solving but have a lower acceptance of estimation-based answers.

Mid-to-high-achieving students prefer using the formulas taught in the textbook for the unit. Their problem-solving strategies tend to be more rigid, and they prefer using a single method to solve all problems. When encountering different algorithms, they attempt to understand the meaning behind each formula, but they may not always fully comprehend them. Although these students are proficient in applying the basic formulas taught in each unit, their ability to connect concepts across different units is relatively weak.

Low-achieving students also prefer using the formulas taught in the textbook for the unit, as they believe this is the most reliable way to obtain the correct answer. While they are the most open to different algorithms, they do not engage in deep thinking about them, meaning they may not truly understand the concepts. As a result, they may not recall these alternative methods during exams. Their acceptance of different algorithms often stems from a belief that teachers would not teach incorrect methods rather than from a genuine understanding.

Key words: Case Study, Problem-Solving Beliefs, Ratios and Proportions

IMPROVE 後設認知教學法對國小學生數學學習影響初探

林昀暄 [1] 林原宏 [2]

[1] 國立臺中教育大學數學教育系 hsuan311056@gmail.com
[2] 國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在探討運用 IMPROVE 後設認知教學法與後設認知提問，對國小六年級學生數學學習成效的影響。本研究根據 Mevarech 與 Kramarski(1997)提出的 IMPROVE 後設認知教學法以及相關文獻作為理論基礎，採用準實驗研究設計，研究對象以台中某國小六年級兩個班級的學生作為實驗組與對照組。研究者對實驗組實施六堂課之 IMPROVE 後設認知教學法融入最大公因數與最小公倍數單元之教學，對照組實施講述式教學法在同一單元之教學。教學後以翰林版最大公因數與最小公倍數單元測驗卷之測驗成績作為依變項，並以學生五年級下學期數學定期評量成績作為共變項，進行單因子共變數分析，並探討學生在數學文字題的答題錯誤類型差異。本研究結果發現：(一)在經過實驗教學後，實驗組與對照組學生未因不同教學法而在學習成效上有所差異。(二)分析兩組學生在單元測驗卷中數學文字題的答題錯誤類型，發現兩組學生有相似的錯誤概念產生。(三)同樣錯誤類型的答題歷程來看，實驗組學生相較於對照組學生較能關注到題目中給定的條件並作答。

關鍵字：後設認知、IMPROVE 後設認知教學法、後設認知提問

壹、緒論

一、研究動機與背景

Flavell 在 1970 年代提出「後設認知」的概念，指的是個人對自身認知歷程的理解、覺察與調控。在學習過程中，具備後設認知能力的學生能夠調整自己的學習策略，提升學習成效。研究指出，中低程度的學生通常後設認知能力較弱，但透過後設認知鷹架的引導，可以有效提升他們的學習表現。其中，運用提問作為鷹架策略，比起直接提供解答，更能促使學生自主思考，進而提升學習成就感與滿足感(張志玲，2018)。Mevarech 與 Kramarski(1997)所提出的 IMPROVE 後設認知教學法強調運用後設認知提問策略，幫助學生提升解題能力、思考過程的監控與調整。然而，目前國小階段的數學教學仍以傳統講述式為主，缺乏對學生後設認知能力的培養。因此，本研究希望探討 IMPROVE 教學法是否能有效提升學生的數學學習成效，並與傳統講述式教學進行比較，此為研究動機之一。

在數學學習上，文字題對學生來說是一大挑戰，因為它不僅考驗數學計算能力，還涉及閱讀理解、邏輯推理及問題解釋能力。學生在數學文字題的解題過程中，常因對題意理解不清或解題策略選擇不當而產生錯誤。學者認為，教師可以透過學生在數學文字題的答題情形分析其中的錯誤概念是由何種錯誤概念產生，

進而修正錯誤(張景媛，1994)。教師分析學生的錯誤類型，可以深入了解其思考模式與常見的解題困難，進而改進教學方式。其中，不同教學法可能對學生的解

題思維產生不同影響，因此，研究者希望探討不同教學法下學生的答題情形與錯誤類型，觀察學生的邏輯思路及解題歷程，比較學生在後設認知教學後與講述式教學之下的認知脈絡，以釐清學生的錯誤概念與迷思，作為後續教學上的修正。此為研究動機之二。

二、研究目的

根據研究動機所述，本研究旨在探討運用 IMPROVE 後設認知教學法對國小學生數學學習成效的影響，研究目的如下：

(一)探討 IMPROVE 後設認知教學法和講述式教學對於國小學生數學的學習成效的影響。

(二)分析在不同教學法下，學生在數學文字題型的答題情形與錯誤類型。

貳、文獻探討

一、後設認知

「後設認知」(Metacognition)一詞是由 John Flavell 於 1976 年首次提出的概念，指個體對於自身認知歷程的認識與了解，以及對於自己的學習過程進行監控與調整，也就是認知的再認知。Flavell(1981)提出認知監控模式，將後設認知分為：1.後設認知知識，是個體既存的知識，對於自身內在思考過程的了解；2.後設認知經驗，指在經歷一段認知歷程中，個體所產生的主觀感受或想法，包括對認知過程的情感、判斷或評價。

Cross 與 Paris (1988)將後設認知分為「認知的自我評估」(self-appraised knowledge about cognition) 與「思考的自我管理」(self-management of one’s thinking)。認知的自我評估包含：1.陳述性知識：指的是個體對任務及自我能力的了解；2.程序性知識：能知道如何操作某個步驟或技能；3.條件性知識：能夠判斷在不同的情況下該用哪種策略完成任務，思考的自我管理包含：1.計畫：為學習訂定目標，設計策略；2. 評鑑：學習過程中檢視自己的學習狀況；3.調節：根據評鑑結果調整策略，以提升學習效果。

二、IMPROVE 後設認知教學法

Mevarech 與 Kramarski(1997)在課堂中使用 IMPROVE 教學法，使得七年級學生在數學成績表現明顯優於未使用此方法的學生。此教學法的內涵為教師用一套完整步驟進行教學(Introducing, Metacognitive, Practicing, Reviewing, Obtaining, Verification, Enrichment)，分別為：1、運用後設認知提問引導新的概念；2、運用後設認知提問在小組中討論；3、利用後設認知提問進行練習；4、透過後設認知提問回顧所學內容；5、在高低認知歷程中達到精熟；6、確認新概念的完整性與理解程度；7、鞏固概念以加深學習。

教師運用「提問」能增進學生後設認知的能力。除了由教師提出問題引導學生思考外，學生也進行「自我提問」，讓學生在過程中釐清自己的思考，知道自

己在學什麼、學得如何、過程中是否遇到困難。Mevarech 和 Fridkin (2006)說明了後設認知提問的四個策略，分別為：1.理解性提問：引導學生思考是否理解題目的內容；2.連結性提問：連結學生的舊經驗；3.策略性提問：思考用何種策略解決問題；4.反思性提問：回顧解決問題的過程有沒有需調整之處。在 IMPROVE 後設認知教學法中，提出問題的角色除了教學者，還有在小組合作時由同儕提問，以及學生練習時能自己提問，以增進後設認知的能力。

本研究在實驗組中採用 IMPROVE 後設認知教學法，在過程中運用後設認知提問進行教學，對照組使用講述式教學，教學後蒐集單元測驗卷的資料進行分析，了解學童數學學習成效差異。

參、研究架構與設計

一、研究架構

本研究旨在探討 IMPROVE 後設認知教學法應用於國小六年級最大公因數與最小公因數之單元，學生在本單元的學習成效。實驗組使用 IMPROVE 後設認知教學法，而對照組採用講述式教學法，分析在不同教學法下，學生在最大公因數與最小公因數單元之學習成效。研究者運用統計套裝軟體(SPSS)，將蒐集到的資料進行統計分析與詮釋。研究架構如圖 1 所示。

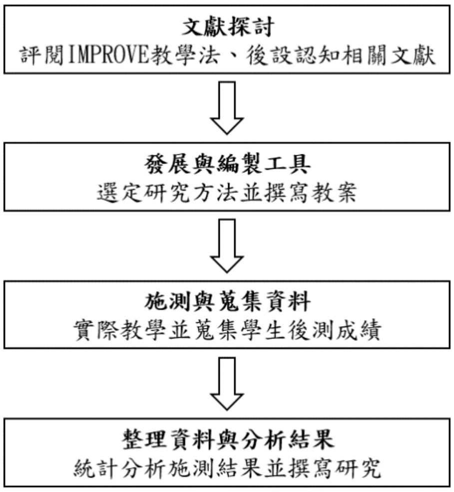


圖 1 研究架構

二、研究設計

本研究於 113 學年度上學期進行，研究對象為研究者任教之班級及同年級另一班級的學生，分別為實驗組與對照組。實驗組教學教師即為研究者，對照組教學教師為同年級另一教師。實驗組與對照組之教學活動設計，簡述如下：

(一)實驗組(運用 IMPROVE 後設認知教學法)

教師首先運用提問複習舊經驗，接著引起動機，帶入新概念。接著教師揭示新情境，請學生讀題後教師提出問題，請學生小組合作討論與回答，並將結果作答於白板上。為避免課本上提示影響學生思考，討論後學生各自利用小白板練習，接著再回小組檢視自己的回答是否有需要釐清之處，之後學生自行練習課本上的

類似題，並與小組同學討論確認自己的解題流程是否正確，最後由教師總結歸納概念。

(二)對照組(運用講述式教學法)

教師首先複習舊經驗，接著引起動機，帶入新概念，接著教師操作課本題目，學生聆聽，再由學生自行練習課本類似練習題，最後由教師檢討題目以釐清概念並進行總結。

三、研究對象

本研究對象為台中市某國小六年級學生，實驗組為研究者任教之班級，對照組為同年級另一班級，實驗組學生 26 名，對照組學生 25 名，學生數共計 51 名。

四、研究工具

本研究所使用的工具為研究者教學前編寫之實驗組教案、翰林版單元測驗卷及學生五年級下學期數學定期評量成績，分別說明如下：

(一)實驗組教案

由研究者編寫翰林版六上數學第一單元「最大公因數與最小公倍數」教案，融入「後設認知提問」以及「IMPROVE 後設認知教學法」之教學步驟，並於實驗組中進行教學。

(二)單元測驗卷

採用翰林版單元測驗卷第一單元「最大公因數與最小公倍數」，將兩組學生教學後測驗的成績作為依變項，並蒐集其中的數學文字題答題情形，進行解題錯誤類型分析。

(三)五年級下學期第二次數學定期評量成績

為排除兩組學生在實驗教學前的先備經驗與數學能力對實驗結果的影響，將五年級下學期數學定期評量成績作為共變項並與教學後的測驗成績進行分析，了解經不同實驗處理後學生的學習成效差異。

肆、研究結果與討論

一、學生學習成效

本研究旨在探討 IMPROVE 後設認知教學法應用於國小六年級最大公因數與最小公因數之單元，學生在本單元的學習成效。實驗組使用 IMPROVE 後設認知教學法，對照組採用講述式教學法，教學後蒐集兩組學生在最大公因數與最小公因數單元測驗卷所得的成績，運用統計套裝軟體(SPSS)進行統計分析與詮釋。

研究者以學生五年級下學期(前一學期)第二次數學定期評量成績作為共變項，以學生最大公因數與最小公倍數測驗之成績作為依變項，進行單因子共變數分析。為排除兩組學生在實驗教學前之先備經驗與數學能力對實驗結果的影響，進行組內迴歸係數同質性檢驗，若檢驗結果顯示兩組班級具有同質性，再進行單因子共變數分析，探討學習成效。

表 1 最大公因數與最小公倍數測驗之組內迴歸係數同質性檢定表

來源	平方和	自由度	平均平方和	*F* 檢定	*p*
組別	308.288	1	308.288	2.721	.106
前測	4342.151	1	4342.151	38.322	.000
組別*前測	424.249	1	424.249	3.744	.059
誤差	5325.497	47	113.308		
校正後的總數	13403.647	50			

*p<.05

表 1 為最大公因數與最小公倍數測驗之組內迴歸係數同質性檢定表，檢驗結果中F值為 3.744，p值為 0.059>0.05，未達顯著水準，表示兩組間共變數對依變項進行迴歸分析並無顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性之假設，可繼續進行單因子共變數分析。

表 2 最大公因數與最小公倍數測驗之單因子共變數分析摘要表

來源	平方和	自由度	平均平方和	*F* 檢定	*p*
組別	178.523	1	178.523	1.490	.228
前測	7451.233	1	7451.233	62.204	.000
誤差	5749.746	48	119.786		
校正後的總數	13403.647	50			

*p<.05

表 2 為最大公因數與最小公倍數測驗之單因子共變數分析摘要表，表中顯示，在排除共變項「五年級下學期第二次數學學期評量成績」對依變項「最大公因數與最小公倍數單元測驗」之影響後，F值為 1.490，p值為 0.228>0.05，未達顯著水準，表示在經過實驗教學後，兩組學生未因不同教學法而在學習成效上有所差異。

從數據中可得知，實驗組與對照組的學生的成績無顯著差異，研究者探討其原因可能為以下幾點：

(一)教學時長

本研究進行時間為六年級上學期第一單元的課程，為期將近兩週共六節課，教學的時間較短，如同江美娟和周臺杰(2003)的研究中所提及，長期且密集的教學與練習，能幫助學生產生較為深刻的學習，並熟練策略的使用。因此，對於實驗組的班級來說，在進行教學時，六節課的時間內未能有效建立與發展後設認知的思考與解題策略。

(二)教學者對教學法的熟悉程度

教學者初次接觸 IMPROVE 後設認知教學法，對於此教學法的呈現方式與應用也還在熟悉中，從張淑惠和唐榮昌(2014)的研究中可知，教師在教學中，若能熟悉教學技巧與實施程序，並且在教學過程中，依據學生當下的反應進行彈性調整，將影響後設認知學習策略成功與否。因此若教學者能熟稔 IMPROVE 後設認

知教學法，並且能在課堂中妥善運用，更有機會增進學生的學習成效。

(二)小組合作的運作方式

IMPROVE 後設認知教學法中需小組同學合作學習，如同林秀玲、吳相儀、張聖翎(2021)之研究所說，合作學習遇到的困難有：學生各說各話、無法分工、態度不友善，以及小組無法整合意見取得共識等。實驗組的學生在求學過程中大多是個體自行學習，較少進行小組合作討論，因此在小組討論時少有個體之間的交流以達到互相砥礪進步的機會，討論過程僅是能力較好的學生提出想法，其他學生附和或接受。實驗組學生尚未培養與同儕合作之習慣便進行教學，未能將此教學法發揮最大的功效。往後若老師能在教學前培養孩子與同儕間合作學習的默契，期能增進此教學法為學習帶來的成效。

二、數學文字題解題錯誤類型分析

學生在解決數學文字題時，須具備計算能力及概念理解能力，因此研究者針對學生在數學文字題的解題過程分析其思考脈絡及邏輯。

最大公因數與最小公倍數的單元中，其中一項教學目標為學生能找出兩數的最大公因數，常見的應用層面即是在平分的情境中，如何將兩個不同數量的物品平均分配，並且給訂條件，答案須在某個範圍內，如圖 2 所示。

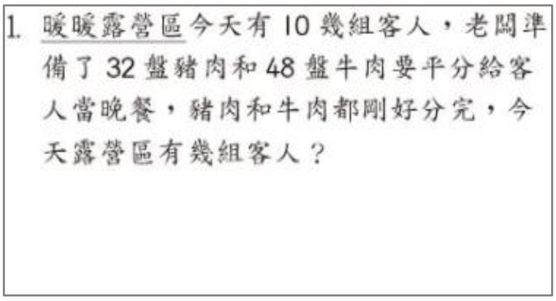

1. 暖暖露營區今天有 10 幾組客人，老闆準備了 32 盤豬肉和 48 盤牛肉要平分給客人當晚餐，豬肉和牛肉都剛好分完，今天露營區有幾組客人？

圖 2 單元測驗卷 1-1

(一)實驗組學生的解題錯誤類型

1.誤解題意，以為要找最小公倍數

學生能了解需要運用短除法將兩數分解，但未理解題意，找了兩數的最小公倍數，又因題目給的條件是「10 幾組」，又再從 96 的因數中選了 16 作為答案。雖然誤打誤撞最後答案正確，但從過程來看，學生不清楚在平分的情境下需要找的是兩個數字的公因數，如圖 3、圖 4。

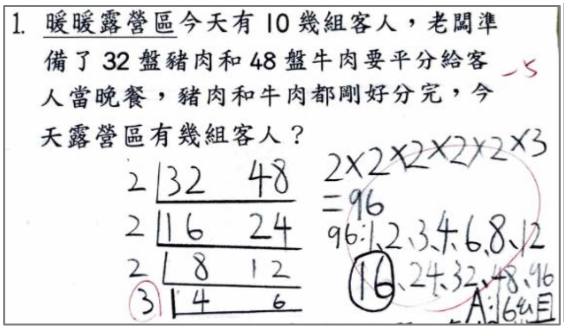


圖 3 實 S09-1-1

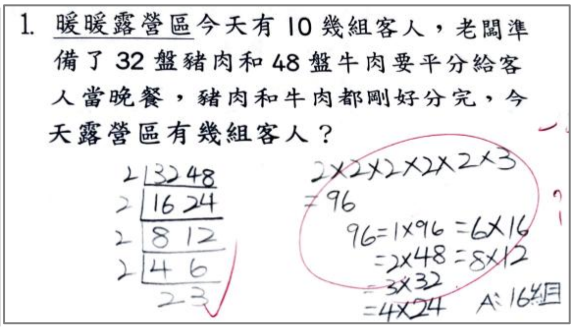


圖 4 實 S15-1-1

2.短除法不完整，且將題型搞混

學生知道要進行短除法，但未完整計算，導致最後結果並非短除法後的結果。另外，學生此題與另一種題型混淆，將平分完之後的數字相加，未能清楚理解題意，如圖 5。

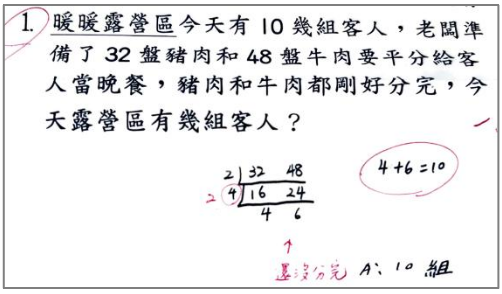


圖 5 實 S14-1-1

(二)對照組學生的解題錯誤類型

1.誤解題意，以為要找最小公倍數

學生能正確做出短除法，但誤以為要找最小公倍數，未思考題目給的條件以及是否能整除 32 和 48，如圖 6。

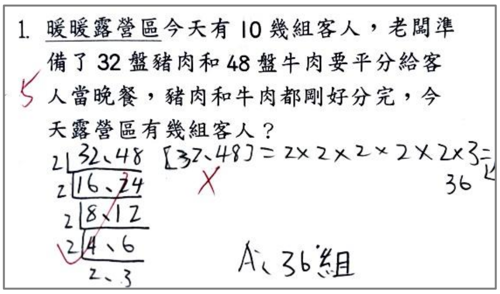


圖 6 對 S04-1-1

2.短除法不完整

學生能進行短除法找出最大公因數，但未完整計算，導致最後結果並非最大公因數，且未符合題意，如圖 7。

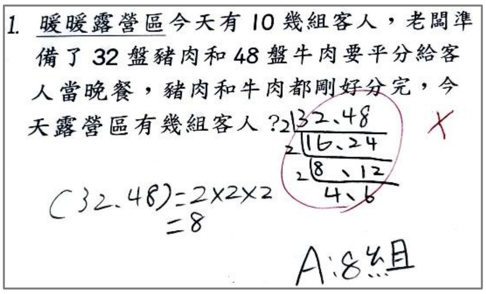


圖 7 對 S06-1-1

從兩組學生作答情形可以發現，兩組學生的第一種錯誤類型類似，皆未清楚了解題意，用短除法找最小公倍數，其中之差異在於實驗組學生能思考題目給定的條件是「10 幾組」，而對照組學生是直接將計算錯誤的結果直接作為本題的答案。在第二種錯誤類型中，實驗組學生將題目與另一種計算平分後結果的題型搞混，未將短除法做完且未能清楚題目所問的重點，而對照組學生可從題意判斷出

要找到最大公因數，可惜未將短除法做完，且未檢查答案是否符合題意。

伍、結論與建議

一、結論

根據本研究的結果，可知本研究運用 IMPROVE 後設認知教學法在國小六年級進行教學，與運用傳統講述式教學法教學的學生，相較之下學習成效未達顯著差異，此結果與先前研究的結果不同，Kramarski 與 Mevarech (2003)的研究中針對八年級學生，教師在課室中使用 IMPROVE 後設認知教學法，搭配小組合作學習，使得學生在數學推理與數學知識的表現明顯優於未使用此方法的學生。研究者推論其原因，可能與教學時長不足、教師對教學方法的熟稔度，以及學生在小組合作時與同儕互動的方式，都可能影響 IMPROVE 後設認知教學法之執行。

從學生答題錯誤類型來看，實驗組的學生相較於對照組的學生，較能掌握題目中給定的條件，並且能思考自己的答案是否符合題意。惟考試中的分數是依據答案給分，因此從測驗成績來看，無法有明顯的分數差異。

二、建議

研究者針對研究結論提出建議，若教學者能熟悉教學法並在教學過程中臨機應變，能因應學生的反應調整提問的方式或難度，將能更有效的執行此教學法。另外，若能有足夠的時間，時常使用此教學法並密集練習，使學生更熟悉後設認知提問的應用，並訓練學生能和小組同學在合作學習時互相提問、提供想法與切磋學習，以增進個人的學習，將可能提升學習效果。

陸、參考文獻

江美娟、周臺杰(2003)。後設認知策略教學對國小數學學習障礙學生解題成效之研究。**特殊教育學報，18**，107-151。

林秀玲、吳相儀、張聖翎(2021)。突破合作學習困境：得獎教師教學策略分析之研究。**教育心理學報，52(4)**，807-828。

張志玲(2018)。啟動後設認知鷹架協助學習。**科學發展**，549，76 -77。

張淑惠、唐榮昌(2014)。後設認知策略教學對學習障礙學生在數學解題之應用：以 Montague 的 Solve It 解題策略教學為例。**特教園丁，3**，25-36。

張景媛(1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。**教育心理學報，27**，175-200。

Cross, D. R., & Paris, S. G. (1988). Developmental and instructional analyses of children's metacognition and reading comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 80(2), 131–142.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. In L. B. Resnick (Ed.),*The Nature of Intelligence* (pp. 231-235). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J. H. (1981). Monitoring social cognitive enterprises: Something else that may develop in the area of social cognition. *Social cognitive development: Frontiers and possible futures*, 11, 272-287.

Kramarski, B., & Mevarech, R., (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal*, 40, 281–310.

Mevarech, R., & Kramarski, B., (1997). Improve：A Multidimensional Method for Teaching Mathematics in Heterogeneous. *American Educational Research Journal Summer*, 34, 365-394.

Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and learning*, 1, 85-97.

A Preliminary Study on the Impact of the IMPROVE Metacognitive Instructional Method on Elementary School Students' Mathematics Learning

Yun-Hsuan Lin[1] Yuan-Horng Lin[2]

[1] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

[2] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

The main purpose of this study were to explore the impact of applying the IMPROVE metacognitive instructional method and metacognitive questioning on the mathematics learning outcomes of sixth-grade elementary school students. Based on the IMPROVE metacognitive instructional method proposed by Mevarech and Kramarski (1997) and relevant literature, this study adopts a quasi-experimental research design. The participants consist of two sixth-grade classes from an elementary school in Taichung City, with one serving as the experimental group and the other as the control group. The researcher implemented six lessons of the IMPROVE metacognitive instructional method in the experimental group, incorporating it into the teaching of the "Greatest Common Factor and Least Common Multiple" unit, while the control group received traditional lecture-based instruction on the same unit. After the instruction, the test scores from the Hanlin version of the Greatest Common Factor and Least Common Multiple unit test were used as the dependent variable, while students' mathematics scores from the second semester of fifth grade were used as the covariate. A one-way ANCOVA was conducted to analyze the learning outcomes and examine differences in students' error types in solving mathematical word problems. The findings of this study revealed that:(1) After the experimental instruction, there was no significant difference in learning outcomes between the experimental and control groups due to different teaching methods.(2) Analyzing the types of errors in mathematical word problems within the unit test showed that both groups exhibited similar misconceptions.(3) Regarding the problem-solving process of similar error types, students in the experimental group were more likely to focus on the given conditions in the questions compared to students in the control group.

Key words: Metacognition, IMPROVE Metacognitive Instructional Method, Metacognitive Questioning

國中數學教科書試題之比較與分析－以二元一次聯立方程式為例

陳宥諭

清華大學數理教育研究所碩士班 chen12048@gapp.nthu.edu.tw

摘要

本研究採內容分析法，探討臺灣三家出版社「A 版」、「B版」和「C 版」之國中數學教科書二元一次聯立方程式教材中「**試題分布分析比較**」、「**題目認知類型分析**」與「**題目表徵型態**」。研究發現三個版本各有特色與著重方向：A版本應用問題最多，C版最少；而解聯立計算B版本最多，C版最少。題目認知類型方面 A版本偏重無連結型題型，強調基礎計算能力；B版本偏重具連結型題型，著重理解與概念應用；C版本則在四種認知類型上分布均衡，強調學生循序漸進學習。題目表徵方面三版本數學型態題型佔比超過 75%，文字型態約佔 25%，顯示應用題的重要性。三版本素養題型均約佔 25%，集中於應用題，反映三版本對學生實際應用與解決問題能力的重視。

關鍵字：比較研究、數學教科書、教科書試題分析

壹、緒論

台灣數學教育經歷多年改革，從傳統的「算術」逐步發展為強調思考、推理與問題解決能力的「數學」教育（鄭章華，2018），並在 2019 年（108 學年度）全面推動十二年國民基本教育，強調學生素養的培養，特別是與自我、他人、社會互動的能力（教育部，2014）。素養導向強調學生能應用知識解決真實生活問題，進一步實踐所學。對此，教科書在教學中扮演關鍵角色，研究指出教師對教科書的依賴程度高，尤其是在考科教學中（國教院，2013）。教科書不僅是學生學習的資源，也直接引導教師的教學歷程（左台益、李健恆，2017）。

根據 Yang 與 Lin（2015）的研究，發現臺灣教科書較著重於抽象符號與公式的呈現，較少與學生的生活經驗建立連結。而雖已有研究指出不同國家教科書在內容與題型上的差異與優缺點，然而國內不同版本最新版教科書（113 學年度）中數學題目與教學目標的關聯性，以及素養程度的真實性仍值得探討。因此，教科書題目的設計與呈現方式，是否能貼近單元學習目標並有效培養數學素養，成為當前教材研究的重要議題。為了幫助學生熟練應用數學工具，確保每個數學概念的精熟與實踐，本研究將探討教科書中二元一次聯立方程式題目的類型與呈現方式，並檢視其是否符合數學素養的核心要求，進而比較不同版本教科書間的差異，作為後續教學與教材設計的參考依據。

貳、文獻探討

一、台灣數學課程目標

從臺灣 108 課綱的數學課程目標來看，強調全人教育精神，以「自發」、「互動」及「共好」為理念，並以「成就每一個孩子－適性揚才、終身學習」為願景。課綱以「核心素養」為課程發展主軸，分為三大面向：「自主行動」、

「溝通互動」、「社會參與」，再細分為九大項目，包括：「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」、「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」、「藝術涵養與美感素養」、「道德實踐與公民意識」、「人際關係與團隊合作」、「多元文化與國際理解」（國家教育研究院，2018）。核心素養強調跨領域、跨年段的學習，促進學生在不同學科知識間建立連結，強調從真實生活中發現問題並解決問題，提升面對未來挑戰的能力（劉柏宏，2016）。因此，數學核心素養不僅要求課程內容與學生生活經驗或情境相關，亦強調學生應能運用所學數學知識和技能，透過數學工具來預測和解釋各種現象，並有效與世界溝通。

二、一元二次方程式教科書相關研究

Yang 與 Lin（2015）針對芬蘭與台灣數學教科書中的「二元一次方程式」進行跨國比較，探討兩國在內容、試題設計與教學策略上的差異。研究發現，芬蘭教科書強調探索性學習與問題導向，鼓勵學生透過實際操作建構數學概念；相較之下，台灣教科書則偏重於公式推導與演練，強化計算技巧與解題的訓練（Yang & Lin, 2015）。而在題型設計上，芬蘭教材多採開放性與應用性問題，著重學生的思維發展與實際應用能力；台灣教材則以封閉性問題為主，重視解題的正確性與效率，反映出兩國在教育理念上的差異；此外，芬蘭教科書傾向結合生活情境，強調數學概念的具體化，而台灣教科書則偏向抽象符號與公式的呈現，較少與生活經驗連結（Yang & Lin, 2015）。因此 Yang 與 Lin（2015）強調教科書設計與題型選擇對學生學習成效的重要影響，並建議教材設計者在知識訓練與思維培養間尋求平衡，以促進學生的全面學習。

三、數學問題的類型與呈現方式

Stein 等人（2000）針對學生在解決數學問題的解題過程，提出「數學題目的認知需求分類（Cognitive Demand of Mathematical Tasks），強調不同類型的題目對學生認知參與程度的影響。研究指出，數學問題可依據其認知需求程度分為四種類型，分別是**記憶型**（Memorization）、**無連結型**（Procedures Without Connections）、**具連結程序型**（Procedures With Connections）及**作數學**（Doing Mathematics），前兩類問題屬於低認知層次，解題時主要依賴對事實、規則或運算技巧的熟練應用，而較少關注概念本身的理解，因此對學生而言相對簡單。相較之下，後兩類問題則屬於高認知層次，除了運算能力外，更強調概念與解題過程的連結，以及對問題的探索與推理。學生通常需要經過深入理解與探索後，才能選擇合適的策略來解決問題（徐偉民、柯富渝，2014）。根據徐偉民（2011a，2011b）及 Henningsen 與 Stein（1997）的研究，數學問題的設計會直接影響學生的學習焦點，進而塑造他們的數學思維方式。例如，如果教科書中的問題多以計算練習為主，學生可能更專注於公式的記憶和運用，而忽視數學概念的理解和解題策略的發展。相反，若教科書中包含更多開放式問題或應用問題，則有助於學生在解決實際問題的過程中發展批判性思維與創新能力。因此，透過數學問題類型的分析，可以了解臺灣這三家教科書的教材內容焦點及特色，以及編排差異。

四、數學教科書研究的要求與分析架構

數學教科書題目表徵形式是學習中的重要媒介，有助於學生理解數學概念、進行推理與解題。根據 NCTM（2000）的觀點，表徵有助於學生在學習過程中達成理解、溝通與推理的目標。Lesh、Post 與 Behr（1987）提出了五種數學表徵形式，分別為實物、操作模型、圖形、語言及書寫符號，這些表徵在學生解題過程中扮演著關鍵角色。而根據徐偉民與黃皇元（2012）以及 Zhu & Fan（2006）的教科書分析研究，教科書中常見的表徵形式可歸納為四類：數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態。**數學型態**：是指以數學符號呈現問題，強調計算與符號操作。**文字型態**：問題以文字敘述為主，強調情境描述與邏輯推理，也屬於書寫符號表徵的一部分。**視覺型態**：問題透過圖像、圖表、圖示、地圖等形式呈現，幫助學生以直觀方式理解數學概念。**聯合型態**：結合兩種以上的表徵型態，有助於強化學生在不同表徵間的連結與轉換，促進更深層的數學理解。因此，為了更全面地分析三版本之二元一次聯立方程式的試題，本研究採用數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態四種分類，藉此深入探討各版本教材在數學問題呈現上的異同，並提出具體分析標準以確保研究的系統性與一致性。此外，研究指出，若數學問題的情境能貼近學生的生活經驗，將有助於促進學生對數學概念的理解與學習（Anderson, 2003; Ensign, 2005; Gutstein, 2003）。而且，培養學生應用數學知識來解決生活中的實際問題，已成為當代數學教育的重要趨勢（Lesh & Lamon, 1992; NCTM, 1989, 2000）。因此本研究多考慮一個額外的題目型態，素養題以及非素養題。

參、研究內容與方法

一、研究方法

本研究採用內容分析研究法，內容研究分析法是以客觀的態度，並且系統性的對文件的內容進行量化的歸納統計與質性分析的一種研究方法，藉以推論文件內容的環境背景和意義的一種研究方法 (歐用生，2000)。本研究主要探討在 108 課綱下，臺灣國民中學三個版本之數學教科書內二元一次聯立方程式試題的類型、呈現方式以及素養題的程度。因此，本研究採用內容分析法進行國中教科書分析研究，透過量化的方式分析兩版本數學教科書中數學題目的類型(記憶型、無連結型、具連結程序型、作數學)、題目的呈現方式的表徵型態(數學型態、文字型態、視覺型態、聯合型態)以及題目呈現方式的情境面向(素養題、非素養題) ;並使用質性的方法分析教科書內題目的編排，並參考其他教科書研究，發展出內容分析架構。

二、研究對象與範圍

本研究對象為國中數學教科書，選取對象為教育部審核通過 108 課綱之數學教科書之三家出版社，編碼依序為 A 版本、B 版本以及 C 版本，詳細說明如表 3-1。主要分析此三版本學生課本中的數學題目，分析對象僅包含課本中的例題以及隨堂練習，不包含學生習作、講義、補充教材以及教師備課用書。

這三個版本皆將第二冊第一單元劃分為三個小節，分別為 1-1 二元一次方

程式、1-2 解二元一次聯立方程式、1-3 應用問題，其中 B 版本的 1-3 命名為二元一次聯立方程式的應用，儘管各版本在 1-3 命名上略有差異，但其核心內容與結構本質上是一致的，如表 3-2。

表 3-1 研究對象

A 版本	108 課綱教科書 113 年版 第二冊第一單元 二元一次聯立方程式
B 版本	108 課綱教科書 113 年版 第二冊第一單元 二元一次聯立方程式
C 版本	108 課綱教科書 113 年版 第二冊第一單元 二元一次聯立方程式

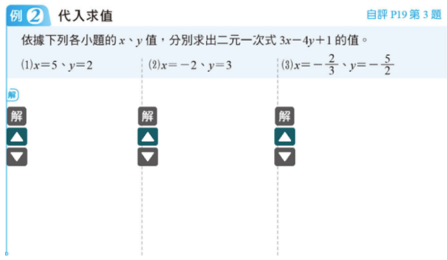
表 3-2 各版本單元命名

	A 版本	B 版本	C 版本
1-1	二元一次方程式	二元一次方程式	二元一次方程式
1-2	解二元一次聯立方程式	解二元一次聯立方程式	解二元一次聯立方程式
1-3	應用問題	二元一次聯立方程式的應用	應用問題

三、分析單位與類目

分析單位是指將文件內容進行量化分析的標準，研究者通常依據研究目的及內容的特性選擇適當的分析單位。在數學教科書的內容分析中，常見的分析單位包括單元、活動、頁及問題等。然而，若以單元、活動或頁作為分析單位，則由於這些單位可能同時涵蓋多個概念和數學問題，這樣的分析較難進行細緻比較，也無法清楚呈現不同版本在相同單元內容上的差異（徐偉民，2014）。因此本研究將使用數學問題為計數單位，而其中如果數學問題中只包含一個主問題，並且只有一個數字編號，則計為一題；而如果一個數學問題中包含多個子問題，並每個子問題都有各自的編號，則每個子問題都分別計為一題如表 3-3。

<table>
<tr><td colspan="2">表 3-3 分析單位</td></tr>
<tr><td>計為八題</td><td>計為三題</td></tr>
<tr><td>

因為每一個格子都需計算一次，因此計為 8 題</td><td>

每一小題都需計算，因此計為 3 題。</td></tr>
</table>

資料來源： A 版數學國中七年級下冊（2025）。臺北：A 出版事業股份有限公司。頁 10-17。

四、信效度

信度檢驗：本研究採用「評分者信度」，本研究計算所得之 Cohen's Kappa 值為 0.81，根據 Landis 和 Koch（1977）所提出的解釋標準，此值屬於幾乎完全一致（Almost Perfect Agreement）的範疇，顯示評分者之間在題目分類上的一致性極高。

效度檢驗：本研究在分析架構之發展過程中，參考臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之比較（徐偉民、柯富渝，2014）所使用之分析工具，以確立本研究之分析架構；並與數學教育專家討論修正，分類編碼前，亦與評分員做充分的討論與溝通，以建立本研究之效度。

肆、研究結果

一、二元一次聯立方程式的題目分布分析比較

這三家教科書都將二元一次聯立方程式分成三個子單元，分別為 1-1 介紹二元一次方程式、1-2 解聯立、1-3 應用問題。其中在 1-1 中 A 版本的題目比例為 52%，B 版本為 48%，C 版本為 56%；在 1-2 解聯立方程式中，A 版本題目佔比為 35%，B 版本為 39%，C 版本為 33%；在 1-3 應用問題中 A 版本的題目佔比為 13%，B 版本為 12%，C 版本為 11%（如表 1）。其中可以明顯看出這三個版本對於二元一次聯立方程式重點看法的不同，其中 A 版本明顯應用問題的題目佔比是最高的，因此可知 A 版本相當重視學生在應用問題的學習及練習並且相當注重數學與生活的結合，而 B 版本在解二元一次聯立方程式的題目佔比為最高，由此可知 B 版本相當注重學生的計算能力，設計了較多的題目讓學生練習解聯立方程式，而 C 版本在介紹二元一次聯立方程式的題目佔比為最高，明顯可知 C 版本認為最重要的是數學概念的建構，而不是計算，並且 C 版本的解二元一次聯立方程式以及應用問題的題目佔比為最少，由此可以推測 C 版本注重數學概念的建構，較不注重學生的計算能力，以及跟生活的結合。

表 1、三版本二元一次聯立方程式題目分布

	A 版	B 版	C 版
1-1 二元一次方程式	題數：44 佔比：52%	題數：32 佔比：48%	題數：41 佔比：56%
1-2 解二元一次聯立方程式	題數：30 佔比：35%	題數：26 佔比：39%	題數：24 佔比：33%
1-3 應用問題	題數：11 佔比：13%	題數：8 佔比：12%	題數：8 佔比：11%
總題數	85	66	73

註：佔比為（該版本各小節題數）÷（總題數）並以四捨五入法取至小數點後第一位

二、二元一次聯立方程式的題目認知類型分析比較

題目四大認知類型，記憶型（基礎技能）、無連結型（基礎計算）、具連結程序型（需理解的計算）、做數學（發展概念），其中 A 版本的認知類型佔比分別為

18%、46%、29%、7%，B 版本分別為 24%、30%、39%、6%，C 版本分別為 21%、34%、37%、8%（如表 2），其中 A 版本無連結型的題目佔比非常高，因此可知 A 版本的題目以單純計算的題目為主，雖然一樣有高程度認知的題目，但佔比不高，要還是以單純簡單的計算為主，由以此可 A 版本題目的設計是以磨練學生基本能力為優先，而 B 版本的具連結型題數明顯為最多（接近 4 成），因此可知 B 版本強調的不僅是單純的計算，而是更希望學生能在計算時更近一步的理解，題目相較 A 版本多了些許變化，更考驗了學生對於該單元概念的理解，而 C 版本為三版本中四個認知類型最為平衡的一版，由此可知 C 版本的題目編排，並沒有特別哪一個認知類型的題數特多，而是均衡的分布讓學生可以一步一步從簡單的題目學習到稍有變化的題目，而不會只練習到難題或只練習到簡單的題目。整體而言，C 版本題目的認知類型分布較為友善，更有利於學生學習。

表 2、三版本二元一次聯立方程式題目各認知類型題數

	A 版	**B** 版	**C** 版
記憶型	題數：15 佔比：18%	題數：16 佔比：24%	題數：15 佔比：21%
無連結型	題數：39 佔比：46%	題數：20 佔比：30%	題數：25 佔比：34%
具連結型	題數：25 佔比：29%	題數：26 佔比：39%	題數：27 佔比：37%
作數學	題數：6 佔比：7%	題數：4 佔比：6%	題數：6 佔比：8%
總計	85	66	73

註：佔比為（該版本各小節題數）÷（總題數）並以四捨五入法取至小數點後第一位

三、二元一次聯立方程式的題目表徵型態以及素養非素養分析比較

題目四大表徵型態，數學形態（數字為主）、文字型態（文字文主）、視覺型態（圖像為主）、聯合型態（兩個以上概念），其中 A 版本的表徵型態佔比分別為 76%、24%、0%、0%，B 版本分別為 76%、24%、0%、0%，C 版本分別為 75%、25%、0%、0%，因為是代數的單元（二元一次聯立方程式）因此沒有視覺型態的題型，也沒有出現聯合型態的題型，而三版本題目的表徵型態分布差異不大，數學型態都佔有 75%以上有此可知的對這三個版本而言，二元一次聯立方程式這個單元還是以數字為主也就是計算類型的題目最為重要，這個結果也與 Yang 與 Lin（2015）的研究結果相符，而剩下 25%文字類型的題目都幾乎是集中在應用問題，目的在讓學生將所學二元一次聯立方程式運用於生活中，這部分的想法三個版本都一致；而在素養方面分成素養以及非素養，A 版本的素養非素養佔比分別為 24%、76%，B 版本分別為 24%、76%，C 版本分別為 25%、75%（如表 3），三個版本的差異不大，都有接近 25%的素養題，而這些素養題也都剛好是表徵型態中的文字型態，明顯三版本對於題目型態的分

配、想法是類似的。

表 3、三版本二元一次聯立方程式題目各表徵型態題數

	A 版	**B** 版	**C** 版
數學型態	題數：65 佔比：76%	題數：50 佔比：76%	題數：55 佔比：75%
文字類型	題數：20 佔比：24%	題數：16 佔比：24%	題數：18 佔比：25%
視覺型態	題數：0 佔比：0%	題數：0 佔比：0%	題數：0 佔比：0%
聯合型態	題數：0 佔比：0%	題數：0 佔比：0%	題數：0 佔比：0%
總計	85	66	73
素養	題數：20 佔比：24%	題數：16 佔比：24%	題數：18 佔比：25%
非素養	題數：65 佔比：76%	題數：50 佔比：76%	題數：55 佔比：75%
總計	85	66	73

註：佔比為（該版本各小節題數）÷（總題數）並以四捨五入法取至小數點後第一位

伍、結論

一、內容編排與特色

綜合以上分析，三個版本教科書在二元一次聯立方程式的編排與設計上皆展現出各自不同的重點與理念，反映了各版本對此單元不同的思考與取向。首先，在單元結構安排上，三個版本均將二元一次聯立方程式分為三個子單元，分別是 1-1 介紹二元一次方程式（概念的建構）、1-2 解聯立方程式（計算教學與練習）、以及 1-3 應用問題（應用於生活之中）。從題目比例來看，A 版本在應用問題部分的比例最高（13%）。這顯示 A 版本特別重視學生在實際生活中應用數學知識的能力，強調數學與生活的結合，期望學生不僅能理解數學概念，更能將其應用於實際情境中。相較之下，B 版本在解聯立方程式部分佔比最高（39%），突顯 B 版本注重學生的計算能力，設計大量練習題來鞏固學生的解題技巧，強調技能訓練。而 C 版本則在介紹二元一次方程式部分比例最高（56%），顯示其特別注重概念的建構與理解，強調學生對數學基本概念的掌握，計算練習與生活應用關注較少。

二、題目認知類型與題目表徵類型比較與分析

在認知類型方面，A 版本在無連結型（基礎計算）題型上的佔比高達 46%，顯示其題目設計偏重於基本計算練習，強調學生基礎能力的訓練與培養，而 B 版本則在具連結型（需理解的計算）題型佔比最高，達 39%，顯示 B 版本注重學生在計算過程中的理解能力，鼓勵學生在解題過程中深入思考，提升概念的掌握與應用能力，而 C 版本的四種認知類型比例較為平均，這樣的設

計有助於學生從簡單到複雜、從基礎到進階逐步學習，避免過於偏重某一類型的題目，讓學習過程更為平衡，相比之下對學生而言更為友善；在表徵型態方面，三個版本的題型分佈相當一致，數學型態題目比例均高達 75%以上，這個結果也與 Yang 與 Lin（2015）的研究結果相符，顯示在二元一次聯立方程式的學習中臺灣教科書還是以數字與計算為核心重點。文字型態題目約佔 25%，主要集中在應用問題部分，這反映了三個版本對於將數學知識應用於生活場景的重視。然而，視覺型態及聯合型態的題型幾乎未見，這或許反映了此單元的特性，也顯示教材在題型多樣性上尚有發展空間。至於素養題型的分佈，三個版本的素養題佔比接近 25%，且與文字型態題型比例一致，顯示三個版本皆認為應用題型能有效培養學生的素養能力，鼓勵學生將所學知識運用於實際情境中，培養問題解決能力與邏輯思維能力。

綜觀而言，A 版本偏重基礎計算與應用實踐，注重學生基礎技能的磨練與生活應用；B 版本強調計算理解與多樣化的解題練習，提升學生的解題靈活性與概念掌握能力；而 C 版本則致力於數學概念的建構與平衡的學習過程，確保學生在各種認知層次上均有良好的學習體驗。這些差異不僅反映了教材設計者對數學教學的不同理念，也提示教育工作者在選擇教材時，需根據學生的學習需求與能力差異，選擇最合適的教材版本，從而提升學生的學習效果與興趣。未來在教材設計上，若能進一步結合更多視覺型態與聯合型態的題型，將會更有助於提升學生的多元思維與應用能力，達到更全面的數學素養培養。

陸、致謝

本研究能順利完成，首先要感謝我的指導教授—清華大學數理所林勇吉教授。林教授在研究設計、資料分析與論文撰寫過程中，提供了寶貴的指導與悉心的建議。林教授嚴謹的學術態度與專業知識，讓我受益良多，並在研究過程中獲得深刻啟發。當我遇到困難與瓶頸時，林教授不吝給予耐心指導與鼓勵，促使我堅持完成研究。

參考文獻

Anderson, A. (2003). *Mathematics for everyday life: Integrating real-life context in mathematical problem-solving*. *Journal of Mathematics Education*, 12(3), 45-59.

Ensign, J. (2005). *Real-life contexts in math education: The value of relevance*. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 67-82.

Gutstein, E. (2003). *Teaching and learning mathematics for social justice in an urban, Latino school*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 37-73.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). *Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). *The measurement of observer agreement for categorical data*. *Biometrics*, 33(1), 159–174. https://doi.org/10.2307/2529310

Lesh, R., & Lamon, S. (1992). *Assessment of authentic problem-solving in mathematics*. *American Educational Research Journal*, 29(1), 93-106.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem-solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Yang, J., & Lin, C. (2015). *A comparative study of linear equations in Finnish and Taiwanese mathematics textbooks*. *International Journal of Mathematics Education*, 23(2), 175-190.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). *The analysis of mathematical representation in textbooks: A case study of Chinese and US textbooks*. *International Journal of Mathematics Education*, 38(3), 211-225.

教育部（2014）。《十二年國民基本教育課綱總綱》。臺北市：教育部。

國家教育研究院（2018）。《108 課綱核心素養解析》。臺北市：國家教育研究院。

國教院（2013）。《臺灣教師對教科書依賴性的調查報告》。臺北市：國家教育研究院。

歐用生（2000）。《教育研究方法》。臺北市：五南圖書出版有限公司。

鄭章華（2018）。《臺灣數學教育改革之探討》。*教育研究月刊*, 37(4), 15-27。

徐偉民、黃皇元（2012）。《國中數學教科書表徵形式分析》。*教育科學研究*, 58(3), 45-62。

徐偉民、柯富渝（2014）。《數學教科書分析研究：以幾何教材為例》。*教育研究季刊*, 27(1), 112-130。

A 出版事業股份有限公司（2025）。《國民中學數學課本第二冊》。臺北市：A 出版事業股份有限公司。

B 出版事業股份有限公司（2025）。《國民中學數學課本第二冊》。臺北市：B 出版事業股份有限公司。

C 出版事業股份有限公司（2025）。《國民中學數學課本第二冊》。臺北市：C 出版事業股份有限公司。

Comparison and Analysis of Junior High School Mathematics Textbook Problems—A Case Study on Systems of Linear Equations

Yo-Yu Chen

Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
chen12048@gapp.nthu.edu.tw

Abstract

This study employs content analysis to compare and analyze the problem distribution, cognitive type classification, and representation format of systems of linear equations problems in junior high school mathematics textbooks from three Taiwanese publishers (Versions A, B, and C). The findings indicate that each version exhibits distinct characteristics and areas of emphasis. Version A contains the highest proportion of application problems, while Version C has the least. Version B features the most problems involving system-solving computations, whereas Version C has the fewest.Regarding cognitive type classification, Version A predominantly includes non-connection-type problems, focusing on fundamental calculation skills. Version B emphasizes connection-type problems, highlighting conceptual understanding and application. Version C maintains a balanced distribution across all four cognitive types, promoting progressive learning.In terms of problem representation, mathematical representation accounts for over 75% of the problems in all three versions, while word problems comprise approximately 25%, demonstrating the significance of application-based questions. Additionally, all three versions allocate around 25% of their problems to competency-based questions, primarily within application problems, reflecting a shared emphasis on students' practical problem-solving abilities.

Keywords: Comparative study, mathematics textbooks, textbook problem analysis

以數學感「舉例」策略融入一年級數的單元之初探

史翊君[1]　李源順[2]
[1]臺北市立大學數學系數據科學與數學教育碩士在職專班
m11311006@go.utaipei.edu.tw
[2]臺北市立大學數學系 leeys@go.uTaipei.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討將「舉例」策略融入國小一年級數學數的單元教學之成效與改變原因。為達到研究目的，研究者採用個案研究法，運用舉例練習單分析一年級學童在數的單元舉例能力的變化。研究過程考量學生的書寫能力尚未完善，全班先口頭練習如何舉例、注意量詞，之後再讓學生運用書寫方式進行舉例。資料收集與分析包括學生的學習單，教學錄音、錄影，教學札記。資料分析的信度、效度採用內容效度、專家效度，以及三角校正。研究結果發現上學期能完整舉例的大約四成，到下學期的二十以內的加法進步到七成。學生的改變與老師在教學中時強調生活量詞的正確性，先想一想再說出來，以及找出課本例題的重點來了解重要概念，同時大約在 1 到 2 個月後才讓學生練習舉例，使學生有機會慢慢形成學習習慣，進而內化為學習能力有關。

關鍵字：舉例、數與量、一年級數學

壹、緒論

一、研究動機與背景

根據十二年國民基本教育數學領域課程綱要（教育部，2018），數學是一種語言、一門實用的規律科學，亦是一種人文素養的觀點。其中「三面九項」核心素養涵蓋系統思考與解決問題的能力，強調培養學生在理解問題、思辨分析、推理批判方面的系統思考與後設思考素養，並能付諸行動與反思，以有效應對並解決生活與生命中的各種問題。

在評量中小學學生能力的國際評比中，國際數學與科學教育成就趨勢調查(Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS)具有高度代表性。根據「2023 年國際數學與科學教育成就趨勢調查」結果（教育部，2023），四年級組共有 58 個國家參與，八年級組則有 44 個國家。我國學生在數學成就方面表現亮眼，四年級與八年級皆排名第二，且低成就學生的比例持續下降，顯示出優異的學習成果。然而，在學習態度方面，包括學習興趣、自信心及對數學的價值評估等指標，我國學生的不喜歡數學、缺乏自信、以及認為數學無價值的比例仍高於國際平均。因此，提升學生的數學學習態度應成為重要課題。最直接的改善策略是將數學與日常生活結合，使學生理解數學無處不在，並體驗其實用性與趣味性。透過生活中的實踐與探索，學生能夠更深入地感受數學的樂趣，進一步培養對數學的正向態度與學習動機。

研究者發現許多學生對數學缺乏感受，往往只是機械性地記憶與計算，卻不了解解題的意義與實際應用，也缺乏系統性的思考與連結，最終導致學習動機與興趣的喪失，甚為可惜。舉例的學習可以引動學生將數學與生活相結合，

提升數學學習的興趣、動力，甚至系統性的學習能力。因此，本研究聚焦於低年級學生，期望透過李源順教授提出的「舉例」教學策略，提升其學習數學的態度與興趣。

二、研究目的

根據上述研究動機，研究者以任教班級(一年級)學生為觀察對象，在數學課堂的教學活動中，融入數學感教育「舉例」的教學策略，探討學生舉例能力的變化及數學學習的表現。因此本研究目的聚焦在以下的問題來探討：

1. 學生整體舉例的正確性、完整性變化如何？
2. 為什麼學生舉例能力會有這樣的改變？

貳、文獻探討

一、數學感與教、學策略

李源順與林福來（1998）擴展美國全國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）和 Resnick（1987）對數感的定義，定義「數學感(Mathematical Sense)」是「人們能從數學材料中抽取其直觀意義的高層次思維。」這種直觀的高層次思維能讓學習者自然的連結到曾學過的數學知識，提取所需的數學概念。正因數學感是高層次的思維方式，更應該從小開始學習培養，養成一種習慣。

李源順（1999）進一步提出一個起動機制、五個核心內涵的教與學一致的策略。其中，舉例是讓學生對數學有感的第一個核心內涵。此外舉例還能連結真實生活，還能使學生了解數學的有用性，產生數學學習的興趣。若學生養成對任何概念都能舉例的習慣與能力，相信學生能養成有感、有系統的學習能力。

二、舉例

舉例(Giving example)是要學生舉出例子（李源順，2022），例如一開始學習數字時，讓學生舉例，觀察教室裡、生活周遭，找找看有沒有相對應數量的物品，像是同學有兩隻眼睛、教室有四扇門等等，或是想想看能用 2+5=7 的算式算出答案的文字題、應用問題等，其目的都是讓學生根據自己的觀察、經驗想出相關的內容或改寫創造出不同的題目，後者又稱擬題(problem posing)。

對於擬題國內外已有諸多研究，不同的學者們也不同的見解，學者梁淑坤等 (1999)則將擬題定義為：自己想出一個數學題目。在擬題的過程中，擬題者會用自己的數學知識和生活經驗把情境、人物、事件、數字、圖形等建立關係並組織起來，擬出一個數學題目。Cai 等人（2012）認為透過修改與比較問題的不同元素，可以提升學生對數學問題結構與意義的理解。這與舉例策略的核心理念一致，即讓學生透過具體例題，觀察、修改與建構新問題，從而增強其數學推理與問題解決能力。因此，舉例策略將幫助學生在學習數學時發展更靈活的思維模式。

根據以上相關的文獻，研究者認為在舉例的過程中，學生會依照自己的數學知識和生活經驗，將所知道的情境、人物、事件、數字、圖形等組織起來，擬寫出一個新的數學題目，是一個個人化的歷程，是一個主動運用認知基模的

建構活動。

由李源順（2022）提出的舉例，不只由舊題目開發出新題目，還能含括更多的概念，例如：請舉出生活中能看到的長方形。學童在舉例之前，必須先了解長方形的性質，再由平時的觀察，找出有相同性質的物體，藉此訓練學童找元素、找關聯的能力。要讓學生對所學的算式、概念有確實了解，也知道如何應用。此策略會讓學生多觀察、多留意生活周遭的事物，也能培養孩子多思考、多聯想的能力，讓孩子對數學學習更加有感。

三、相關研究

林昭伶與李源順（2016）建議為求時間充裕，擬題教學活動可以獨立於數學課程的教學之外，也就是在教完課程中所要傳達知識技巧後，選取某些主題進行擬題活動、作品的分享。林秀玲與李源順（2018）在研究中也表示舉例整體表現，一年級學童雖然對於書寫有侷限，但大部分學童會試著寫出東西來，學習意願較高，空白沒作答佔極少數。未來學習除了語意結構的不同文字題外，可以舉出不同運算結構的算式填充題，讓學生多舉例，運用生活經驗連結數學知識，強化概念的學習。黃佩岑與陳斐卿（2020）指出學生在進行數學擬題時，若能參考範例，往往能降低擬題的難度，並更容易掌握數學概念。

本研究的舉例能力培養是融入在課堂教學中，起初會請學生留意量詞的使用，提供範例供學生參考，同時避免過於密集對學生產生太大的壓力，所以大約一個月進行 1~2 次實作練習，也將研究時間拉長至 1 到 2 年。

參、研究方法

本研究採用個案研究法(Case Study)，採質量並重的方式，透過量化的分析及質化的探究，討論舉例融入數學領域教學對學生的影響。

對象為研究者所任教的國小班級，為位於臺北市的某公立學校一年級學生共 28 人：男生 17 人、女生 11 人，其中包含一名領有身心障礙手冊的特殊生(有情緒及注意力缺陷過動問題)及一名因自學而未參與的學生，扣除自學生後，實際研究樣本為 27 位。

因為研究對象為一年級學生，因此大約一個月進行 1~2 次實作練習，研究預計持續一年到兩年，目前進行近七個月，學生已完成多次的舉例(包含口頭、書面)練習，研究者運用這些資料配合其上課狀況進行比較分析。在教學中，研究者透過課堂中不斷的提問、追問，引發同學思考並說明理由；在解題教學時，教學生畫重點以分析理解題意；運用具體操作活動讓學生習得概念，並讓學生聯想相關經驗進行分享討論。

本研究運用舉例練習單融入教學的內容包括：上學期的 10 以內的數—舉出 1~5 相對數量的東西，分分看，合起來，10 以內的加法，10 以內的減法，以及下學期的 20 以內的加法。

針對不同主題設計不同的舉例練習，也有訂定的評分標準，重視單位要寫、單位一致、語意清楚，分數依回答的正確性、完整性，有 2 分—能舉出正確例子，1 分—舉出單位不一致或語意不完整，0 分—未呈現出正確概念或未填答的區別。

資料的收集包括舉例練習單，舉例活動的上課錄音、錄影，以及札記。舉例練習單題目是依據每單元的學習目標進行設計，再和數學教育專家學者、有

經驗的教師及同儕共同檢視，經過分析修改，作為最後正式的研究工具，因此具有內容效度及專家效度。之後再經由錄音、錄影資料，教學札記，以及學生的表現進行三角校正分析。

肆、研究結果

在分與合的單元，由於還沒有學習數學算式的寫法，所以是運用格子圖來表示分合的狀況。舉例練習單除了要學生自己舉出符合格子圖內的數字外，還要用文字敘述說明。Possamai 與 Allevato（2024）認為問題構思的過程可以從一個範例開始，學生可透過修改既有條件來創造新的數學情境。於是起初進行舉例練習時，在考量學生語文能力及文字表達還處於注音學習階段，所以練習單上有提供例子參考，作為學生學習舉例的鷹架之一。

一、上學期幾乎只有四成能完整舉例

（一）分與合

第一次正式書面舉例是分分看的練習，研究發現 2 分的 9 人(37.5%)、1 分的 4 人(16.7%)(缺少單位、不一致或缺少)、0 分的 11 人(45.8%)(語意不清、表達不完整)，平均 0.92 分(百分制 46 分)。代表多數的學生已了解分分看的數字概念而且可以用格子圖「分解」語意清楚表示，但仍有半數以上無法用圖或文字清楚表達舉例的學生。

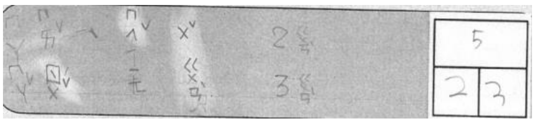
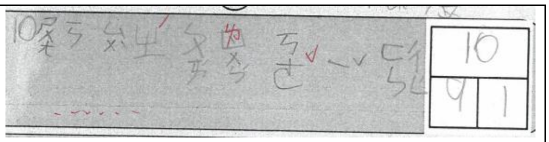
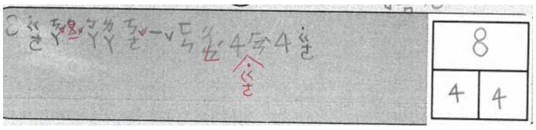
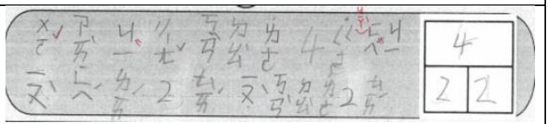
 媽媽買乳液每箱 5 罐，2 罐 3 罐	 10 雙音速直排輪可以分成
語意不完整-缺少「分解」語意	語意不完整
 8 個卡皮巴拉可以分成 4 和 4 個	 我在機場看到 4 個飛機，又飛來 2 臺又看到了 2 臺
缺少單位	語意錯誤、單位不一致

圖1 分分看:1 分的舉例(左排)、０分的舉例(右排)

在合起來的練習中，研究發現 2 分的 9 人(34.6%)、1 分的 9 人(34.6%) (缺少單位或「合起來」語意)、0 分的 8 人(30.8%)(語意不清、表達不完整、不符合題意)，平均 1.04 分(百分制 52 分)。平均分數有些微提升，探討退步的 4 位同學發現，2 分→1 分者共有 3 人，其中 2 人是因為有少單位、1 人少重點句；1 分→0 分者共有 1 人。維持 0 分者共有 5 人，其中 3 人從已從文句表達不清楚進步到能大致寫出意思，但未依題目主題故予以 0 分圖 2，其餘在文字語句的分析表達上仍需多引導加強。

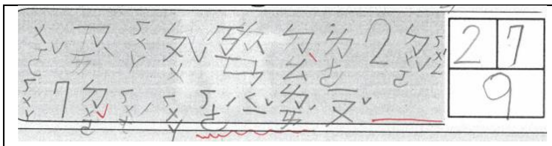
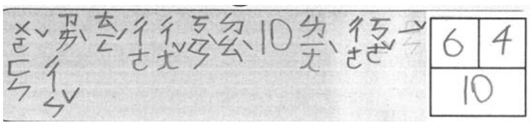
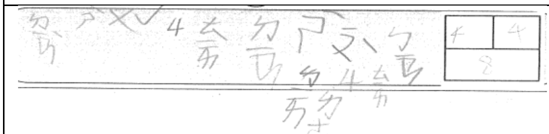
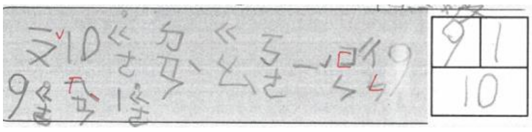
 我在花圃看到了2朵紅花、7朵黃花，合起來有	 我在停車場看到10輛車可以分成
語意不完整	不符合題意、語意不完整
 電視有4臺，電視又搬來了4臺	 有10個蛋糕可以分成9個和1個。
語意不完整	不符合題意(寫成分分看)

圖2 合起來:1分的舉例(左排)、0分的舉例(右排)

（二）十以內的加法和減法

在十以內的加法主題練習中，指定算式擬題的部分，2分的10人(38.5%)、1分的5人(19.2%) (缺問句或單位不一致)、0分的11人(42.3%) (類別有誤、空白、非指定數字)，平均0.96分(百分制48分)。此為一年級第一次接觸算式，舉例的題目要先知道算式的意思才能擬題，又要用問句方式表達，相比之前較為困難，和之前相關的主題-合起來相比，表現稍微退步。

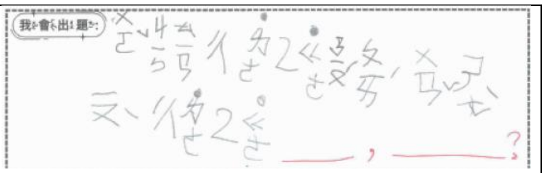
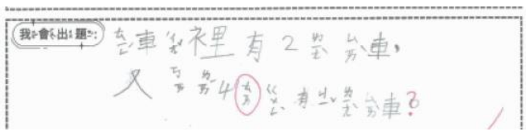
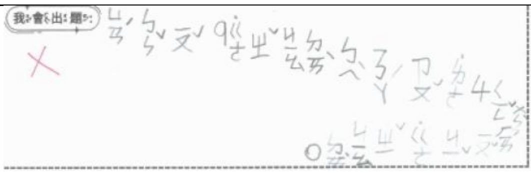
 家裡有2再買4=幾?	 我今天吃了2個牛排晚上又吃了2個
缺少單位、缺少物品	未按題目2+4=6舉例、缺少問句、單位應用「塊」
 停車場裡有2輛賽車，又開來4臺，共有幾輛賽車？	 原本有9個紙膠帶，被拿走了4，請問還有幾個紙膠帶？
單位不一致	未按題目2+4=6舉例、減法例子、缺少單位

圖3 十以內的加法:1分的舉例(左)、0分的舉例(右)

在十以內的減法主題練習中，指定算式擬題的部分，2分的9人(34.6%)、1分的3人(11.5%) (缺問句或單位不一致)、0分的14人(53.9%)(類別有誤、空白、非指定數字)，平均0.81分(百分制40.5分)。平均0分的人數看似變多，但其中包含6人雖因未按題目指定數字予以0分，內容卻是正確減法擬題圖4，若單純探討舉例正確性，排除非指定數字之錯誤，平均為1.27分(百分制63.5分)，代表學生舉例能力是有進步的，但讀題的耐心仍須培養。觀察圖4上方右例可發現，該學生已有連減的概念。

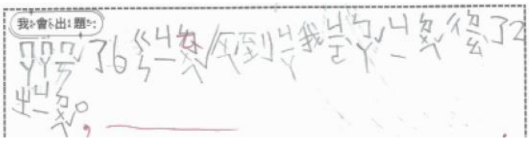
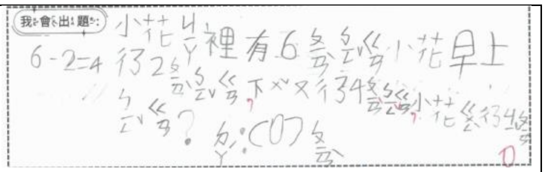
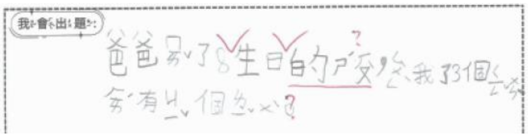
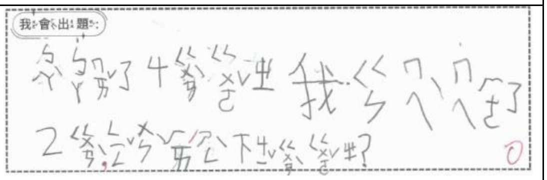
 媽媽買了 6 根雞腿，回到家，我就把雞腿吃掉了 2 隻雞腿	 小花家裡有 6 片餅乾，小花早上吃了 2 片餅乾，下午又吃了 4 片餅乾，小花共吃了幾片餅乾？
缺少問句	未按題目 6-2=4 舉例、出現連減概念
 爸爸買了 8 生日，送我了 3 個，請問還有幾個禮物？	 爸爸買了 4 罐果汁，我跟妹妹喝了 2 罐，請問還剩下幾罐果汁？
缺少單位、有贅詞及缺漏	未按題目 6-2=4 舉例

圖4 十以內的減法:1 分的舉例(左)、0 分的舉例(右)

二、下學期從進步到七成能完整舉例

進入到下學期的課程，在二十以內的加法主題的舉例練習中，除了原本有的指定算式舉例外，再加上了自由數字舉例的部分，在指定算式舉例中要寫出符合 8+8=16 文字問題，其中 2 分的 19 人(70.4%)、1 分的 4 人(14.8%) (缺問句或單位不一致)、0 分的 4 人(14.8%) (語意有誤、空白)，平均 1.56 分(百分制 78 分)，相比於十以內的加減法，舉例的正確性、完整性從近四成到超過七成，著實有大大的進步；在自由數字舉例中，沒有給予指定算式，要請同學自行設計加法問題，但被加數、加數與和都要小於 20，對學生是新的挑戰，其中 2 分的 16 人、1 分的 4 人(缺問句或單位不一致)、0 分的 7 人(語意有誤、空白)，平均 1.33 分(百分制 66.5 分)。自由數字舉例較指定算式舉例略為退步，原以為是自由數字舉例學生要考慮的面向比較多，要思考用什麼數字去加，要設計答案不超過 20 的題目，所以造成比較多缺漏，但實際上影響的原因是部分學生不清楚自由出題的意思，有 4 名學生只寫了算式沒有出題，有 1 名學生舉例正確但答案超過 20 的緣故。

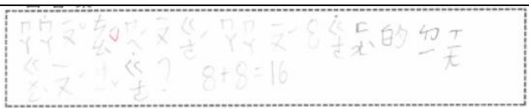
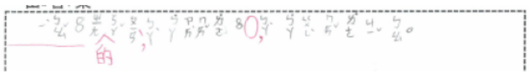
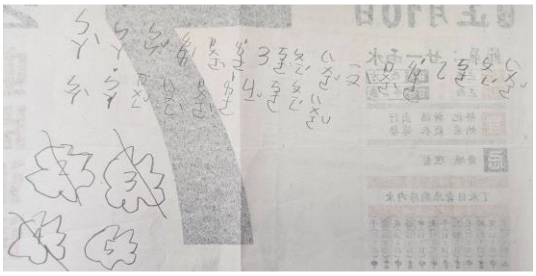
 媽媽有草莓優格，媽媽有 8 個放的地箱共有幾個?	 一包 8 張的卡片，爸爸再買 8 爸爸買了幾包。

圖5 指定算式擬題語意不清的範例

整體評估下來，在舉例策略融入教學後，學生舉例能力持續不斷的進步，而且學生會主動舉例給老師看，對學生學習數學的情意也有提升。圖 6 左例為低成就學生主動舉例的作品、右例則是特殊生主動舉例的作品，顯示即使是能力較差的同學，仍對舉例產生興趣，學生而言是一件有趣的事。

格子圖



爸爸本來做了 3 顆蘋果，又做了 2 顆蘋果，爸爸總共做了幾顆蘋果？

圖6 學生主動舉例

三、學生改變的原因

（一）暖身活動

對於一年級的學生而言，他們沒有什麼舉例的經驗，所以研究者在課堂上反覆運用問答的方式讓學生舉例，練習說得更清楚，同時學習正確的量詞：

T:小朋友，我們已經認識數字 1~5 了，我們可以運用這些數字來表示數量，請你想一想，生活中有什麼東西的數量可以用這些數字表示?以 4 當作例子:一隻狗有 4 條腿。換你想一想、說一說。

S_1:時鐘。

T:什麼意思呢?時鐘有很多個數字!

S_1:後面的時鐘有一個。

T:喔!教室裡有一個時鐘，請完整再說一次。

$S_{2\sim7}$:1 個鼻子、1 張桌卡、2 隻眼睛、2 個門、3 枝鉛筆(班上有規定鉛筆盒裡要有 3 枝鉛筆。)、3 個黑板。

T:3 片黑板。

（二）讓學生先想一想再說出來

在分與合的單元舉例教學，再度強調生活量詞的正確使用。同時也請學生事先思考、想一想可能的例子，再試著說出來。

T:老師要請每個人都先想好你要舉的例子，你想要分什麼東西分成兩堆的說法。假設老師要分小花，那抽到我的話，我就可以說 8，應該是 8 什麼小花？

S_S:是朵！

T:對，我就要說 8 朵小花可以分成 5 朵和 3 朵，所以你要自己想一下喔，然後等一下點到你就要講出來。每個人都要想好自己的例子，注意用的單位要對喔，就像老師剛剛說 8 朵小花，可不可以說 8 顆小花，不行啊，又不是 8 顆球，他應該是 8 朵小花，要講正確。

(抽籤，讓每個學生都發表。)

S_{13}: 10 雙直排輪鞋可以分成 6 雙和 4 雙。

S_{08}: 9 隻大鯨魚，可以分成 8 和 1。

T: 要講得再完整一點，我們剛說 7 顆球可以分成 3 顆和 4 顆。同學來，再一次，9 隻大鯨魚可以分成?

S_{08}: 8 和 1 隻

T:很好，8 隻和 1 隻，你的單位要講出來喔，8 是什麼，要講出來。

（三）讀題、找重點以了解重要概念

在加減法文字情境題的解題過程中，先進行讀題、找重點的問答，判斷詞句是否是解題需要的線索，可幫助學生在自行出題時更為完整；列出算式後每題都會再請同學解釋每個數字的意思、為什麼用加法、為什麼用減法，讓學生比較其不同，就不會搞錯。

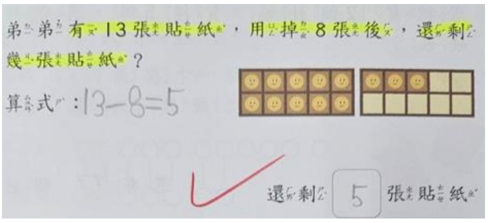


圖7 讀題目、畫重點

T:弟弟有什麼？
Ss:13 張貼紙。
T:接著發生什麼事？
Ss:用掉 8 張。
T:用掉 8 張會變多還是變少？
Ss:變少。
T:變少要用加的還是減的？
Ss:減的。
T:所以算式要怎麼寫？
Ss:13-8=5。
T:13 代表什麼意思？為什麼要用減的？8 代表什麼意思？5 代表什麼意思？想一想，等一下老師要請同學回答。

逐題練習，讓學生反覆的操作，同時大約 1 到 2 個月再練習舉例，養成學習的習慣，內化為系統性的思考，也確立學生了解題目、熟悉題目組成元素及之間的關係，培養舉例觀念。

伍、結論與建議

一、學生能完整舉例的比例從四成進步到七成

以剛進入小學的學生，先排除注音符號、國字表達上的差異，在舉例的表現上關注於舉例的正確性、完整性、符合題意、單位一致等標準，在七個多月的研究觀察下，能自行正確完整舉例的比例已從 37.5%提高到 70.4%，稍微有小缺漏的 16.7%降低到 14.8%，不能自行完整舉例的亦從 45.8%驟降到 14.8%，代表舉例策略融入教學後學生舉例能力已有大幅度的進步。

二、學生改變原因在於事前的口頭練習、注意量詞、示範與長期分散的學習

在進行舉例活動之前，為了讓學生可以進行更完整的敘述，所以在一開始學習 10 以內的數時，便讓學生口頭練習，聯想生活中有的數量，讓每個學生進行分享，回答時特別要求要完整性，表達數量要有數字、單位及物品(名詞)，注意單位要適切。一開始示範了許多例子，但同學似乎不太習慣這樣的敘述，即使聽了近一半的同學分享及修正，還是會有錯誤，不過由於有個別指導，後來進行舉例活動時，數量的表示進步許多，整題敘述上可能會有少數忘記部分單位，但很少出現完全沒有單位的狀況。在舉例的活動分散時間去安排、題數不多，讓學生養成一種習慣，會主動去想題目、找元素、找關聯，變成一件有趣的日常。

三、未來教學與研究建議

由於希望測得學生自行舉例的能力、又能顧及數學課堂的進度安排，所以練習單多於早自習時解說習寫，在上學期由於班上有許多孩子適應困難，會因遲到或早自習有其他任務而有缺交情況，雖是少數，但若能排除此情況更佳。

在多數學生能正確舉例後，可引導學生觀察不同的題型，比較異同，進一步研究學生的舉例題型是否更多元。

延伸至不同年級或不同學科，探討舉例策略的普適性。

參考文獻

Cai, J.、Moyer, J. C.、Wang, N.、Hwang, S.、Nie, B.、Garber, T. (2012). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 57-69.

Possamai, J. P.、Allevato, N. S. G. (2024). *Problem posing: Understandings.* Retrieved 2025 年 3 月 10 日.

Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think.* Washington, D.C.: NATIONAL ACADEMY PRESS.

李源順（1999）。**數學教師在校內互動促進自我專業發展的個案研究**（未出版之博士論文）。國立臺灣師範大學，台北市。

李源順（2022）。**數學這樣教：國小數學感教育**。臺北市：五南圖書出版。

李源順、林福來（1998）。校內數學教師專業發展的互動模式 。**師大學報，43（2）**， 1-23。

林秀玲、李源順（2018）。**五核心融入數單元之學習表現研究-以一年級整數加減法為例**（未出版之臺北市立大學數學系數學教育碩士在職專班論文）。臺北市立大學，臺北市。

林昭伶、李源順（2016）。**以擬題融入教學探討國小一年級童加減法之表現**（未出版之臺北市立大學數學系數學教育碩士在職專班論文）。臺北市立大學，臺北市。

教育部(2018). 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域.

教育部(2023). 國際數學與科學教育成就趨勢調查 2023.

黃佩岑、陳斐卿（2020）。國小學生數學自由擬題困難之初探。**弘光學報（85）**，59-80。

A preliminary study on integrating the mathematical sense " Giving example " strategy into the unit of first-grade mathematics

Yi-Chun Shih[1] Yuan-Shun Lee[2]
[1]Master's Program of Data Science and Mathematics Education for In-service Adults
[2]Department of Mathematics, University of Taipei

Abstract

The purpose of this study is to explore the effectiveness of integrating the "giving examples" strategy into the teaching of the number unit in first-grade mathematics and to investigate the reasons behind the observed changes. To achieve this goal, the researcher adopted a case study approach, utilizing example-based worksheets to analyze the development of first-grade students' ability to provide examples in the number unit.

Considering that students' writing skills are not yet fully developed, the entire class first practiced giving examples orally, with a focus on the correct use of quantifiers. Afterward, students transitioned to written exercises. Data collection and analysis included students' worksheets, teaching recordings (both audio and video), and teaching notes. To ensure the reliability and validity of the data analysis, content validity, expert validity, and triangulation methods were employed.

The study found that in the first semester, approximately 40% of students were able to provide complete examples. By the second semester, this percentage increased to 70% in addition problems within 20. The improvement in students' performance was linked to the teacher's emphasis on the correct use of real-life quantifiers, encouraging students to think before speaking, and guiding them to identify key points in textbook examples to understand essential concepts. Furthermore, students were given about one to two months before practicing example-giving, allowing them to gradually develop learning habits and internalize them as learning abilities.

Key words: giving-example, numbers and quantities, first grade mathematics

數學奠基模組融入國小六年級圓與扇形面積教學之

個案研究

許祖綺

國立清華大學數理教育研究所 hs100263@skps.hcc.edu.tw

摘要

本研究欲了解國小六年級學生對於數學奠基模組活動融入圓與扇形面積單元之「學習表現」與「學習態度」。研究採用個案研究法，研究者以一個班級的 5 位學生作為個案學生（偏鄉小校），希望透過在課堂中融入數學奠基活動，提升學生的「學習表現」與「學習態度」。為達到研究目的，本研究工具為前、後測試題與學習回饋單，以及對學生的解題進行資料分析，探討學生的學習情形與學習表現。研究結果發現個案學生學習狀況如下：一、課堂融入數學奠基模組活動有助於提升學生學習表現；二、課堂融入數學奠基模組活動有助於提升學生學習態度。透過此發現，希望提供研究者對於探究學童在國小六年級學習圓與扇形面積單元時能有更多面向的參考。

關鍵字：數學奠基模組、圓與扇形面積

壹、緒論

本研究旨在探討數學奠基模組融入國小六年級圓與扇形面積教學之個案研究，以下依序說明本研究之研究動機與研究目的。

一、研究動機

十二年國民基本教育數學領域課程綱要中提出，幾何是一項重要的學習主題，同時幾何概念在日常生活中又扮演著重要的角色，不僅能應用在日常生活中，且其概念更有助於代數與其他數學領域的問題解決，然而在國小學習階段，圓與扇形面積單元對於大多數學生而言是較抽象、較困難的課程內容，讓許多學生感到抗拒與學習低落的情況。許多相關研究也指出學生在圓與扇形面積單元學習上受到較多迷思概念影響。蔡沅叡(2021)指出學生在辨認或描述圖形的關鍵因素或傾向，可能受到圖形大小、方位或封閉性等影響，進而產生迷思概念。更有學者指出若學生對於圓形和複合圖形面積解題的先備知識不足、概念錯誤、欠缺運算能力，則容易因失敗而受到挫折，影響日後之數學學習成效，也漸漸失去學習數學的動機(翁詩茹，2009)。

因此為了提升學生學習動機，本研究結合國立臺灣師範大學數學教育中心於 2014 年推動「就是要學好數學(JUST DO MATH)」計畫中開發的「數學奠基模組—扇形旋風」活動，，針對國小六年級學生在學習圓與扇形單元而設計的教學活動，期望為個案學生建立圓與扇形面積的學習基礎。

二、研究目的

根據上述研究動機，本研究旨在探討國小六年級，提出研究目的如下：

（一）國小學生在接受數學奠基模組融入教學後，學習表現為何？

（二）國小學生在接受數學奠基模組融入教學後，學習態度為何？

貳、文獻探討

一、奠基活動模組之理論與現況

教育部為提升低成就學生的學習狀況，自民國 95 年推動「攜手計畫—課後扶助」，採取課後補救教學，雖提升學習成效，但學生的學習興趣未見改善。專家建議應重視事前奠基，因此教育部與數學學科中心合作，於 2014 年推動「就是要學好數學（JUST DO MATH）」計畫，結合專家、學者共同參與與研發，設計出一系列相關數學活動模組，並與「國民小學及國民中學補救教學實施方案」相輔相成，共同提升學生的數學學習成效（臺灣師範大學數學教育中心網站，2025）。

此計畫旨在幫助低成就學生建立數學學習基礎。其目標包括：透過有趣的數學活動提升學習興趣、利用數學義診診斷學生困難並提供適當指導、以及培育數學模組活動師與講師，結合數學輔導團與學校資源協助學生學習。奠基活動會讓學生在正式學習數學概念前，先透過操作性活動，提升學生對數學的興趣，同時激發學生的學習動機，在課堂中更能讓學生將數學奠基活動內容與數學單元做連結，建立起學生的具象經驗，並促使學生願意主動探索數學問題。

目前數學奠基活動模組是針對國小中、高年級，以及國中階段的數學科重要概念來發展設計，希望能透過讓學生具體操作的過程，將較抽象的數學概念轉為較具象的經驗，為日後學習做奠基。在「就是要學好數學（JUST DO MATH）」計畫中，更以「十二年國民基本教育課程綱要」將數學領域分的七大主題類別：數與量（N）、空間與形狀（S）、關係（R）、坐標幾何（G）、代數（A）、函數（F）、資料與不確定性（D），並將每一模組詳加歸類。其中數與量、空間與形狀、關係為國小階段著重的學習重點，國中開始轉換發展標幾何、代數、函數及資料與不確定性。根據臺灣師範大學數學教育中心（2025）資料顯示，自 103 至 106 年度，本計畫針對國小中年級、國小高年級、國中一、二年級學生研發的數學奠基模組共 175 件，112 年度辦理的學習活動設計工作坊，共設計 3 件，累計共 178 件。本研究選用陳瑞華、蔡瑞寶、杜昭宜和胡哲瑋等四位老師所共同設計之「扇形旋風」活動模組，透過實際拼排扇形，以及在遊戲中出牌及吃牌的過程覺察「分數」與「圓心角」之間的關係，以利於對扇形面積公式的理解。

二、圓與扇形面積教材之分析

面積指的是一個封閉區域內平面的大小，可以用多個單位面積來測量其覆蓋程度。作為一種二維度量概念，學生從國小二年級開始學習面積，並在學習此概念前先接觸乘法。二年級的教學重點是透過數格子的方式來理解面積；三

年級學習平方公分的概念；四年級則進一步學習平方公尺，並計算正方形與長方形的面積；五年級開始接觸平方公里、公畝、公頃，以及梯形和平行四邊形的面積計算；六年級則學習圓面積、扇形面積等較為複雜的面積計算方式(蔡佩芳，2021)。

根據 108 課綱，國小數學的教學目標被劃分為三個階段：第一階段（1～2年級）、第二階段（3～4 年級）和第三階段（5～6 年級）。在第三階段的圓與扇形面積學習內容中，對概念的描述更加詳細，例如提供教具示例、透過圖像表徵呈現部分教學內容、擴展學習範圍，以及說明可能的錯誤類型與注意事項等(蔡沅叡，2021)。因此，學生在國小高年級才開始接觸複合扇形的面積計算，而低年級主要透過操作活動培養對圖形的基本概念，中年級則學習圖形的構成要素與性質，並逐步引入測量概念，最終在高年級掌握面積計算的方法與技巧。

在國小數學課程的第三階段（5～6 年級），複合扇形面積的計算內容屬於「幾何」與「數與量」能力指標（S-3-07）。學習目標是理解圓面積與圓周長的公式，並能計算簡單的扇形面積。主要的教學內容包括認識圓周率的來源、圓周長與圓面積公式的推導原理，並在學習圓面積的基礎上，進一步掌握扇形面積的計算方法。

然而根據黃翊庭(2009)的研究中提及，學童在學習圓的相關單元時，需要具備幾何推理與理解能力，若學童此方面的能力較不足時，往往會產生許多迷思或錯誤概念。在翁詩茹(2009)的研究中也指出，學童在圓的保留概念與測量概念方面，容易受到直覺估測的影響，從而產生迷思。圓形及圓的複合圖形常見的迷思主要包括三項：「誤用面積公式」、「對圓的基本概念不夠穩固」以及「無法判別複合圖形的組成」。因此本研究將著重於探討學生對於圓與扇形面積的了解，以幫助其在概念與解題上能更加得心應手。

三、資訊科技融入教學之目的與相關研究

本研究著重於數學奠基模組活動的課程，但隨著科技的快速發展，資訊科技已成為現代教育不可或缺的元素，影響學習工具、學習環境及教學模式的轉變。在資訊教育的推動下，學校需建構適性且友善的學習環境，透過科技工具、資源與材料，引導學生進行觀察、體驗與分析，並利用相關科技解決問題，因此在課程中，也會將資訊科技融入課程。學生不僅能培養動手實作的能力，更能發展高層次思維，如創造性思考、邏輯與運算思維、批判性思考與問題解決能力(蔡怡亭，2022)。

此外，根據許皓韋(2023)提及資訊科技的發展讓學習範圍不再受限於教科書，傳統的教學關係也需隨之調整，以符合當代學習需求。台灣當前的資訊教育強調提升學校的軟硬體設備與數位資源，並期望教師能將資訊科技融入教學，以促進學生的深度學習與 21 世紀關鍵核心能力的發展，如批判思考、創意思考、溝通表達與合作學習等。

國內也有許多學者的研究皆指出資訊科技融入教學對於學習有許多幫助，例如陳慧玲（2015）發現，資訊科技融入教學能提升學生的學習滿意度與學習態度，學生對課程內容的接受度與學習動機均有所提升。另外，張珮筠（2016）研究也指出，透過資訊科技輔助七巧板幾何教學，學生的幾何概念理解與空間能力均有顯著提升，顯示科技能強化低年級學童的抽象思維與圖形辨識能力。

由此可知，資訊科技融入教學不僅是一種教學的新潮流，還能提升學生學習動機與學習成效。故本研究也會輔以平板最為教學工具，並利用動態幾何軟體GeoGebra和數學互動式網站Polypad等線上資源融入「圓與扇形面積」的教學活動中，期望能提升學生的學習動機與學習成效，並陶冶其科技素養的能力。

參、研究方法

一、研究方法與設計

本研究採用個案研究法，旨在探究數學奠基活動和虛擬教具融入教學對於學生在學習圓與扇形面積單元之學習成效。此研究法的優點在於搜集資料較多元且彈性，可以深入了解與分析個案學生在教學活動中的學習表現與學習成效。

研究者在設計教學活動時主要是結合國立臺灣師範大學數學教育中心開發的「數學奠基模組—扇形旋風」活動，以「奠基」的理念為基礎，在課程學習前，先透過具體可操作的圖卡附件，運用小組合作的模式，將活動的觀察與結果紀錄在學習單上，再搭配平板實際操作 Polypad 和 GeoGebra 的虛擬教具，輔以學生理解扇形複合圖形的解題方法，同時激發學生對於此課程的學習動機與興趣，而教師也可藉由此活動觀察學生在操作時的表現，理解數學奠基模組以及虛擬教具對於學生學習表現。教學設計流程如圖 1 所示：

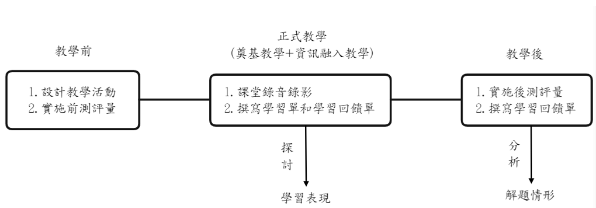


圖 1 教學設計流程圖

二、研究對象

本研究對象為新竹縣某國小，此校位於台三線上之地區，雖然不屬於教育部定義之偏鄉學校，但學校班級總數共六班，全校學生人數僅有 20 人。在同儕刺激較少的學習環境，以及大部分家長對於學生期望不高的環境中，孩子無法感受到學習的重要性，因此學生在學科表現上，漸漸失去自信，變得越來越不喜歡數學，學習成就與興趣更是低落。

因此本研究針對六年級五位個案學生進行個案研究，其中男生 1 人，女生 4 人，以下將分別介紹五位個案的學習特質與學習表現，如下表 1 所示：

表 1 研究對象說明

	S1	S2	S3	S4	S5
性別	男	女	女	女	女
學習特質	學習興趣較低落，偶爾會向師長或同學請益解惑。	有學習意願，常向師長與同學請益解惑。	學習興趣中等，偶爾會向師長或同學請益解惑。	有學習意願，常向師長與同學請益解惑。	學習興趣較低落，較不主動向師長或同學請益解惑。
學習表現	單元概念較不穩固、概念間的組織能里與理解能力可、基本計算容易出錯。	單元概念相較穩固，理解題意能力佳，基本計算能力可。	單元概念較不穩固、概念間的組織能里與理解能力可、基本計算偶爾出錯。	單元概念相較穩固，邏輯推理能力好、理解題意能力佳，基本計算能力可。	文字題受限題意無法理解所以解題表現差、單元概念較不穩固、基本計算容易出錯。

三、資料搜集與分析

本研究採用國小六年級上學期康軒版教科書「圓與扇形的面積」的單元，研究者會著重於教學的過程，研究過程共計四堂課，每堂課 40 分鐘，共 160 分鐘的資料搜集，教學活動如下表 2 所示：

表 2 本研究教學活動規劃

節次	教學活動	教學重點	教學輔助工具
第一節	實施前測 扇形旋風蒐基活動	1. 透過拼排扇形，覺察「分數」與「圓心角」的關係， 2. 透過操作，熟練「分數與圓心角間的轉換」(如圖 2)	前測試卷、 扇形旋風教具、 蒐基活動學習單
第二節	扇形面積教學	會運用扇形面積公式計算出面積	課本
第三節	融入資訊工具 (Polypad) (https://reurl.cc/W04A0Z)	操作 Polypad 拼排圖形，找到計算扇形複合圖形面積的方法或解題策略(如圖 3、圖 4)	平板

第四節	融入資訊工具（GeoGebra）(https://reurl.cc/eM5GGM) 實施後測	運用 GeoGebra 的動態互動功能，讓學生理解幾何圖形的變化性與不同思考策略(如圖 5)	平板、學習回饋單、後測試題

圖 2 扇形旋風萸基模組

圖 3 融入資訊工具 Polypad

圖 4 融入資訊工具 Polypad

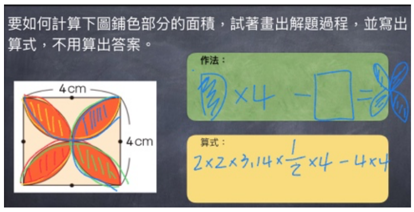


圖 5 融入資訊工具 GeoGebra

資料搜集內容包含前、後測試卷、萸基活動學習單、學習回饋單，且全程配合錄音錄影，接著再對學生的解題進行分析，以探討學生的學習情形與學習表現。以下將說明此研究搜集資料的使用目的和使用方式，如下表 3 所示：

表 3 研究資料搜集與分析

資料搜集種類	使用目的	使用時機
前、後測試卷	了解個案學生在課程前後的解題表現，作為分析解題歷程的探討。	前測試卷在第一堂上課前施測，後測試卷在第四節課後施測。
萸基活動學習單	紀錄學生在數學萸基活動上的表現。	搭配數學萸基活動融入課堂使用，搜集紙本資料。
學習回饋單	了解學生對於課堂活動的心得與想法。	課堂結束後使用，搜集紙本資料。

肆、研究結果

一、課堂融入數學萸基模組活動有助於提升學生對圓與扇形面積的學習表現

此節主要是針對研究者在實施萸基活動前後，學生在圓與扇形面積的解題計算上的改變進行說明。研究者將利用學生在活動前後所施測的前、後測試卷試題進行資料統整與分析，以了解學生對於課堂融入數學萸基模組活動的學習表現，由於受篇幅限制影響，以下將以前、後測試卷中的第 7 題（如圖 6）進行說明。

7.請問下圖鋪色部分的面積大約是多少？

圖 6 前、後測試卷的第 7 題（左圖為前測試題，右圖為後測試題）

經由分析得知試卷第 7 題的答對率從前測的 20%，到後測的答對率已達 100%（如表 4），以個案學童 S1 作答為例(如圖 7)，發現學生對於複合扇形題型的概念很模糊，從算式中可知，學生將大正方形拆成四個小正方形，計算出面積為 80 後，卻又寫出 10×10÷2 的算式；再以 S5 學生作答為例(如圖 8)，可以發現學生將面積與周長計算方式混淆，因此在解題策略上需要更多進一步的討論，也提供研究者對日後萁基模組融入課堂調整的依據。

表 4 前、後測試卷第 7 題的作答情況

	前測	後測
S1	0	1
S2	0	1
S3	0	1
S4	1	1
S5	0	1
答對率	20%	100%

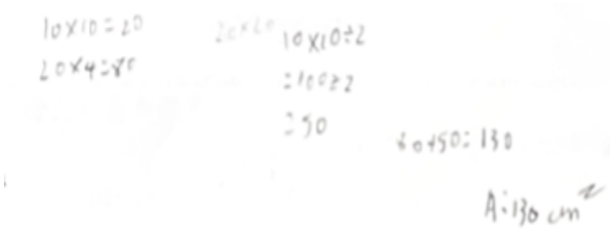


圖 7 S1 學生作答情形

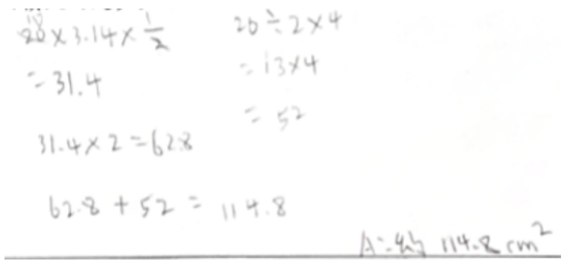


圖 8 S5 學生作答情形

二、課堂融入數學萁基模組活動有助於提升學生學習態度

此節主要是針對研究者在實施萁基活動之後，學生在數學學習態度上的改變進行說明。研究者將利用學生在活動進行之後所填寫的學習回饋單進行資料統整與分析，以了解學生對於課堂融入數學萁基模組活動的感受與心得。

透過與學生的相處與平時的觀察中，可發現學生不喜歡數學的原因多是上課聽不懂，以及認為數學就是要不斷進行計算的課程，因此造成學生對於數學課持有負面看法，但在萁基融入後卻改變了對數學課的看法，在學習回饋單中，學生對於融入萁基模組的教學方式也給予了正面評價，如圖 9、10、11、12、13 所示：

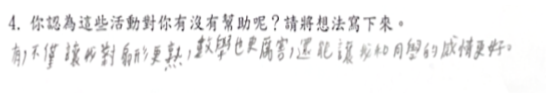

4. 你認為這些活動對你有沒有幫助呢？請將想法寫下來。
有,不僅讓我對扇形更熟,數學也更厲害,還能讓我和同學的感情更好。

圖 9　S1 學習回饋單

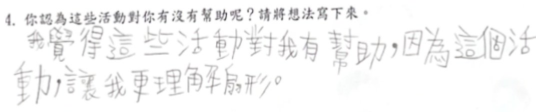

4. 你認為這些活動對你有沒有幫助呢？請將想法寫下來。
我覺得這些活動對我有幫助,因為這個活動,讓我更理解扇形。

圖 10　S2 學習回饋單

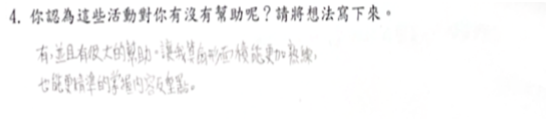

4. 你認為這些活動對你有沒有幫助呢？請將想法寫下來。
有,並且有很大的幫助,讓我算扇形面積能更加熟練,也能更精準的掌握內容及重點。

圖 11　S3 學習回饋單

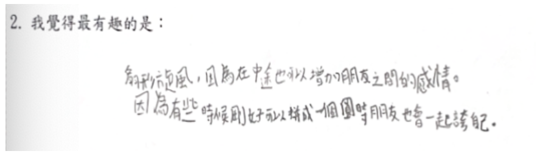

2. 我覺得最有趣的是：
扇形旋風,因為在中途也可以增加朋友之間的感情。

圖 12　S4 學習回饋單

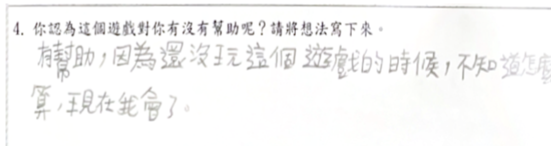

4. 你認為這個遊戲對你有沒有幫助呢？請將想法寫下來。
有幫助,因為還沒玩這個遊戲的時候,不知道怎麼算,現在我會了。

圖 13　S5 學習回饋單

從學習回饋單可以得知個案學童 S2 表示:「我覺得這些活動對我有幫助，因為這個活動讓我更理解扇形。」個案學童 S3 表示:「有，並且有很大的幫助，讓我算扇形面積能更加熟練，也能更精準的掌握內容及重點。」個案學童 S5 表示:「有幫助，因為還沒玩這個遊戲的時候，不知道怎麼算，現在我會了。」整理以上學生的回饋關鍵字多為好玩、有趣和理解扇形，透過學生的回饋也呈現了課程的多元與活潑，不再是靜態學習。

再從個案學童 S1 表示:「有，不僅讓我對扇形更熟，數學也更厲害，還能讓我和同學的感情更好。」以及個案學童 S4 表示:「我覺得最有趣的是扇形旋風，因為在中途也可以增加朋友之間的感情。」這些話讓研究者印象深刻，原來在學習過程中，往往只想要學生學習到該學的概念，沒想到透過這樣的活動，能讓學生更加發自內心的學習，也從中建立良好的同儕關係。

伍、結論與建議

一、結論

數學奠基模組融入教學前，研究者對個案學生實施前測，以了解學生在學習圓與扇形面積單元前的概念理解，發現個案學生有以下問題：

（一）學生在解題的過程中，因計算能力較弱而失了分數，寫完後也沒有再次檢查。

（二）個案學生對於計算圓與扇形面積的概念不夠清晰，以致造成解題錯誤。

（三）錯誤運用公式導致解題錯誤。

二、建議

為達成「探究六年級個案學童在數學奠基模組融入圓與扇形面積單元之學

習成效」之研究目的，研究者對自己任教國小的5位六年級個案學生進行課堂錄音錄影與實施前後測等方式的資料搜集與分析後，提出一些教學建議，以作為相關教學和未來後續研究之參考。

（一）鼓勵學生以多元的策略進行解題，以提升學生解決問題的靈活度。

（二）引導學生以畫圖方式，將圖形拆解後再進行計算，以免漏了步驟。

（三）在操作平板繪圖時，除了引導與適時給予協助外，還需了解其思考歷程。

致謝

感謝清華大學林勇吉教授在論文寫作過程中的指導與協助

參考文獻

翁詩茹(2009)。平板融入國小圓面積情境式數位遊戲之教學內容設計與評估（碩士論文）。國立清華大學，新竹。

陳慧玲(2015)。資訊科技融入教學、學習滿意度、學習態度及學習成效關係之研究（碩士論文）。大葉大學。彰化。

張珮筠(2016)。資訊科技融入教學對國小二年級學童幾何學習成效之研究-以七巧板為例（碩士論文）。國立臺北教育大學。臺北。

許皓韋(2023)。結合資訊工具GeoGebra的探究環教學架構法在國小六年級圓與扇形的面積單元之學習成效與回饋分析（碩士論文）。國立臺中教育大學。臺中。

黃翊庭(2019)。國小六年級學童「扇型面積」單元的錯誤類型分析-以台中市立某國民小學為例（碩士論文）。國立中興大學。臺中。

蔡佩芳(2021)。數學奠基活動融入周長與面積單元補救教學之研究（碩士論文）。國立臺東大學，臺東。

蔡沅叡(2021)。國小六年級學生扇形複合圖形面積之解題想法與表現（碩士論文）。國立臺中教育大學。臺中。

蔡怡亭(2022)。資訊科技融入教學之個案研究-以新北市N國小執行5g智慧學習應用計畫為例（碩士論文）。銘傳大學。臺北。

國立臺灣師範大學數學教育中心（2025）。就是要學好數學（Just do math）網站。https://www.sdime.ntnu.edu.tw

Abstract

This study aims to explore the "learning performance" and "learning attitude" of sixth-grade elementary school students when engaging in mathematics foundation module activities integrated into the unit on circle and sector areas. A case study method was adopted, with five students from a single class (a small rural school) serving as the case study participants. The goal was to enhance students' "learning performance" and "learning attitude" through the integration of mathematics foundation activities in the classroom. To achieve the research objectives, this study utilized pre- and post-tests, learning feedback forms, and data analysis of students' problem-solving processes to examine their learning conditions and performance. The findings revealed the following about the case study students: (1)Integrating mathematics foundation module activities into the classroom helps improve students' learning performance. (2)Integrating mathematics foundation module activities into the classroom helps enhance students' learning attitudes. Through these findings, this study aims to provide researchers with additional perspectives on elementary school students' learning experiences in the unit on circle and sector areas.

Keywords:Mathematics Foundation Module, Circle and Sector Areas

提升四年級學習扶助學生文字題解題能力之個案研究

劉家年[1]　陳建誠[2]
[1]桃園市平鎮區東安國小 aav600511@gmail.com
[2]國立臺北教育大學理學院數學暨資訊教育學系 jiancheng@mail.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在提升國小四年級學習扶助學生解決數學文字題的能力，涵蓋加減法單步驟與兩步驟文字題、乘除法單步驟文字題，以及加減混合乘除的兩步驟文字題。研究者結合多種解題歷程模式與自身的數學教學經驗，設計多元的解題課程，期望協助學生克服學習困難，強化對文字題的閱讀理解與表徵轉換能力，同時提升學習動機與自信，並藉由教學實踐促進自身專業成長。

本研究採用個案研究法，以研究者任教之學習扶助班級中 8 位學生為對象，實施四次聚焦不同題型的教學活動，內容涵蓋文字題解題能力與基本運算能力的培養。在研究過程中，研究者全面記錄並分析學生的學習表現與態度轉變，以探討教學成效。期盼本研究結果能為數學補救教學提供具體可行的策略與實施建議，作為日後教學改進與研究的參考依據。

關鍵字：數學文字題、學習扶助、個案研究法、補救教學

壹、緒論

一、研究動機與背景

為縮短學習落差、實踐教育公平，教育部推動「學習扶助」政策，針對學力未達標的學生提供即時且個別化的補救教學。研究者觀察到任教之學習扶助班級中的學生在數學文字題的解題能力普遍不足，決定結合教學實務與研究背景，進行補救教學介入，期望能強化學生對文字題的理解與解題能力，進而提升其後續學習表現。

進一步觀察發現，四年級學習扶助學生在四則運算與文字題的理解過程中，常見語意誤判、表徵轉換困難與計算能力薄弱等問題，導致無法順利完成題目。為協助學生突破學習瓶頸，研究者參考相關解題歷程模式，設計融入「畫重點」、「畫圖」與「實物操弄」等策略的教學方案，從語意理解、視覺表徵到操作實作等方面著手，期能提升學生解題信心與能力，有效縮小學習差距。

本研究共分為三個階段。第一階段為前測，旨在整理並分析學生在解答文字題時所面臨的困難。第二階段為教學實施，預計安排四次課程，每次兩節課，分別對應加減法一步驟文字題、加減法兩步驟文字題、乘除法一步驟文字題，以及加減混合乘除的兩步驟文字題。教學將安排在六月的前兩週進行，並於教學結束後進行後測，以檢驗學生的學習成效，同時透過學習單等研究工具記錄學生的學習歷程。第三階段則進行數據與資料的分析，並完成論文撰寫。由於目前研究尚在進行中，本次研討會僅針對前測結果進行分享。

二、研究問題與研究目的

(一)補救教學介入後，學習扶助學生在數學文字題解題表現上是否有所提升?

數學文字題不僅考驗學生的運算能力，更涉及語意理解與邏輯推理，對學習扶助學生而言更具挑戰。本研究所指的數學文字題，針對國小四年級學習扶助學生，教學內容限定於國小二、三年級的四則運算單元，涵蓋加減法一步驟與兩步驟文字題、乘除法一步驟文字題，以及加減混合乘除的兩步驟文字題。為評估補救教學成效，可透過前後測、學習歷程與錯誤類型分析進行多面向比較，並考量學生起點行為、教學策略的適切性及評量內容的全面性，作為後續教學調整與設計的依據。

(二)補救教學介入後，學生解文字題之解題表現改變歷程為何?

本研究旨在探討學習扶助學生在接受補救教學介入後，文字題解題表現的變化歷程。補救教學是指針對國小四年級學習扶助學生在數學四則運算文字題中，所面臨的語意理解與計算困難，所設計的補強性教學活動。學習扶助學生指的是在校內數學學力篩選測驗未通過，並經導師及教學者共同評估後確認學習需求，進而接受補救教學的學生。本研究透過課堂觀察、學習單、錯誤類型分析與訪談資料，描繪學生從理解困難到逐步掌握解題策略的轉變歷程，並進一步分析教學支援的成效與學生間的個別差異，真實呈現補救教學的歷程與價值。

貳、文獻探討

一、數學解題歷程探究與應用

(一)數學解題目的語意涵

古今中外學者對「解題」有多元詮釋。Polya（1945）認為解題是面對未知時，透過克服困難以達成目標的歷程。Kilpatrick（1985）從學生角度出發，指出解題具三層意義：一為學習新知的途徑，二為策略運用與思考訓練的實踐，三為培養數學信念與態度的歷程。Branca（1980）則強調解題兼具學習目標、歷程與基本技能三重角色，不僅能培養學生的應變與思考能力，也是現代教育不可或缺的核心素養。Mayer（1992）進一步指出，解題包含「已知狀態」、「目標狀態」與「障礙」，強調解題需運用認知策略從已知出發，克服困難以達成目標。

綜上所述，本研究所指之「解題」，係指學生運用既有知識與經驗，分析題目中的已知與未知之間的關係，轉化為可理解的形式，進而透過運算解決問題的歷程。

(二)解題歷程模式發展與比較

許多專家提出了不同的數學解題歷程模式，包括 Pólya（1945）、Mayer（1992）、Schonefeld(1985)、Krulik 與 Rudnick(1989)以及 Dewey(1910)等人的觀點。以下研究者自型整理這些學者的理論，並闡述本研究參考重點:

表 2-1

Polya 等五人解題歷程比較

學者 / 模式	步驟數	主要步驟	本研究參考重點
Polya	4	1. 理解問題 2. 訂定計畫 3. 執行計畫 4. 回顧與檢驗	Polya 引導性題問能凝聚學生思考並強化研究者解題歷程觀察。
Mayer	4	1. 問題轉譯 2. 問題整合 3. 解題計畫 4. 執行與監控	Mayer 知識分類助揭示學生解題需求，指引教學設計方向。
Schonfeld	6	1. 閱讀問題 2. 分析問題 3. 探索解法 4. 執行計畫 5. 回顧檢查 6. 延伸應用	Schonfeld 解題四變相助解析解題歷程、策略與信念，精準強化本論文教學設計與效益評估。
Krulik & Rudnick	5	1. 閱讀與思考 2. 探索與計畫 3. 選擇策略 4. 找出答案 5. 反思與延伸	Krulik & Rudnick 的自主思考重點，能強化本論文對解題教學的設計與學生能動學習觀點。
Dewey	5	1. 發現困難與問題 2. 確定問題 3. 提出假設與解決方案 4. 選擇方案 5. 執行與驗證結果	Dewey 的反省思考觀點，能深化本論文之教學與策略，引導學生從困惑中形成更深層學習。

資料來源:研究者自行整理

二、數學文字題

數學文字題可依運算符號與語意結構加以分類。其說明如下:

(一) 加減兩步驟依運算符號分類

表 2-2

兩步驟文字題題型分類

	a★b◆c	(a★b)◆c	a★(b◆c)
第一類 加減型	a+b+c	~~(a+b)+c~~	~~a+(b+c)~~
	a+b-c	~~(a+b)-c~~	~~a+(b-c)~~
	a-b+c	~~(a-b)+c~~	a-(b+c)
	a-b-c	~~(a-b)-c~~	a-(b-c)
第二類 加(減)乘型	a+b×c	(a+b)×c	~~a+(b×c)~~
	a-b×c	(a-b)×c	~~a-(b×c)~~
	a×b+c	~~(a×b)+c~~	a×(b+c)
	a×b-c	~~(a×b)−c~~	a×(b-c)
第三類 加減(除)型	a÷b+c	~~(a÷b)+c~~	a÷(b+c)
	a÷b−c	~~(a÷b)−c~~	a÷(b-c)
	a-b÷c	(a−b)÷c	~~a-(b÷c)~~
	a+b÷c	(a+b)÷c	~~a+(b÷c)~~

加減型題目若排除重複的運算方式，共可分為六種不同題型；第二類與第三類題型則預計合併進行教學，若同樣去除重複的運算，共計十六種題型。

資料來源:劉曼麗(2017)以線段圖融入動態評量設計分數兩步驟文字題補救教材

(二) 依語意結構分類

雖然從語意結構來看，加減法可分為四種類型，分別是改變型、合併型、比較型以及平衡型(陳建誠，2021)，但由於國小階段的課程尚未涵蓋平衡型的教學，因此本研究僅針對其餘三種類型進行設計與教學。

乘除法題型依據語意結構可區分為六種類型，但根據數學課綱(2022)的編排，一至三年級所涉及的除法文字題，主要包含等組型、倍數型與矩陣型。

綜合上述，本研究的加減兩步驟題型將聚焦於「比較型」結合「改變型」與「合併型」進行設計，並搭配第一類中所歸納出的六種題型；至於加減混合乘除的兩步驟題型，則以加減中的改變、合併與比較結構，結合乘除中的等組、倍數與矩陣關係，依據十六種不同的運算結構題型進行教學設計。

三、解文字題教學相關研究

(一)解文字題策略相關研究

數學文字題教學可結合圖示法、實物操弄與閱讀理解等策略，協助學生突破語意理解與表徵轉換的困難。Lesh 等人(1987)指出，數學學習涉及多種表徵系統，學生能在其中靈活轉換是解題關鍵。其中，實物操作有助於具體化抽象概念，閱讀策略則能協助擷取關鍵資訊並釐清題意(陳碧祥與魏佐容，2011)。整合多元策略不僅提升解題表現，也增強學習信心與理解力。

(二)解文字題教學方法相關研究

鷹架理論由 Wood、Bruner 與 Ross(1976)提出，指在學習者尚無法獨立完成任務時，由他人提供暫時性支援，隨能力提升再逐步撤除，理論基礎來自 Vygotsky(1978)的「最近發展區」(ZPD)。應用於數學文字題教學中，可透過圖示引導、語意拆解、提問提示與列式輔助等策略，協助學生釐清題意、建立數量關係，降低認知負荷並提升解題能力，特別有助於學習困難或低成就學生邁向自主學習。

參、研究方法

(一)研究設計

本研究採個案研究法，適用於探討具個別差異與發展脈絡的教學歷程。鈕文英與吳裕益（2024）指出，單一個案研究強調在自然情境中，透過觀察與資料蒐集，分析行為變化與介入成效，能有效評估教學實施並連結教育實務。

(二)研究場域與研究參與者

本研究於桃園市平鎮區一所中型國小進行，其中學生數學學習落差明顯。雖僅八位學生參與，研究旨在透過教學實踐探索有效的文字題解題策略，期望為校內更多數學低成就學生提供具體支援。

本研究的研究者同時為教學實踐者，畢業於中原大學應用數學系，目前於國立台北教育大學數學暨資訊教育學系數學教育組就讀在職碩士專班。同時擔任四年級數學科學習扶助教師。

本研究對象為本校四年級數學學習扶助的學生，共 8 人，其中男生 5 位、女生 3 位。研究者對每一位學生的學習起點做了簡單的分析，內容如下:

表 3-1

學生文字題解題情況概況表

代稱	性別	文字題解題狀況概述
S01	男	學生在乘除法混合題型上問題較大，雖然基本運算能力尚可，但經常因粗心大意導致錯誤。
S02	女	解題過程對乘法和除法的運算反應較慢，對於加減一步驟的題目仍存在明顯的困難，基礎運算能力需補強與提升。
S03	女	學生在解決加減文字題方面明顯存在困難，除法運算能力尚待加強，對乘除法文字題的理解與應用亦有待提升。
S04	女	學生整體表現穩定，但在加減兩步驟文字題上稍有困難，對乘除法文字題的理解與應用也需適度協助與引導。
S05	男	對於數字較大的計算時常出現問題，雖然閱讀理解能力較好，但解題時過於求快，經常導致判斷錯誤或計算失誤。
S06	男	閱讀題目時存在明顯困難，雖然基本運算能力較好，但經常因為理解不清而選錯運算方式，且時常粗心大意。
S07	男	乘除法運算上存在明顯問題，閱讀題目的能力也較弱，對於一步驟的題目仍有困難，甚至對文字題產生恐懼。
S08	男	學生在乘除法的基本概念及面對乘除法文字題的解題表現上皆有待加強，然而在加減法方面相對熟練，整體表現較為穩定。

資料來源:研究者自行整理

結果顯示，學生在文字題上的困難主要來自題意理解不足、數量關係不清與粗心錯誤，需透過針對性教學加以改善。

肆、研究結果

一、個案前測結果

(一)前測題型分析

第一次測驗題型分配				
單步驟	計算	加法	沒進位	1、
			有進位	5、
		減法	沒進位	2、3、
			有進位	4、
	語意	合併	加法	9
			減法	7
		改變	加法	
			減法	12
		比較	加法	6、13、16
			減法	1、10
		平衡	加法	2
			減法	11
多步驟	計算	加法		9、13、
		減法		11、15、
		加減合併		6、7、8、10、12、14

第二次測驗題型分配	
改變、改變	11、13、20
改變、合併	3、4、14、15、16、18
改變、比較	1、2、5、8、17
合併、合併	7、9、12
合併、比較	6、10、19

第三次測驗題型分配				
應用	除法	餘數	有餘數	無餘數
		包含除	6、9、13	3、10、19
		等分除	2、8、16	18
	乘法	等組型	5、12、20	
		倍數型	1、4、11、15、17	
		矩陣型	7、14	

圖 4-1 前測題型分類

本研究原先規劃進行兩次前測，第一次測驗涵蓋加減法的計算能力，以及單步驟與兩步驟的文字題。但因學生在兩步驟文字題錯誤率過高，資料難以進行有效分析，故研究者決定針對兩步驟題型另行實施一次前測，以更準確掌握學生的學習狀況。第三次測驗則針對乘除法的一步驟文字題進行評量。

	單步驟加減			兩步驟加減					乘除單步驟						
	改變型	合併型	比較型	改變+改變	改變+合併	改變+比較	合併+合併	合併+比較	包含除無餘數	包含除有餘數	等分除無餘數	等分除有餘數	等組型	倍數型	矩陣型
S01	●	▲	▲	●	●	X	●	X	▲	●	X	▲	▲	●	●
S02	●	●	X	X	●	X	●	X	●	▲	X	X	▲	X	●
S03	●	●	X	●	X	X	●	X	X	▲	X	X	X	X	▲
S04	●	●	●	X	●	X	●	X	▲	●	●	▲	▲	▲	X
S05	●	●	▲	X	▲	X	●	X	▲	●	●	●	▲	●	●
S06	▲	▲	X	▲	●	X	●	▲	X	▲	●	▲	●	●	●
S07	●	●	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	▲
S08	●	▲	▲	●	X	X	●	●	●	▲	▲	▲	X	X	X

圖 4-2 學生前測結果

圖 4-2 呈現八位學習扶助學生在前測中的錯誤類型與分布情形，其中以●代表正確解題，▲表示部分掌握，X 則代表明顯困難。單步驟文字題分為改變型、比較型與合併型；兩步驟文字題則由上述三種類型相互搭配，但因比較型搭配比較型的題目難度過高，因此未納入測驗範圍。乘除法部分，除法細分為包含除與等分除，並依有無餘數進一步區分為四種類型。特別針對餘數情形進行標示，原因是學生常出現餘數大於除數、商的位值錯誤或直式混淆等問題，反映其對除法原則與操作概念尚未熟練。乘法方面則依課綱安排，以等組型、倍數型與矩陣型為主要題型。

(二)個案前測結果分析

在加減法單步驟文字題的表現上，S01、S05 與 S08 整體尚可，基本能正確列式，僅在細節如進位遺漏或單位書寫錯誤等部分偶有失誤；S04 表現最為穩定，解題表現良好。相較之下，S02、S03 與 S07 表現較弱，特別在比較型題目上困難明顯；S06 則表現起伏不定，穩定性不足。

在加減法兩步驟文字題方面，各學生普遍在比較型題目上表現不佳，主要困難在於無法正確理解兩數之間的關係。其餘題型中，S01 表現相對穩定；S06 雖在比較型之外多為粗心所致，但因其在單步驟題目也常出現錯誤，顯示整體

解題狀態仍不穩定。S07則為本班表現最弱者，對於文字較多、結構較複雜的題目理解困難，無論題型皆明顯受挫，基礎能力有待補強。其餘方面，S02、S04與 S05 在「改變搭配改變」的題型上理解困難，S03 與 S08 則在「改變搭配合併」的題型上表現不佳。整體來看，除比較型題目外，多數學生在改變型題型上也仍有待加強，而對於合併類的題型則相對掌握較佳。

在乘除法表現方面，S05表現最佳，能正確完成列式，但仍偶有粗心，如位值未對齊、進位錯誤或單位書寫錯誤等情形。S01與S06在乘法題型掌握良好，但除法部分仍需加強。S02對等分除題型理解較弱，在乘法倍數型題目上也有待提升。S04 整體表現尚穩，但計算錯誤偏多，需加強細部運算。S08 在乘法掌握度不足，語意理解與運算策略皆需強化。至於S03與S07，在各類題型中表現普遍低落，基礎能力極需補強。

整體而言，部分學生在加減法單步驟的比較型題目上已出現理解困難，且在細節如進位與單位書寫上仍有待加強。兩步驟題中，以比較型與改變型題型最具挑戰，多數學生在語意理解與策略應用上明顯不足。乘除法方面，學生對倍數與等分概念掌握不一，除法的理解與計算表現普遍較為薄弱。

(三)個案錯誤類型分析

在文字題的解題過程中，最常見的錯誤類型是對語意的理解不足。學生常無法正確掌握題幹中關鍵語句所隱含的數量關係與邏輯順序，進而導致列式錯誤。例如，有些學生會將「多出」或「少了」這類比較語句直接視為加法或減法的固定對應，忽略語意中的角色關係與比較方向；或是在處理題目條件時忽視了前後順序與情境變化，導致所建構的運算式與實際問題不符。這些錯誤顯示學生在語意解析、資訊篩選，以及語言與數學之間的轉換能力仍待加強。

此外，學生對文字題中「關鍵字」的刻板印象，也是影響解題正確性的因素之一。例如在第一次測驗的第十三題：「小林有 834 本漫畫，比小明少 278 本，請問小明有多少本？」雖然題目中出現「少」字，許多學生便直覺使用減法，將「少」視為固定對應的運算方式，忽略了題意中小林是較少的一方，實際應求出的是小明的數量，因此正確列式應為 834+278=1112。然而，包括S02、S04、S06、S07 與 S08 等五位學生卻將其列為 834−278=556，顯示他們仍依賴表面詞彙作答，未能深入理解句意，建立正確的語意與數學之間的連結。

除了語意理解上的困難外，學生在作答過程中也常因粗心大意而出現非概念性錯誤，這些雖屬低層次失誤，卻對整體作答表現影響不小。以本次測驗結果為例，S03與S06曾出現正確列出兩步驟運算式，卻只完成其中一步，漏算另一步驟而導致錯誤。又如 S01、S02、S04、S05 與 S06，在進位計算時常出現應進未進的情況，顯示對位值與運算細節的注意力不足。此外，S01、S06 與 S08在橫式轉換為直式計算時，亦曾出現數字書寫錯誤或位置對齊錯誤的問題。單位書寫錯誤或遺漏也是常見情形，除了 S04 外幾乎每位學生都曾發生。這些錯誤其實可透過良好的檢查習慣有效預防，提醒我們在教學中應強化學生對書寫、格式與細節的自我審核能力。

另有一個值得關注的特殊例子，是 S05 在加減法計算上的處理方式。以第一次測驗的第十一題「501−162−166」為例，S05 先將兩個減數相減，算出 166−162=4，再以 501−4=497 作答；又如第十二題「800−499+101」，他先計算499+101=600，再以 800−600=200 為答案。這些作法雖表面看來快速，展現出某種程度的靈活性與反向思考能力，但實際上已涉及負數概念的應用，而該學生尚未接受正式的負數教學，若缺乏對數量關係的正確認知與支持性概念基礎，

反而容易造成概念偏誤。這提醒教師在教學過程中，不僅要強調標準運算順序，也應觀察學生是否出現「超前操作但概念未穩」的情形，並適時給予澄清與引導。

在乘法部分，學生普遍對兩數之間的關係理解不足，常因誤解語意而選錯運算方式。以第三次測驗的第十五題為例：「安安的錢是弟弟的 15 倍，若弟弟存了 300 元，安安有多少錢？」這是一道基本的乘法倍數型問題，應使用乘法計算 300×15。然而，包括 S02、S07 與 S08 在內的三位學生卻誤用除法，將題目中的「的幾倍」理解為需用較大的數字去除以較小的數字，顯示其對「倍數」概念與語意結構尚未建立清楚的認知。S03 則對本題完全未作答，可能因語意無法解析或缺乏信心而放棄。此現象反映學生不僅在語意理解上有困難，也可能因對乘除法語言表述缺乏經驗，而在實際應用中出現混淆。

在除法部分，學生普遍對「等分」的概念掌握較弱，導致在應用時常出現錯誤。以第十八題為例：「小名有 84 顆糖果，想平均分給 6 位朋友，每位朋友可分得多少顆糖果？」這是一題典型的等分除問題，應使用除法計算 84 ÷ 6 = 14。然而，學生表現卻呈現高度差異。S01 誤用乘法，可能混淆了「平均分」與「倍數」的語意結構；S02 則使用減法作答，顯示其未能理解等分的本質是將總數均等分配；S03 與 S07 空白未作答，推測可能因語意不清或不知從何下手；S08 雖使用了除法，但在計算過程中出現錯誤，顯示其對除法操作仍不熟練。這些情況說明，學生在面對「等分除」的語意時，未能將語言描述正確轉換為適當的數學操作，凸顯其在語意理解、運算選擇與實際執行三方面均有待加強。

在乘法計算方面，除了 S04 表現相對穩定外，其餘學生皆出現不同程度的計算錯誤。這些錯誤類型多樣，常見的包括乘法乘錯、位值對齊錯誤、加法運算中漏進位，以及單位未寫或書寫錯誤等。這些問題與學生在加減法中出現的粗心錯誤類型相似，只是因乘法運算步驟較多、位值結構更複雜，因而增加了出錯機會。整體而言，這類錯誤屬於非概念性的「粗心大意型」錯誤，並非理解上的障礙，只要學生能在計算後養成仔細檢查、逐步對照的習慣，便能大幅降低這些低層次錯誤的發生率，也能有效提升整體解題準確性。

在除法計算方面，學生普遍表現不如乘法，出現多項明顯錯誤。S02、S06、S07 與 S08 皆曾出現餘數大於或等於除數的情況，顯示其對於「餘數應小於除數」這一基本概念尚未建立，缺乏對除法中數量關係的正確認知。S03 則在面對除數為兩位數以上的計算時表現困難，可能與其乘法基礎不穩、位值判斷錯誤或長除法策略不熟悉有關。這些錯誤反映出學生在除法的基本操作與概念建構上仍有明顯不足。由於除法文字題通常需要學生先釐清語意中的「平均分」或「包含」的結構，再轉換為適當的數學式子進行計算，因此一旦除法計算能力不穩定，也會連帶影響其對文字題的整體理解與解題表現。

(四)前測結果分析總結

當本研究分析學生在文字題的解題表現時，發現最常見的錯誤來自語意理解不足與粗心大意。學生常因誤解語句中的數量關係或受關鍵詞刻板印象影響，導致運算方向錯誤。此外，許多學生在乘除法的應用上未能掌握「倍數」與「等分」等語意結構，顯示其對基本概念的認知尚不穩固。計算方面則普遍出現進位錯誤、位值對齊不當、單位遺漏及餘數錯誤等低層次失誤。這些錯誤不僅反映學生在語言與數學轉換間的困難，也凸顯其基本運算與檢查習慣的缺乏。整體而言，學生解題困難的成因多元，教師應在教學中加強語意辨識、概念釐清與自我檢核能力的培養，以提升學生對文字題的理解與解題準確性。

參考文獻

Branca, N. A. (1990). Problem solving as a goal, process, and basic skill. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 3–8). Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Dewey, J. (1910). *How we think*. D.C. Heath & Co. Publishers.

Krulik, S. K., & Rudnick, J. A. (1989). *Problem solving: A handbook for senior high school teachers*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Vygotsky, L. S. (1978). ***Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes***. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, **17**(2), 89–100.

張新仁（2001）。實施補救教學之課程與教學設計，教育學刊，17，85-106。

教育部（2022）。**教育部國民及學前教育署補助辦理國民小學及國民中學學生學習扶助作業要點修正規定**。

教育部國民及學前教育署（2022）。*十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域*（版本 2022 年 8 月）。教育部國教署。https://www.k12ea.gov.tw/class_schema/12-1-math

康淑娟、劉祥通(2010)。數學提問教學之探討與應用。*科學教育月刊*, 333，2-18。

陳建誠（2021）。整數。陳嘉皇（主編），**素養導向之國小數學領域教材教法**（第 49 – 59 頁）。臺北市：教育出版社。

鈕文英、吳裕益（2024）。單一個案研究法：設計與實施（第 2 版）。心理出版社。

劉曼麗（2017）。以線段圖融入動態評量設計分數兩步驟文字題補救教材與教學。*國立臺南大學教育研究所碩士論文*，臺南市。

A Case Study of Enhancing Fourth-Grade Students Ability to Solve Word Problems

Jia-Nian Liu[1] Jian-Cheng Chen[2]
[1] Taoyuan Municipal Dong An Elementary School
[2] Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Abstract

This study aims to enhance the ability of fourth-grade students in a remedial education program to solve mathematical word problems. The instruction covers single-step addition and subtraction problems, two-step addition and subtraction problems, single-step multiplication and division problems, as well as two-step problems involving a combination of addition, subtraction, multiplication, and division. Drawing from various problem-solving process models and the researcher's own teaching experience, a series of problem-solving lessons were designed to help students overcome learning obstacles, strengthen their reading comprehension and representational transformation skills related to word problems, boost their learning motivation and confidence, and support the researcher’s professional growth through teaching practice.

A case study methodology was adopted, with eight students from the researcher’s remedial class as participants. Four instructional activities were conducted, each focusing on a different type of word problem, aiming to develop both problem-solving and basic computational skills. Throughout the study, students’ learning performance and changes in attitude were thoroughly documented and analyzed to evaluate the effectiveness of the instruction. It is hoped that the findings of this study will offer practical strategies and implementation suggestions for remedial mathematics instruction and serve as a reference for future teaching improvements and research.

運用Polya解題策略教學降低五年級學生數學學習焦慮之行動研究-以臺中市某國小為例

林佳儀[1] 蘇柏鑫[2]
[1]臺中市大肚區大肚國民小學 jrppa05@gmail.com
[2]臺中教育大學數學教育學系 cliffgby@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究探討 Polya 解題策略對國小五年級學生數學焦慮的影響，採用行動研究方法，透過教學實踐驗證其對降低學生數學焦慮的有效性。數學焦慮會影響學生的學習態度與成就，而 Polya 四步解題法（理解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧反思）能幫助學生掌握解題流程，培養有條理的數學思維，提高解決問題的自主性，並增強學生面對挑戰的耐心與信心。

本研究以台中市某國小五年級23名學生為對象，透過數學焦慮量表前後測、學習單分析、教師觀察與學生晤談蒐集數據。研究結果顯示，學生的數學焦慮顯著下降，且部分學生表示解題時較不容易緊張，能更有條理地分析問題。在學習成效方面，第六單元測驗成績顯著提升，但第八、九單元未達顯著水準，顯示不同數學概念的學習仍受個別因素影響。學習單分析顯示，多數學生能依循 Polya 策略解題，但「回顧反思」步驟仍需加強。

整體而言，Polya 解題策略可能對減少數學焦慮有所幫助，並可能在部分單元促進學習成效。然而，影響學生學習的因素較為複雜，未來仍需進一步觀察其長期效果。此外，建議教師逐步引導學生熟悉策略，強化「回顧反思」，並適時調整教學方式，以提高學生對解題策略的適應與運用能力。

關鍵字：Polya 解題策略、數學焦慮、行動研究

壹、緒論

一、研究動機

數學焦慮（Mathematics anxiety）是一種廣泛存在於學生學習過程中的情緒問題，可能導致學生逃避數學學習、影響其解題表現，甚至影響未來的學業與職業發展（陳姿螢，2018；洪秀珍、謝臥龍、駱慧文，2015）。根據研究者在國小五年級的教學經驗，不論學生數學成績優劣，許多學生對數學科目普遍抱持負面態度，甚至表現出強烈的抗拒心理。有些學生因為過去的挫折經驗而對數學失去信心，另一些學生則因為長期處於壓力之下，害怕數學課堂的挑戰，而選擇被動學習或直接放棄，導致學習成就下降，形成惡性循環。

Polya（1945）所提出的解題策略四步驟——理解問題、擬定計畫、執行計畫與回顧反思——強調解題歷程的系統性，幫助學生掌握數學思考的脈絡，減少

因不知如何下手而產生的焦慮感。許多研究指出，當學生在解題過程中具備清晰的策略與指引時，能夠提升自信心，減少因失敗所帶來的焦慮（Foong, 2016；Ng, 2017)。然而，目前國內針對 Polya 解題策略與數學焦慮的關聯性探討較少，因此，本研究希望透過行動研究的方式，實際應用 Polya 解題策略於國小五年級數學課堂，並分析其對學生數學焦慮的影響，進一步探討是否能有效提升學生的學習成效。

二、研究背景

數學焦慮長期以來受到教育學者與心理學者的關注，研究顯示，數學焦慮可能來自多種因素，包括過去的學習經驗、教師教學方式、評量壓力、家庭環境以及社會文化對數學能力的刻板印象（甯自強，1982；魏麗敏，1989；黃庭鍾等，2011)。在台灣的教育現場，數學教學仍以傳統的直接講授、範例解說與習題演練為主，這種教學模式雖能有效訓練學生的計算能力，但可能忽略了學生在解題過程中的理解與思考，使部分學生在面對複雜問題時產生強烈的不安與無助感，進而加深數學焦慮。

近年來，國內外研究開始探討如何透過適當的教學策略來降低數學焦慮，提升學生的學習興趣與自信心。其中，問題導向學習（Problem-Based Learning, PBL)、合作學習(Collaborative Learning)、以及具結構性的解題策略(如 Polya 解題策略）均被認為是有效的方法（Santos & Semana, 2018)。這些教學策略的核心在於強調學生的思考歷程與問題解決能力，使學習不再僅限於公式與計算，而是透過系統性的解題步驟，幫助學生建立自信，減少因不確定性帶來的焦慮感。

本研究計畫透過行動研究的方式，將 Polya 解題策略融入五年級數學教學，並設計數學學習單以引導學生依照解題步驟思考與操作，期望能幫助學生建立解題信心、減少焦慮，並提升學習成效。此外，研究將透過數學焦慮前後測來評估 Polya 解題策略的實施成效，並進一步分析學生的學習單表現，以提供具體的數據與質性分析結果，為國小數學教學提供可行的教學建議。本研究不僅有助於理解 Polya 解題策略在實際教學情境中的影響，也希望能為未來小學數學教學設計提供參考方向，幫助更多學生克服數學學習的心理障礙，建立積極的學習態度。

三、研究目的

(一)探討 Polya 解題策略在五年級數學課程中的實施情形

(二)探討運用 Polya 解題策略教學對降低五年級學生數學學習焦慮之成效

貳、文獻探討

本研究探討Polya解題策略對國小五年級學生數學焦慮與學習成效的影響。文獻探討涵蓋 Polya 解題理論與數學焦慮，並進一步分析 Polya 策略在降低數學

焦慮的應用。

一、Polya 解題理論

Polya（1945）提出四步解題法：理解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧反思，透過結構化的解題歷程提升學生的數學思維與問題解決能力（Schoenfeld, 1985)。研究顯示，Polya 策略結合數位工具（林瓊如, 2020）、合作學習（陳書緯, 2016）與遊戲式學習（張慧韻, 2018）能顯著提升學生的數學學習表現與學習興趣。特別是在小學階段，透過策略性提問與後設認知訓練，能幫助學生更有條理地分析問題並減少錯誤（Santos & Semana, 2018)。此外，Polya 策略亦可提升學生的解題信心，並促進數學概念的深度學習（Foong, 2016; Ng, 2017)。

二、數學焦慮

數學焦慮（Mathematics Anxiety）由 Dreger & Aiken（1957）提出，指個體在數學學習情境中所感受到的緊張與壓力。其成因可分為認知干擾說（焦慮佔據工作記憶資源，使解題能力下降；Ashcraft, 2002）與能力下降說（數學能力不足導致焦慮感上升；LeFevre, 1992)。研究顯示，數學焦慮與學業成績呈負相關（Hembree, 1990; Maloney & Beilock, 2012)，且受家庭環境、教師教學方式與性別刻板印象等因素影響（魏麗敏, 1989; 黃庭鍾等, 2011)。近年來，數學焦慮亦被視為影響學生學習動機與學習效能的重要心理因素（Gunderson et al., 2021)。

三、Polya 策略對數學焦慮的影響

研究發現,Polya 策略可有效降低數學焦慮,並提升學生的數學學習信心(Ng, 2017; Santos & Semana, 2018)。透過結構化的解題步驟與策略性提問，學生能更有條理地拆解問題，減少因不確定性而產生的焦慮（Foong, 2016)。此外，當 Polya 策略結合合作學習、數位學習或遊戲式教學時，學生的學習動機與數學表現均顯著提升，數學焦慮則明顯下降（陳俊任, 2022; 楊季穎, 2023)。本研究參考此架構,設計行動方案以探討 Polya 策略對五年級學生數學焦慮的影響，並透過數學焦慮量表與學習成效評量驗證其成效。

參、研究設計與實施

本研究採行動研究法，探討 Polya 解題策略對五年級學生數學焦慮與學習成效的影響。研究透過三個循環（擬定策略、執行課程、資料蒐集與分析、反思與調整)，不斷調整教學策略，期望提升學生解題能力並降低數學焦慮。

一、研究設計

本研究結合質性與量化方法，質性部分包括教師觀察、反思日記、學生晤談與課堂錄影，量化部分則包含數學焦慮量表（前後測）及複習考成績分析。行動研究流程如下：

1. 發現問題：學生在數學解題時常因無法理解題意而產生焦慮，影響解題信心

與表現。
2. 擬定策略：導入 Polya 解題策略（理解問題、擬定計畫、執行計畫、回顧反思），設計系統化解題流程，以幫助學生掌握數學問題的解決方法。
3. 執行策略：教學分三階段實施，每階段透過教師示範、小組合作與個別輔導，提升學生策略應用能力與解題信心。
4. 資料蒐集與分析：透過數學焦慮量表測量學生焦慮變化，並記錄學習單、測驗表現與訪談回饋，分析 Polya 策略的影響。

二、研究架構圖

三、研究場域與對象

本研究於台中市某國小進行，對象為五年級某班 23 名學生（12 男 11 女），學生普遍缺乏數學學習信心，部分學生具數學焦慮現象。

四、研究工具

研究工具涵蓋數學焦慮量表、學習單、課堂錄音錄影、學生晤談及教師反思日記，透過多元資料交叉分析學生學習歷程與數學焦慮變化。

五、資料處理與分析

本研究透過量化分析（數學焦慮量表與測驗成績）與質性分析（學習單、訪談與課堂紀錄）評估教學成效，並使用配對樣本 t 檢定比較學生焦慮與學習表現的變化。

六、研究信實度與倫理

研究採三角檢證法提高信效度，確保數據完整性與客觀性。研究倫理方面，所有參與者均獲得家長同意，數據處理採匿名方式，以確保受試者隱私。

肆、研究結果

本研究探討 Polya 解題策略對於數學焦慮的影響，並透過量化與質性分析進行驗證。

一、數學焦慮

本研究結果顯示，學生的數學焦慮從前測平均 93.09 分（標準差= 26.73） 下降至後測平均 82.22 分（標準差=27.72），且配對樣本 t 檢定顯示 $t = 2.08$，$p = 0.049$，達統計顯著水準（$p < 0.05$），顯示 Polya 策略的教學對於降低學生的數學焦慮具有顯著成效。在晤談中，部分學生也表達出類似的感受，例如：

「現在解數學題比較不會那麼緊張了，因為有一個清楚的步驟可以照著做。」（低焦慮高成就學生）

「以前看到題目就想放棄，現在至少會試著想想可以怎麼做。」（高焦慮低成就學生）

這些回饋顯示，Polya 策略可能幫助學生減少數學焦慮，並提升解題信心。

二、學習成效趨勢

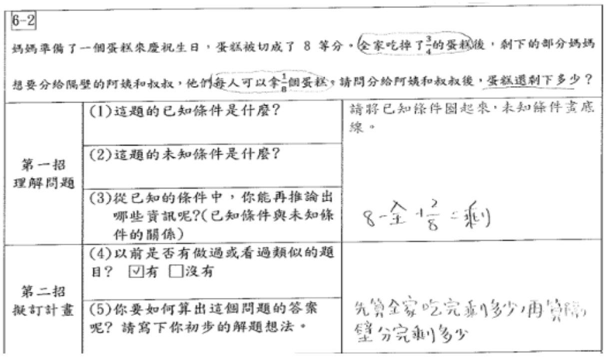
本研究評估了第六、八、九單元的學習成效變化，並透過配對樣本 t 檢定進行分析，結果如下：

- 第六單元：前測 7.91 分、後測 10.91 分（$t = -2.26$，$p = 0.034$），顯著提升。
- 第八單元：前測 11.96 分、後測 11.52 分（$t = 0.46$，$p = 0.652$），無顯著差異。
- 第九單元：前測 8.43 分、後測 10.09 分（$t = -1.54$，$p = 0.138$），無顯著差異。
- 總分：前測 28.30 分、後測 32.52 分（$t = -2.04$，$p = 0.053$），顯示提升趨勢但未達統計顯著水準。

學習單內容顯示，多數學生能按照 Polya 解題策略完整解題，包括理解題目、制定計畫、執行計畫與回顧反思。這與第六單元的顯著進步相符，顯示 Polya 策略可能幫助學生建立有系統的解題思維。學生晤談內容中提到：

「這次比較會找出題目裡的條件，知道先從哪裡開始解。」

「以前不會的題目只會亂猜，現在知道要先試著分析。」



6-2

媽媽準備了一個蛋糕來慶祝生日，蛋糕被切成了 8 等分。全家吃掉了$\frac{3}{4}$的蛋糕後，剩下的部分媽媽想要分給隔壁的阿姨和叔叔，他們每人可以拿$\frac{1}{8}$個蛋糕，請問分給阿姨和叔叔後，蛋糕還剩下多少？

第一招 理解問題	(1)這題的已知條件是什麼？	請將已知條件圈起來，未知條件畫底線。
	(2)這題的未知條件是什麼？	
	(3)從已知的條件中，你能再推論出哪些資訊呢?(已知條件與未知條件的關係)	8－全＋$\frac{2}{8}$＝剩
第二招 擬訂計畫	(4)以前是否有做過或看過類似的題目？ ☑有 ☐沒有	
	(5)你要如何算出這個問題的答案呢？請寫下你初步的解題想法。	先算全家吃完剩多少，再算隔壁分完剩多少

然而，第八、九單元的學習成效未達顯著水準，學習單分析發現，部分學生在解題時仍遺漏關鍵條件，或在「回顧反思」階段沒有驗證解答，導致部分單元的成績進步有限。這與晤談中的回應相符，例如：

「這個方法有幫助，但有些題目還是不知道該怎麼開始，需要老師提醒。」（高焦慮低成就學生）

「雖然會寫步驟，但有時候不知道這樣做對不對。」（低焦慮低成就學生）

這顯示，雖然 Polya 解題策略能幫助學生建立解題架構，但對於部分學生仍需要進一步的引導與鞏固。

三、晤談與學習單分析總結

從晤談與學習單的綜合分析可知：低焦慮學生認為 Polya 解題策略讓解題步驟更清楚，有助於組織思維與提升信心。高焦慮學生仍需額外指導，雖然方法有幫助，但仍可能在題目分析或回顧階段遇到困難。學習單反映出學生在理解與計畫階段進步，但回顧與驗證步驟仍待強化，可能影響部分單元學習成效。

綜合來看，Polya 解題策略確實有助於降低數學焦慮，並部分提升學習成效，但在某些概念較為複雜的單元中，仍需教師進一步引導，以確保學生能完整應用解題步驟。

伍、結論與建議

一、結論

(一)Polya 解題策略能幫助學生建立解題架構，但適應程度因人而異。

研究結果顯示，多數學生能夠依循理解問題、制定計畫、執行計畫、回顧反思來解題，使解題過程更有條理。然而，部分學生仍需教師引導，特別是在「回顧反思」步驟，容易忽略檢查答案的合理性，影響學習效果。

(二)Polya 解題策略能有效降低學生的數學焦慮。

研究結果顯示，數學焦慮測驗的後測分數顯著下降，晤談分析亦顯示，學生認為 Polya 解題策略讓解題步驟更清楚，減少了面對數學問題的不安感。然而，高焦慮學生仍可能需要更多教師的即時引導與支持，以確保其能夠有效運用策略並建立解題信心。

(三)學習節奏影響學生適應策略的效果。

學生在晤談中提到，希望學習節奏能夠放慢，以便更好地掌握解題步驟。這顯示，Polya 解題策略的實施應考量學生的個別適應能力，並適時調整教學速度，以確保所有學生都能有效應用策略。

二、建議

(一)教學上應循序漸進，確保學生能熟悉 Polya 解題策略。

由於部分學生在策略應用上仍有困難，建議教師在教學初期提供清楚的範例與示範，並透過小組討論或個別指導來幫助學生適應。此外，可透過設計強調「回顧與驗證」的學習活動，提升學生檢查答案的能力，以強化策略的完整應用。

(二)調整教學節奏，適應不同學生的需求。

研究發現學生對於學習速度的適應度不一，建議教師在課程規劃時，留意高焦慮學生的學習需求，適時調整進度，確保學生有足夠時間內化策略，降低學習壓力。

(三)未來研究可擴展至不同年級與長期追蹤分析。

本研究僅針對單一班級的五年級學生進行探討，未來可擴展至不同年級，以評估 Polya 策略的適用性。此外，由於研究時間僅為一學期，未來可進行長期追蹤研究，以探討該策略對學生學習成效與數學焦慮的長期影響，並進一步優化教學設計。

參考文獻

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.

Dreger, R. M., & Aiken, L. R. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational Psychology, 48*(6), 344-351.

Eysenck, M. W., & Calvo, M. G. (1992). Anxiety and performance: The processing efficiency theory. *Cognition & Emotion, 6*(6), 409-434.

Foong, P. Y. (2016). Implementation of Polya's problem-solving heuristics in a Singapore primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47(6),* 915-933.

Gunderson, E. A., Park, D., Maloney, E. A., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2021). Reciprocal relations among motivational frameworks, math anxiety, and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development, 22*(3), 444-466.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 33-46.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1996). *The new sourcebook for teaching reasoning and problem solving in elementary schools*. Allyn & Bacon.

LeFevre, J. A. (1992). Individual differences in skilled numeric performance: New directions for a chronometric analysis of mental arithmetic. *Cognition, 44*(1-2), 95-122.

Maloney, E. A., & Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: Who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends in Cognitive Sciences, 16*(8), 404-406.
Ng, K. E. D. (2017). Polya's problem-solving techniques in primary mathematics education: A case study. *Journal of Educational Research and Practice, 7*(2), 123-140.
Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.
Santos, M., & Semana, S. (2018). Using Polya's problem-solving method to enhance primary students' mathematical thinking. *Mathematics Education Research Journal, 30*(3), 277-295.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.
林瓊如(2020)。**Polya 解題策略融入行動載具教學對國小學生數學領域學習成效與問題解決能力之研究**(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所。
洪秀珍、謝臥龍、駱慧文（2015）。科技大學女學生「數學領域認同」、「數學性別刻板」、「性別角色刻板」、「情境訊息」、「數學焦慮」之研究。**科學與人文研究**，3(3)，30-54。
張慧韻(2018)。**結合波利亞解題策略之數學遊戲對國小學生學習之影響**(未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系碩士班。
陳書緯(2016)。**合作學習與 Polya 解題策略對國小五年級學童數學學習成效之研究**(未出版之碩士論文)。私立世新大學資訊傳播學研究所。
陳姿螢（2018)。學生對於數學教師教學看法與數學焦慮之關聯性——以 PISA 2012 臺灣學生為例。**教育學誌**，39，55-85。
陳俊任（2022)。**Polya 解題策略對國中生數學焦慮與學習成效之影響**（未出版之碩士論文)。國立台灣科技大學。
甯自強（1982)。數學恐懼症的治療與預防。**科學教育月刊**，52，63-67。
黃庭鍾、鄭玉亭、蔡桂芬（2011)。影響基隆地區國民中學九年級學生數學焦慮相關因素之研究。**嶺東學報**, 30, 183-206。
楊季穎（2023)。**應用 Polya 解題策略的學習輔助系統對國小學生數學解題能力**與後設認知能力的影響（未出版之碩士論文)。國立中山大學。
蔡政樺（2010)。**數學教學中融入 Polya 解題策略對學生學習成效與焦慮的影響**（未出版之碩士論文)。國立台灣師範大學。
魏麗敏（1989)。國小學生數學焦慮、數學態度與數學成就之關係。**中國測驗學會測驗年刊**, 36, 47-60。

附錄

數學修練祕笈(6-1)

座號:____姓名:___________

<table>
<tr><td colspan="3">6-1
學校運動會場地的中央設有一個由不同顏色區域組成的圓形裝飾區，其中包含一個藍色扇形區域佔圓形裝飾區的 $\frac{2}{5}$ 和一個黃色扇形區域佔圓形裝飾區的 $\frac{1}{4}$ 。請問這兩種扇形區域共佔圓形裝飾區的圓心角幾度？</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第一招
理解問題</td><td>(1)這題的已知條件是什麼?</td><td rowspan="3">請將已知條件圈起來，未知條件畫底線。</td></tr>
<tr><td>(2)這題的未知條件是什麼?</td></tr>
<tr><td>(3)從已知的條件中，你能再推論出哪些資訊呢?(已知條件與未知條件的關係)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第二招
擬訂計畫</td><td>(4)以前是否有做過或看過類似的題目? □有 □沒有</td><td></td></tr>
<tr><td>(5)你要如何算出這個問題的答案呢? 請寫下你初步的解題想法。</td><td></td></tr>
<tr><td>第三招
執行計畫</td><td>(6)請將你上方寫下的解題想法付諸實行，並且要完整地列出計算過程喔!</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">第四招
回顧反思</td><td>(7)你可以驗算這個問題嗎?請將你的驗算過程寫下來。</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>(8)你可以用別的方法來算出這個結果嗎?請提出你的想法，解法越多越厲害喔!</td></tr>
</table>

An Action Research Study on Reducing Fifth-Grade Students' Mathematical Learning Anxiety Using Polya's Problem-Solving Strategy: A Case Study in an Elementary School in Taichung City

Jia-Yi Lin[1] Po-Hsin Su[2]
[1]Dadu Elementary School, Dadu District, Taichung City
[2]Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

This study investigates the impact of Polya's problem-solving strategy on the mathematical anxiety of fifth-grade elementary school students. Adopting an action research approach, the study examines the effectiveness of instructional practices in alleviating students' mathematical anxiety. Mathematical anxiety can negatively affect students' learning attitudes and achievements, whereas Polya's four-step problem-solving method (understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, and reflecting on the solution) provides a structured framework that enhances students' mathematical thinking, fosters problem-solving autonomy, and strengthens their patience and confidence in tackling challenges.

The study was conducted with 23 fifth-grade students from an elementary school in Taichung City. Data were collected through pre- and post-tests on a mathematical anxiety scale, learning worksheet analyses, teacher observations, and student interviews. The results indicated a statistically significant decrease in students' mathematical anxiety, with several students reporting reduced nervousness and an improved ability to analyze problems systematically. In terms of learning outcomes, test scores in Unit 6 showed significant improvement, whereas scores for Units 8 and 9 did not exhibit statistical significance, suggesting that different mathematical concepts may be influenced by individual learning factors. Learning worksheet analyses revealed that most students successfully applied Polya's strategy, yet the reflection and review step required further reinforcement.

Overall, Polya's problem-solving strategy appears to be a promising approach for reducing mathematical anxiety and may contribute to enhanced learning outcomes in specific topics. However, given the complex nature of students' learning experiences, further investigation is needed to assess its long-term effects. It is recommended that teachers gradually introduce the strategy, place greater emphasis on reflection and review, and adapt teaching methods as necessary to improve students' comprehension and application of problem-solving strategies.

Keywords: Polya's problem-solving strategy, mathematical anxiety, action research

以探究教學提升國小五年級學生數學推理與系統性思考之研究

蔡鎧丞

臺中市立建功國民小學教師 iklejomekai@mail.jkes.tc.edu.tw

國立臺中教育大學教育學系碩士班碩士生

摘要

本研究旨在探討教師如何運用探究教學，引導國小五年級學生透過探究學習發展數學推理與系統性思考能力。研究採個案研究法，以研究者任教班級六位學生為對象，以「倍數與因數」及「公倍數與公因數」單元進行探究學習，並觀察學生在探究學習歷程中的推理與系統性思考表現。研究結果發現，學生在探究學習歷程中展現不同層次的推理能力：程度較佳學生能快速辨識規律並進行推理擴充，中等學生在引導下能延伸思考，待加強學生則須額外鷹架以進行數學探究。此外，學生透過鷹架設計、顏色提示與操作活動，能更有系統地觀察、比較與歸納數學規律，逐步培養初步的系統性思考能力，並激發學習興趣。學生在數學課堂中不再僅關注計算，而是能主動參與討論與探究數學規律，進而提升數學素養與探究能力。本研究結果可作為實施素養導向與探究教學之參考，並提供教師於高年級數學課程設計上的具體依據。

關鍵字：探究教學、探究學習、數學推理、系統性思考、數學素養

壹、緒論

一、研究背景與動機

數學探究是現今數學學習的重要方法與核心素養指標，受到國內外數學教育界的重視。經濟合作與發展組織(Organisation for Economic Cooperation and Development, [OECD])於 PISA 2021 數學評量架構中，將「研究與探究」(Research and inquiry)列為 21 世紀八大技能之一，與「系統性思考」(Systems thinking)、「反思」(Reflection)、「批判性思考」(Critical thinking)等並列（OECD, 2018a；OECD, 2018b）。林福來（2021）進一步指出，這些核心技能的本質皆指向「思考」，可統稱為「21 世紀八大思考素養」。可見，數學探究不僅是學習方法，更是培養數學思維與素養的關鍵。

我國課程改革亦高度關注數學探究，如九年一貫課綱強調「學生應發展探究數學的興趣」（教育部，2003），十二年國教課綱進一步提出「培育學生探索數學的信心」（洪詠善，2018；教育部，2018）。而 OECD 在 PISA 2021 數學評量架構中，將「推理（Reasoning）」確定為數學素養的核心定位，並透過八大思考素養去解決數學問題（OECD, 2018a；OECD, 2018b）。由此可見，數學探究是教師在帶領學生學習數學時很重要的方法之一，而數學推理則是數學素養之核心。而數學探究的發展方向歷經轉變，從早期以解題為核心，逐步轉向「做數學」的臆測模式，近年則強調從生活情境中發掘數學問題並尋求解決方案。此歷程顯示，數學探究不僅是學習的必要歷程，更是學習數學推理重要

之關鍵。

研究者於國小教學現場擔任六年的高年級導師，在國小數學課堂實踐中，發現高年級學生往往習慣被動接受解題公式與步驟，對數學本質與規律缺乏深入思考，與數學素養導向的學習趨勢有所落差。研究者多年來於高年級數學教學觀察發現，多數學生雖能完成演練式計算，卻難以清楚解釋解題思路，也難以進行規律歸納或跨題型推論。這些現象反映出學生在推理與系統性思考能力上的不足。研究者於教學現場觀察到此現象，因而關注學生探究思維的培養，並思考如何透過探究活動提升其推理與系統性思考之能力。

為培養學生更高層次的數學素養，研究者開始思考自身教學設計，從強調「解題程序」轉向強調「推理思考歷程」與「數學意義建構」。而數學探究教學便是一種能促進學生主動建構知識、發展推理思維與系統性思考的有效策略。根據 Chapman（2007）所提出的探究教學四階段模式，透過逐步引導與分享，學生能在具挑戰性的任務中主動推理、歸納與驗證，進而建構屬於自己的數學概念體系。

綜上所述，教師若能在數學課堂中實施探究教學，將有助於提升學生的探究思維、推理能力以及系統性思考能力，使其更積極參與數學探究學習，並培養符合 21 世紀需求的數學素養。

二、研究目的

基於上述研究背景與動機，有鑑於現場學生在數學推理與系統性思考表現的不足，本研究旨在探討教師如何運用探究教學策略，引導國小五年級學生發展其數學推理與系統性思考能力，並理解學生在學習歷程中的思維變化與表現特徵。研究問題一聚焦於學生參與數學探究學習過程中之表現，研究問題二著重於學生進行數學探究學後前後之能力變化。

（一）探討教師以探究教學引導國小五年級學生進行數學探究學習歷程中，學生推理與系統性思考能力之表現情形。

（二）分析國小五年級學生進行數學探究學習前後，學生推理與系統性思考表現的變化情形。

貳、文獻探討

一、推理之意涵

數學推理（Reasoning）是數學探究的關鍵能力，NCTM 和 OECD 均將其視為重要素養指標。OECD 在 PISA 2021 數學評量架構中，將推理列為核心能力之一，顯示其在數學探究中的重要性（OECD, 2018a）。NCTM 強調，數學推理應貫穿整個數學課程，並認為推理歷程包含臆測（conjectures）與證據（arguments），學生應透過生活經驗與觀察驗證其合理性（NCTM, 1989；NCTM, 2000）。換言之，數學推理即是運用既有知識解決未知問題的過程，而透過推理解題正是數學探究的核心。

OECD 最初對推理的定義偏向數值分析，例如 1999 年使用「量化推理」（quantitative reasoning）一詞（OECD, 1999）。至 2003 年，OECD 在《PISA 2003 評量框架》（The PISA 2003 Assessment Framework.）中正式將推理納入數學素養評量架構，並於《PISA 2021 數學框架》（PISA 2021 Mathematics

Framework.）中進一步強調其在數學素養中的核心角色（OECD, 2003；OECD, 2018a）。進入 21 世紀後，OECD 由數值分析轉向將推理視為問題解決技能，並將系統性思考納入其中，這與 NCTM 的觀點有所不同。

學者亦提出數學推理的多層次內涵。Bjuland（2007）認為推理包含「感知」（sense-making）、「臆測」（conjecturing）、「說服」（convincing）、「反思」（reflecting）、「歸納」（generalizing），而 David 等人（2019）則指出推理歷程涵蓋「評估情況」（evaluating situations）、「選擇策略」（selecting strategies），透過「邏輯推論」（drawing logical conclusions），最後「提出解決方法」並「進行描述」（developing and describing solutions）。這些觀點顯示，推理不僅是一種數學活動與學習方法，也與 OECD 所提出的 21 世紀八大技能，如批判性思考、創造力與系統性思考密切相關，因此成為 PISA 評量的核心要素。

綜上所述，本研究所探討的數學探究中的推理元素，指的是：「在面對未知問題時，運用所學數學知識，透過系統性歸納或演繹推理出解決方案，並進一步歸納解題策略。」

二、系統性思考之意涵

在數學推理與探究過程中，系統性思考（Systems Thinking）會持續發揮作用。OECD 將其列為 21 世紀八大思考素養之一。OECD 從運算思維（Computational Thinking）的角度進行論述，指出運算思維包含抽象化、算法思考、自動化、分解與概括等元素，這些皆為數學推理與解題的核心能力（OECD, 2018a）。

Weintrop 等人（2016）將數學運算思維分為四大類，其中「數據實踐」（data practices）與「建模與模擬實踐」（modeling and simulation practices）最具數學探究意義。NCTM 早在 1989 年即將數據分析納入數學課程，並指出 5-8 年級學生應有系統地蒐集、整理與分析數據，進行論證（NCTM, 1989；NCTM, 2000）。NCTM 認為數學建模能將數學應用於跨學科問題與真實世界情境，並強調數學課程應從算術轉向建模導向（NCTM, 2000）。OECD 也認為數學能力涵蓋數學解題、語言應用與建模（OECD, 1999；OECD, 2006；OECD, 2018a）。從 OECD 的角度來看，希望將數學建模視為解釋現實世界的方式，與 NCTM 的觀點一致，即數學應與現實世界緊密結合。以上與林福來（2021）所指的「跨領域問題解決為本之探究」相符。此過程涉及數據蒐集、分析、比較、推理與反思，進而進行數學建模，這些能力皆為數學探究的核心要素。

綜上所述，本研究所探討的數學探究中的系統性思考元素，指的是：「在面對未知問題或真實世界問題時，先蒐集數據，透過臆測、分析、比較、推理與反思，進行數學建模。」

三、Chapman 四階段探究教學模式

鍾靜（2022）比較六種探究模式，發現 Chapman 四階段探究教學模式在教師與學生的探究步驟中最為完整，僅缺少「驗證假設」步驟，而其他模式至少缺少三項內容。特別是在教師引導方面，Chapman 四階段探究教學模式涵蓋「了解學生先備知識」、「新舊概念連結」、「教師發問引導」與「形成完整概念」，符合高年級數學探究應以引導式探究為主的需求。相較於其他探究教學模式，Chapman 四階段探究教學模式在教師的引導策略上更具優勢。

相關研究亦顯示，Chapman 四階段探究教學模式適用於國小數學探究課堂，

與陳南寧（2019）、陳愛華（2020）等人的研究結果一致。此模式強調師生互動，透過提問、合作與探索，使學生自主建構數學概念，符合教育部（2018）數學課綱的精神，為適合我國數學探究教學的模式之一。

而 Chapman（2007）提出四階段探究教學模式，分別為：（一）引入階段（an introduction stage），教師以符合學生先備知識下去安排適合探究的學習任務，並解釋用於此觀點的先備知識；（二）探索階段（an exploration stage），學生以小組進行探究數學任務，學生以原有的數學知識基礎下去進行探究，教師透過引導促使學生進行數學探究；（三）分享和討論階段（a sharing and discussion stage），學生分享、發表他們探究出來的結果，並解釋理由，教師引導學生確保探究出教師希望學生在該次探究任務要理解的數學概念；（四）結論階段（a conclusion stage），教師引導學生思考他們學到了什麼數學概念，總結關鍵想法。

參、研究方法與過程

一、研究設計

本研究採個案研究法，此研究法之優點在於蒐集資料有彈性、可深入分析個案學生在數學探究學習之學習歷程，亦可探討教師引導國小五年級學生進行數學探究學習與國小五年級學生數學探究表現之關係。

為配合研究目的，本研究依據 Chapman（2007）所提出四階段探究教學模式設計課程內容，讓學生透過觀察、推理、驗證，逐步建構數學概念，並發展系統性思考能力。教學活動安排如下：（一）設計探索倍數規律活動，學生以 EXCEL 顏色提示去觀察 100 以內數字分布，嘗試歸納出倍數判別規律，並進行小組分享與修正。（二）設計從 1236 延伸列舉 3 的倍數的活動，要求學生不依靠乘法表，透過觀察規律推理下一組倍數序列，並進行錯誤分析與策略修正。

二、研究對象

研究對象為研究者教學班級，五年級 6 位學生，毫無接觸數學探究學習，學生放學後為課後照顧班學生或直接回家，並沒有去安親班、補習班先行學習相關數學概念。而這 6 位學生，依照成績分為三組、一組各一男一女，分別為能力較佳、中等程度、待加強。

三、資料蒐集

本研究採用翰林版國小數學第九冊課本內容為主，故本研究挑選五上「L2 倍數與因數」、「L4 公倍數與公因數」，將內容重點進行轉化並設計成探究任務，讓學生可以以此進行數學探究。本研究所蒐集的資料來源包括：（一）觀察資料分為錄影資料、錄音資料以及教學觀察記錄為主；（二）文件資料包含探究任務討論單、數學作業；（三）訪談資料會根據錄影錄音、討論單上的錯誤情形或特殊回答、課堂中所觀察到的特殊反應，進行訪談資料的蒐集；（四）省思札記，針對教學過程的評估、所遭遇的教學困難以及事後省思去進行省思札記的紀錄。

四、資料分析

研究者依據研究目的進行資料蒐集，根據研究目的不同，從不同的資料來源加以分析以回應本研究之目的。如表 3-1。為釐清個別學生推理與系統性思考能力的特徵與轉變，本研究將學生分為三種能力層次進行分類分析，對照各項資料來源進行縱向統整：（一）觀察資料為分析學生在不同探究任務中觀察、推理、系統性思考之歷程；（二）文件資料比較學生在探究任務前後對於倍數關係、規律與解題策略之表現差異；（三）訪談資料分析學生在探究任務前後

對於倍數規律、思維策略的回饋，釐清學生推理與系統性思考之轉變歷程；（四）省思札記作為研究者對於該任務之省思，協助詮釋研究者在學生進行探究任務歷程中所觀察到之特殊面向，以強化資料交叉檢證。

表 3-1

研究目的與對應之資料來源說明表

研究目的	資料來源
（一）探討教師以探究教學引導國小五年級學生進行數學探究學習歷程中，學生推理與系統性思考能力之表現情形。	錄影資料：藉由錄影資料，研究者可在需要時再次回溯課堂上的狀況。
	探究任務討論單：從學生的回答去檢視探究學習歷程，以及探究後的作答。
	省思札記：研究者自身檢視教學實施歷程，並記錄所遭遇的困難以及思考解決策略為何。
（二）分析國小五年級學生進行數學探究學習前後，學生推理與系統性思考表現的變化情形。	探究任務討論單：從學生的回答去檢視探究學習歷程，以及學生數學學習表現之變化。
	數學作業：透過學生回家數學作業（包含課本、習作、作業簿、作業卷），用以檢視學生透過數學探究學習，學習成效是否有所改變。
	學生訪談資料：藉由錄音的質性訪談資料，完善學生探究學習的思維進步與改變。

註：研究者自行整理。

五、研究品質

本研究採取鈕文英（2022）所提出的研究品質指標以及確保品質技術去檢核本研究的有效性。鈕文英（2022）整理陳惠邦（1998）及 Nandamuri（2014）所提出的四個標準：邏輯標準、倫理標準、審美標準以及實用標準，再加上確保品質技術去檢核不同的資料來源，包含觀察資料、文件資料、訪談資料、省思札記，透過交叉檢證，力求客觀且中立的研究真實性，以作為研究結果的佐證。

肆、研究結果

一、觀察後無感到可以有感觀察出規律

研究者設計活動，引導學生觀察數字規律，特別是倍數關係。觀察學生表現後發現，能力較佳的學生能快速辨識倍數關係並直接反應；中等程度的學生在 2、4、5 的倍數上較能掌握，但對其他數則反應較慢，部分學生以累加方式計算，缺乏乘法性思維，甚至出現錯誤；待加強的學生則無法立即辨識任何倍數關係，需從 1 倍開始逐步累加，且錯誤頻繁。因此，研究者在進入「倍數與因數」單元前，每日安排九九乘法抽背，以確保學生對基本倍數關係的掌握，避免學習落後。

> 想不到這批學生連最基礎的九九乘法都不熟悉，接下來觀察倍數關係的部分，學生可能會無感或是觀察不出倍數關係，甚至是用累加的方式，這樣子之後推理的部分就更棘手了……得讓學生先熟練九九乘法才行。
>
> （省札 20230901）

為了幫助學生初步體驗探究，研究者在倍數關係的課程設計中提供鷹架提示，透過顏色標示 強化學生對倍數規律的觀察。例如，在學習 2、5、10 的倍數規則 時，研究者利用 Excel 表格，套用顏色區分不同倍數，使學生更直觀地觀察數字規律（如圖 4-1）。透過 Excel 倍數規則設計，學生能提出自身觀察結果：待加強的學生（S6）發現「每兩個數就會有一個呈現黃色」；中等程度的學生（S4）指出「只要是 2、4、6、8、10，數字就是 2 的倍數」；程度較佳的學生（S2）則協助歸納「個位數為 2、4、6、8、0 的數即為 2 的倍數」。此活動有效幫助學生從觀察中建立倍數概念，透過逐步推理、歸納，強化數學探究的系統性思考能力。

圖 4-1

EXCEL 倍數關係之 2 的倍數

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	輸入一個你要尋找的倍數	2									
2	B1輸入一個，黃色	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	B2輸入一個，藍色	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	可只輸入一個，也可以兩個	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
5		31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
6		41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
7		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
8		61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
9		71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
10		81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
11		91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

註：作者透過 EXCEL 設計，輸入某個倍數，即會變色。

綜合分析結果，不同程度學生在「觀察規律」方面表現出由直覺反應到初步推理的差異歷程。待加強學生多以直接描述表面現象為主，常與數字無關，對共同討論所得結論的理解與應用能力有限，僅有些微進展，但在情意方面，已願意多去嘗試、探究；中等程度學生則傾向於觀察後立即下結論，能開始連結數字規律，惟常停留於加法關係，尚未能推進至乘法性理解，但已可運用所學完成課後練習；程度較佳學生則能依教師引導，從乘法與倍數角度切入觀察，較快推理出數字規律，展現初步的系統性思考能力。

二、無法推理到能運用規律去推理擴充

當學生掌握數字規律後，透過推理與擴充應用，不僅能提升思考的彈性與深度，也能增加系統性思考的機會。例如，在延伸學習 3 的倍數規則時，學生透過 EXCEL 表觀察規律、推理，已知判別方法為「將數字各位數相加，若總和為 3 的倍數，則該數為 3 的倍數」。

為強化學生對規律的運用，研究者設計競賽活動，要求學生以 1236 為出發點，列出 8 個 3 的倍數，但不可直接乘以 10 的倍數。學生的表現呈現不同層次：待加強的學生（S5、S6）無明顯反應，難以延伸應用規律；中等程度的學生（S3）直接將 1236 乘以 1 到 8，雖能列舉倍數，但未深入推理；程度較佳的學生（S1）則選擇從 1236 開始，每次加 3，連續加 8 次，但仍未能靈活運用已知規律進一步推理擴充。此活動反映學生在從規律觀察到推理應用的過渡階段，仍需進一步引導，以促進更靈活的數學探究與系統性思考能力。

T：大家剛剛檢查是不是覺得很開心又覺得怪怪的？

S5：好像怎麼加都是 12。

S4：只是數字對調而已，加起來當然都一樣啊！

S2：所以數字對調後還是 3 的倍數啊！

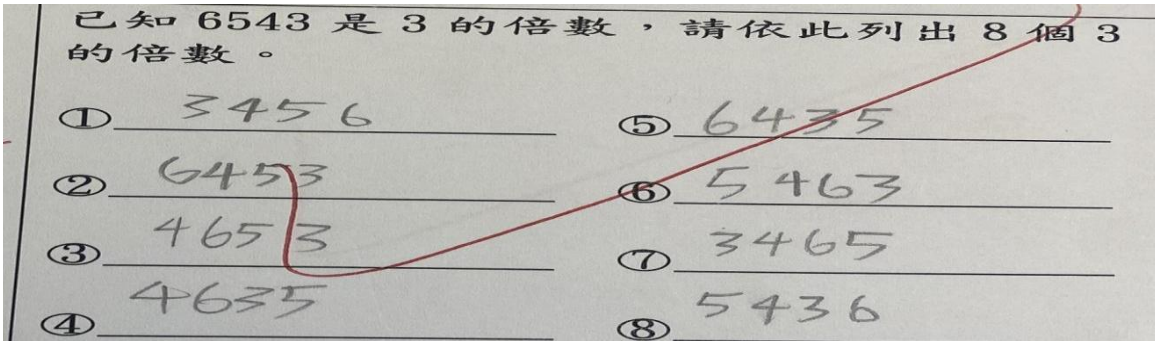
T：可是 1236 是這樣不代表其他數字也是這樣吧？而且老師之前說過，在數學上這樣子是沒辦法說服別人的，應該要多舉幾個例子，或是找相反的例子，現在請你們組內自己出數字並檢驗看看。

（錄影 20230911）

學生在本次探究活動中，雖接受較多來自研究者所設計的鷹架支持，但此設計有助於學生練習如何運用規律進行推理與擴充，不僅促進思維發展，更重要的是引導學生逐步進入系統性思考的歷程，為後續數學學習奠定基礎。探究活動結束後，透過課後作業檢視學生能否運用探究歷程擴展解題方法，從圖 4-2 可見，中等學生成功將所學延伸至多元的解題策略，顯示其在系統性思考上的初步成效。

圖 4-2

S4 倍數規則回家作業



註：程度中等學生作業寫法，能運用探究學習之結論。作者整理自學生數學作業。

伍、結論與討論

本研究結果顯示，教師透過探究教學策略引導國小五年級學生進行數學探究學習是可行的，可有效促進學生數學推理與系統性思考能力之發展。透過鷹架設計與教學引導，學生能逐漸從觀察中發現數字規律，並進行推理與延伸，展現數學思維能力。在學生學習表現方面，大部分的學生透過數學探究學習，開始能在討論時自己觀察出倍數關係以及規律，並嘗試去推理擴充。然而，程度待加強的學生找到規律其實已經需要一番功夫，需要研究者給予更多的引導、鷹架協助以及更多的時間去等待；程度中等學生願意去進行初步推理，但是推理出結果後，往往就停下腳步，並未再有更進一步的擴充，須在研究者給予引導方能持續往下推理；程度較佳的學生能較快辨識規律，並主動嘗試進行推理與擴充，但推理結果仍多停留於直觀層次，仍需教師引導方能建構更完整的系統性知識架構。此結果呼應探究教學需依學生能力調整引導策略之實務需求。

本研究亦在情意層面觀察到正向變化，學生覺得數學課並不是想像中的那麼無趣、只有計算以及成績，當課程提供更多探究與討論的空間時，學生會更願意積極參與討論。透過探究活動與鷹架設計，學生不僅能掌握數學規律並以此進行推理延伸，學生更有機會系統化思考出屬於自己的數學知識體系，同時被教師看到自身對於數學的成長。不僅有助於學生感受到數學探究的趣味性與美感，更能建立屬於自己對數學的理解與信心。

綜上所述，探究教學對於培養國小高年級學生的數學推理與系統性思考能力具有實質助益，亦有助於提升其學習動機與課堂參與度，為高年級素養導向數學教學提供可行之教學模式與設計參考。

本研究採用個案研究法，有助於深入理解學生在數學推理與系統性思考能力上的表現與變化。然而，研究仍存在若干限制。首先，研究對象來自單一班級，樣本數量有限且背景趨同，研究結果的推論性與外部效度受到侷限；其次，研究者同時為教學者，雖已參照鈕文英（2022）所提出的研究品質指標以提升研究信度，但角色重疊仍可能造成主觀詮釋影響。此外，研究內容僅涵蓋「倍數與因數」及「公倍數與公因數」兩單元，結果未必適用於其他數學概念。未來研究建議擴大研究對象來源與數量，進一步驗證探究教學對學生能力成效發展之具體影響；亦可深入探討教師在實施探究教學中的專業成長歷程與挑戰，理解教師於探究教學導向課程設計與實施中所面臨之實務問題與因應策略，以豐富探究教學之理論基礎與實踐內涵。

參考文獻

林福來（2021）。二十一世紀數學素養教學與評量的指標。**央團數學月刊，28**，3-14。

洪詠善（主編）（2023）。**十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要課程手冊**。國家教育研究院。

陳南寧（2017）。**探究式教學應用在國小六年級學生數學解題之研究**（系統編號：107NTNT1576012）。〔碩士論文，國立臺南大學〕。臺灣碩博士論文知識加值系統。

陳愛華（2020）。**學童於 Chapman 探究式數學課室的學習動機及學習成就**（系統編號：108NDHU5331015）。〔碩士論文，國立東華大學〕。臺灣碩博士論文知識加值系統。

鈕文英（2022）。**質性研究方法與論文寫作**（3 版）。雙葉書廊。

教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域**。教育部。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要：數學領域**。教育部。

鍾靜（2022）。**鍾靜談教與學（一）：數學素養導向教學設計實務**。五南。

Bjuland, R. (2007). *Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education.* The Mathematics Enthusiast: Vol. 4 : No. 1 , Article 1. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1056

Chapman, O. (2007). Preservice secondary mathematics teachers’ knowledge and inquiry teaching approaches. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y.(Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2.* 193-205. Seoul, Korea: PME.

David S., Edward G., Felix H., Pushmeet K.. (2019). *Analysing mathematical reasoning abilities of neural models.* The Seventh International Conference on Learning Representations. New Orleans, America. https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.01557

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* VA: Author.

OECD (1999). *Measure student knowledge and skill: A new framework for assessment*, https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33693997.pdf

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework—Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.*https://doi.org/10.1787/9789264101739-en

OECD (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy—A Framework for PISA 2006.* https://doi.org/10.1787/9789264026407-en
OECD (2018a). *PISA 2021 Mathematics Framework (Draft).* https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf
OECD(2018b). *Implementing the Proposed Mathematics Framework: Recommendations for PISA 2021.* https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Mathematics-in-the-21stC_Geneva-Presentation_animated_v15.pdf
Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L. & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127-147. http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5.

A Study on Developing Fifth-Grade Students' Mathematical Reasoning and Systems Thinking through Inquiry-Based Teaching

Kai-Cheng Tsai
Teacher, Taichung Municipal Jian-Kong Elementary School
Student, Department of Education, National Taichung University

Abstract

This study aimed to explore how inquiry-based teaching can guide fifth-grade students in developing mathematical reasoning and systems thinking through inquiry learning. A case study methodology was adopted, targeting six students from the researcher's class. Inquiry-based instruction was implemented in the units "Multiples and Factors" and "Common Multiples and Common Factors," and the study examined students' performance and development of reasoning and systems thinking throughout the learning process. The results revealed varying levels of reasoning: high-achieving students quickly identified patterns and extended their reasoning; average students were able to deepen their thinking with guidance; and lower-achieving students required scaffolding to construct mathematical concepts. With the support of scaffolded activities, color-coded prompts, and hands-on exploration, students were better able to observe, compare, and generalize mathematical patterns in a structured manner, gradually cultivating systems thinking and increasing their motivation to learn. Students became more actively involved in classroom discussions and exploration, shifting from a focus on computation to a deeper engagement with mathematical ideas. The findings provide a reference for implementing competency-based and inquiry-oriented mathematics instruction and offer practical implications for designing upper elementary mathematics curricula.

Keywords: inquiry-based teaching, inquiry learning, mathematical reasoning, systems thinking, mathematical literacy

臺灣與中國國小數學教科書在分數不同意義的數學活動類型之比較

趙子渝[1]　林碧珍[2]

[1]國立清華大學 數理教育研究所 yukimiss@gmail.com

[2]國立清華大學 數理教育研究所 linpj@mx.nthu.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討比較臺灣與中國小學數學教科書對於分數不同意義的編排。研究對象為臺灣 A 版本和中國 B 版本數學教科書。本研究採內容分析法，以數學問題為分析單位。研究結果發現:臺灣分數教材分布於八冊，從二上至六下，中國分布於三上、五下及六下共三冊。兩國教科書都是從部分-整體關係建立分數的基本概念，但是兩國教科書對於分數是部分-整體關係的詮釋不同，臺灣和中國對於分數六種不同意義的引入，各具有其特殊目的，臺灣 A 版本引入單位分量累加是為了建立假分數的概念，而中國 B 版本是為了處理真分數的同分母分數相加減。分數是兩數相除的結果的引入，臺灣 A 版本和中國 B 版本都是為了將分數化為小數，但是中國 B 版本將假分數化為帶分數是另一個目的。兩國教材皆以單位分量的累加為最高，部分-整體次之。臺灣和中國教科書對於分數意義的學習以透過「操作與計算」的活動類型最多，主要是學習「分數是單位分量的累加」，而透過「表示」活動主要是在建立分數的「部分-整體關係」意義，但是兩國的教科書都提供不到一成的「解釋」、「論證與推理」高認知需求活動類型給學生學習分數的六種意義。

關鍵字：分數意義、國小數學教科書、臺灣與中國

壹、緒論

分數與小數、百分率、比等概念關係很密切，是小學階段必要的學習內容。不同年級的分數教材也從學理上考慮分數的多種不同意義，每一種意義在分數的學習上都有其各自的角色與功能及其發展脈絡。分數不是容易學習的數學內容，學生學習經常伴隨著一些困難。文獻指出分數教學發生的一些問題，諸如(1)它強調死記硬背的學習而不注重概念理解(Charalambous, et al., 2010)， (2)在學生熟悉不同面向的分數概念之前，就引入了形式表徵和計算 (Smith, 2002)，(3)它只強調了一個概念，通常是部分-整體(Moss & Case, 1999)。教師在解讀或使用教科書時，往往只關注在分數類型或是四則運算，而難以察覺分數的不同意義(林碧珍, 2019)。例如：林碧珍(2019)指出教師在解讀以下三種分數學習活動類型的布題 A、B、C 時可能僅關注在於這些問題都可用乘法求算，而忽略了三個數學問題中「3/4」，其代表的不同意義。

布題 A：一箱牛奶 20 瓶， 弟弟喝了 3/4 箱，是多少瓶牛奶？

布題 B：牛奶有 16 瓶，弟弟喝了全部的 3/4，弟弟喝了多少瓶牛奶？

布題 C：哥哥有 20 瓶牛奶，弟弟的牛奶是哥哥的 3/4，問弟弟有多少瓶牛奶？

若教師沒有釐清教材中分數的不同意義，而疏於處理這些不同的意義在不同年級教材的地位，導致學生對分數產生學習困難或迷思，而難以找出造成學生分數學習的困難的原因可能來自知識本質、心理、教育

因素。本研究將從知識本質的觀點分析小學階段分數六種意義的教材發展脈絡。小學階段處理的分數六種意義包含：分數是部分-整體關係、分數是單位分量的累加、分數是兩數相除的結果（商)、分數是數線上一點表示的數、分數是運算子、分數是兩量的比值(Behr, Lesh, Post & Silver,1983)。

林碧珍(2019)在文章中比較分數是運算子和部分整體意義的不同，分數是運算子和兩量比值的不同。運算子（operator）是一種操作或函數。運算子是對某量進行縮小倍數或放大倍數的轉換；縮小就是對某量進行真分數倍的轉換，放大就是對某量進行假分數倍的轉換。運算子所描述的分數不附有單位，例如：「牛奶 20 瓶，全部的 3/4，是多少瓶牛奶？」或「一箱牛奶 20 瓶，一箱的 3/4，是多少瓶牛奶？」，這兩個問題中的 3/4 都不附有單位。雖然這兩個問題「一箱牛奶 20 瓶，一箱的 3/4，是多少瓶牛奶？」和「一箱牛奶 20 瓶， 3/4 箱是多少瓶牛奶？」的整體量都是 1 盒，但前者是分數的部分-整體意義，而後者是分數的運算子意義。兩量的比值所描述的分數倍和運算子一樣，分數符號不附有單位；但是最大不同之處在於兩量的比值中的兩量不具任何的包含關係，而運算子的兩量是部分和整體的包含關係。

本文第二作者受邀在中國某一所大學舉辦的「小學數學教學與研究暨中澳比較教育論壇論壇」演講上談論臺灣教科書在分數不同意義的發展脈落時，掀起中國大陸學者及國家層級的數學高級名師的熱烈討論，對於分數的六種基本意義持有不同的看法，因此本文第一作者的碩士論文投入於比較臺灣與中國數學教科書在分數六個基本意義的分析研究。

本研究將從 Glasnovicgracin(2018)的分析教科書任務工具來比較臺灣和中國國小教科書對於分數六個基本意義的異同。Glasnovicgracin 提出分析教科書任務的工具包含四個面向：問題情境、數學活動、認知複雜度、及答案類型。情境分為無情境、擬真情境、真實情境三種。答案類型包含選擇題、封閉式和開放式三種類型。認知複雜度分為複製、連結與關係、反思三種。複製是直接應用基本知識和技能，屬於記憶性的任務。連結與關係的任務是需要建立和處理連結，將幾個概念或活動組合在一起才能解決問題。反思的任務是需要運用有關數學的創新知識。

數學活動包含表示、操作與計算、解釋、論證與推理四種類型。表示：涉及將給定的數學數據轉譯為另一種數學表示形式，也就是表徵的轉換。操作與計算是指使用具體或廣義數字進行基本計算操作，正確和有效的執行對計算或步驟。解釋是指辨識出數學表示形式（圖、符號和表格）中給出的關係和相關數據，以及它們在上下文中給定的解釋。論證與推理指對贊成或反對特定決策的數學描述，要求具體的使用數學關係和特徵、數學規則以及數學語言來進行。本研究以林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂（2018）對解釋和論證的區別，解釋是說話者將想法清楚表達給他人瞭解，其功能在於精緻化知識，例如教科書中呈現:為什麼?論證是要說服對方接受自己的想法，其功能在於重構知識，例如教科書中呈現：誰說得對?本文呈現的資料是第一作者碩士論文的一部份[1]，由於頁數所限，僅報導從數學活動面向來比較臺灣與中國在分數六種意義的同。

[1] 趙子渝(2025)。在不同的分數意義下之兩岸國小數學教科書之比較分析。未出版碩士學位論文

貳、研究方法

本研究採用內容分析法，僅針對教科書進行分析，教師手冊、習作等部分不納入本研究範圍。依照市場佔有率採取立意取樣，選取二國市場佔有率最高的版本作為研究對象。分別為 A 版本和 B 版本。一般最常用來詮釋資料的方式有計算次數或百分比等方式來進行研究(Fraenkel & Wallen, 2003)。本研究以「題」為分析單位，本研究之數學問題之計數標準為： (1)問題敘述只包含一個主要問題者，計數一題。 (2)題組的問題，各問號分別計數為一題，共計數為 3 小題。(3)數線的問題，一條數線上所有的計數為一題。資料分析的信效度是由研究者及一位評分員，首先將分析類目表及其定義交予評分員閱讀，詳細說明歸類的方式及原則，並針對類目表中的問題加以釐清，並對分析類目表作討論與再修正。先計算出評分者間「相互同意值」，再求得「平均相互同意值」，最後利用依格伯那(Gerbner)信度公式求出信度（r），經研究者與評分員施測結果，信度值為 0.95。

參、研究結果

本節研究結果先報導臺灣 A 版本與中國 B 版本在分數不同意義的編排脈絡，其次從數學活動類型探討臺灣與中國教科書對於分數不同意義的編排。

一、臺灣 A 版本與中國 B 版本在分數不同意義的編排脈絡

(一)部分-整體關係

臺灣和中國教科書都是從部分-整體關係建立分數的基本概念。但是兩國對於部分-整體的詮釋不同。臺灣 A 版分數教材主要學習分數的基本概念，包括「平分」、「幾分之一」和「比大小」。分數在連續量及離散量的理解分數表示的方法，皆是將一個整體量分割成幾等份，其中部分量的大小用整體量的單位詞來描述。然而，中國 B 版教科書分數教材的部分-整體，皆以沒有單位量詞的「全部的幾分之幾」來分數的基本概念，例如，以一個月餅平分成 2 份，每份就是這個月餅的一半，也就是它的 1/2 。把一張正方形紙摺成同樣大的 4 份，每份是它的 1/4，以沒有單位量詞的「全部的幾分之幾」來描述，臺灣教科書則以 1/4 張來描述。臺灣 A 版分數教材的部分整體意義的數學任務共有 123 題，是六種意義中佔比位 28.54%，各年級中又以二年級比例最高，佔 42.20%。中國 B 版教科書分數教材的部分-整體以沒有單位量詞的「全部的幾分之幾」或「占全部的多少」來提問，共有 112 題，佔 28.21%，僅出現在三、五年級，六年級教材沒有出現。

(二)單位分量的累加

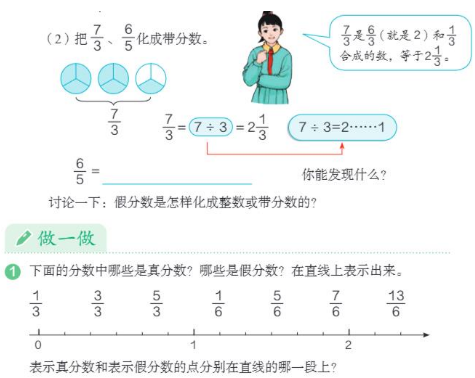
臺灣 A 版教科書四年級認識假分數和帶分數。部分-整體關係無法建立假分數概念，將部分-整體意義擴展到單位分量的累加，將 5/8 解釋為 5 個 1/8，真分數 5/8 可以從部分-整體關係解讀為 8 片中的 5 片，也可以用單位分量的累加解讀

清華大學數理教育研究所 。

為 5 個 1/8 片。將分數意義擴張為單位分量的累加，與舊經驗部分-整體關係聯繫起來。對於同分母分數相加 2/8＋1/8 的學習，臺灣 A 版本教科書不僅使用部分-整體的意義來處理，解釋為一個西瓜切成 8 片，其中 2 片加上其中的 1 片合起來是 3 片，就是 3/8；並以單位分量累加來處理，解釋為 2 個 1/8＋1 個 1/8 合起來是 3 個 1/8。臺灣 A 版教科書「單位分量的累加」分布於各年段，主要出現四年級，在各年級的佔比為 70.15%。

中國 B 版三年級教科書出現「單位分量的累加」主要出現在五年級，佔了 57.14%，其引入是為了處理真分數的同分母分數相加減，也沒有以部分-整體的分數意義來處理同分母分數相加減。不同於臺灣 A 版教科書是為了建立假分數概念。中國 B 版教科書沒有建立假分數的概念，而是透過假分數與真分數的大小比較，利用兩數相除的結果將假分數化為帶分數，然後在數線上標出真、假分數的位置來做出假分數與真分數的大小判斷，如下圖 1。

本研究分析發現，中國 B 版本未處理同分母的除法，一律以倒數處理分數除法。但是臺灣 A 版本教材對於同分母除法，是以單位分量的累加的意義來解決問題，如:一條緞帶 4/7 公尺，每 2/7 公尺做成一朵花，共可做成幾朵花? 以 4 個 1/7 去除以 2 個 1/4(4÷2＝2)來解題。而導致中國 B 版本在單位分量的累加比例略低於臺灣 A 版本教材 7.67%。總而言之，兩國教材中在分數意義的比重上皆以單位分量的累加為最高，臺灣 A 版本在單位分量的累加佔比為 45.01%，中國 B 版本單位分量的累加佔比為 37.43%。



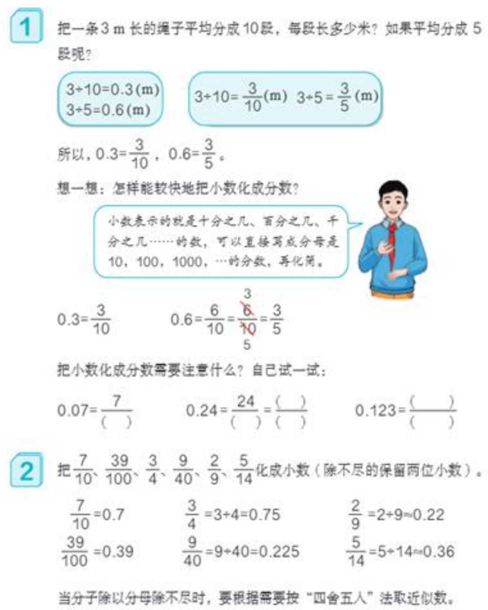


圖1: 中國 B 版的假分數教材　　　圖 2:中國 B 版教科書處理兩數相除的結果

(三)分數是兩數相除的商

臺灣 A 版本教科書五年級處理分數「表示兩個整數相除的商」，是為了將分數化為小數，此時的分母非限於能擴大為整十、整百、整千。雖然在三年級和四

年級學習一位小數和二位小數時， 0.1 和 0.01 是透過 1/10 和 1/100 來聯繫。臺灣在五下以一個小節獨立介紹「分數表示整數相除的結果」意義，並擺在四下的分數小數互化之後，佔比為 2.79%。但是中國 B 版本五下教材先處理分數是兩數相除的結果，並將此分數意義運用在假分數換帶分數的部分，並不強調「分數是兩數相除的商」之意義，最後再出現分數與小數互化的小節，而只強調分數與小數的互換，如圖 2。從圖 2 中分母為 2/9 與 5/14 皆非有限小數，而臺灣的教科書五年級學生只學習有限小數。中國 B 版本有 37 題「兩數相除的結果」任務，佔比為 9.22%，中國 B 版本略多於臺灣 A 版本 6.43%。

(四)分數是數線上一點表示的數值

臺灣 A 版教科書在四下理解等值分數的概念，首次利用數線來表示分數，加強對分數大小和位置的理解。在臺灣教材集中於一小節介紹分數數線，將數線概念有系統的說清楚，但在其他章節卻鮮少運用上。中國 B 版教科書對於分數是數線上一點表示的數值，分數數線的引入，在於進行分數的大小比較，而分布於各年級的分數單元，在三年級分數的初步認識後即出現「比一比」的題目，「數線上是一點表示的數」的任務共有 39 題，佔比為 9.78%，高於臺灣佔比為 2.33%。

(五)分數是運算子

為了解決乘數是真分數的乘法問題，需要學習分數倍的語言，不帶單位的分數。以「全部的幾分之幾、或其中的的幾分之幾」來描述，分數倍語言，是分數的另一種意義—運算子。臺灣 A 版本在五下出現在整數乘以分數的學習教材中。學生開始學習分數是運算子，布題是以分數倍語言描述，如 10 片口罩的 1/5，1/5 不帶單位，如圖 3。「分數是運算子」僅出現在臺灣 A 版本五年級及六年級，分別佔 30.60%、44.11%。中國 B 版本在學習「分數是運算子」是在六年級分數乘法單元，告訴學生以後遇到求一個數的幾分之幾是多少的問題，可用這個數乘以幾分之幾來解決，如圖 4，「運算子」出現在中國 B 版本有 39 題，佔 9.78%。從圖 4 得知，分數是運算子在中國 B 版本教材在布題仍使用有量詞的分數語言 1/2 桶、1/4 桶描述，沒有提升到使用一桶的 1/2(倍)來描述，而且不強調其分數倍語言的轉換轉換，僅要求學生背記題目的關鍵字與乘法算式的使用。

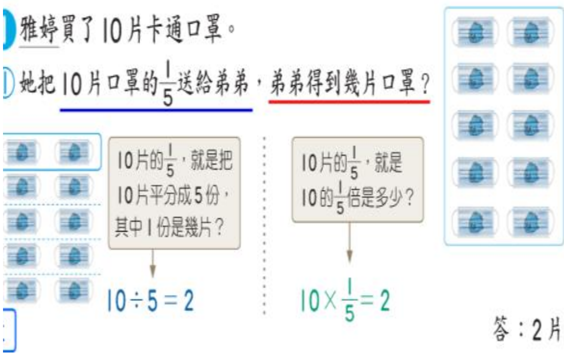


圖3: 臺灣 A 版分數是運算子的教材

圖4: 中國 B 版分數是運算子的教材

(六)分數是兩量的比值

「分數是兩量的比值」是分數概念中在小學階段最晚引入的。在六上的比值單元及六下的基準量與比較量單元涉及的分數是兩量的比值。分數是兩量的比值，臺灣 A 版本教科書和中國 B 版本教科書在意義上處理差異不大。「分數是兩量的比值」都僅出現臺灣 A 版本和中國 B 版本的六年級教科書，佔比分別為 29.42%和 29.46%。

二、從數學活動比較臺灣 A 版本與中國 B 版本在分數不同意義的編排

臺灣 A 版教科書分數教材分布於八冊，從二上至六下，問題/任務總數為 430 題。中國 B 版教科書分數教材分布於三冊，從三上開始至六下。中國的四年級及五上教科書都沒有分數主題，因此大多數的分數概念都在五下，問題/任務總數為 399 題。表 1 和表 2 是臺灣 A 版和中國 B 版分數意義的活動類型在各年級所佔百分比。表 1 是分數不同意義和數學活動類型的二維交叉分析表格，本文是從不同活動類型探討臺灣 A 版教科書對分數意義的設計，而表 2 是從不同活動類型看探討中國 B 版教科書對分數意義的設計。從表 1 和表 2 的比較有下列三個主要研究發現:

(一) 兩國教科書對於分數意義的學習以透過「操作與計算」的活動類型最多。

表 1 和表 2 都顯示臺灣 A 版和 B 版教科書所設計的分數意義的學習活動，四種類型中都是以操作與計算的活動類型最多，臺灣與中國分別為 60.23%與 64.2%。兩國對於分數意義的四種數學活動類型多寡的順序相同，以透過「操作與計算」活動的百分比最高，其次是「表示」的學習活動，論證與推理的學習活動最少。臺灣 A 版本教科書設計六種分數意義的學習活動類型由高到低的百分比分別為「操作與計算」為 60.23%、「表示」為 33.02%、「解釋」為 6.05%、「論證與推理」為.7%。中國 B 版本教科書設計六種分數意義的學習活動類型由高到低的百分比分別為「操作與計算」為 64.20%、「表示」為 28.32%、「解釋」為 7.52%、「論證與推理」為 0%。

(二) 兩國教科書設計以「操作與計算」活動類型主要是用來學習分數是單位分量的累加。

臺灣 A 版本教科書的「操作與計算」活動類型設計主要是學習「分數是單位分量的累加」，佔 33.49%，中國 B 版本教科書佔 33.08%。臺灣 A 版本教科書是在四年級學習真分數、假分數和帶分數，以及等值分數、分數小數的互換時，是以透過單位分量的累加的「操作與計算」活動類型來建立的，佔 16.28%。中國 B 版本教科書是在五年級學習分數的意義和性質、分數的加法和減法時，主要是透過「單位分量的累加」的「操作與計算」的活動類型中來學習，佔 24.81%。

(三) 臺灣和中國教科書透過「表示」活動類型學習分數六種不同意義，主要是在建立分數的「部分-整體關係」意義。

表 1 顯示臺灣教科書設計透過「表示」活動類型學習分數六種不同意義，主

要是在建立分數的「部分-整體關係」意義。臺灣 A 版本教科書有 33.02%是透過「表示」活動類型學習分數的六種不同意義，其中部分-整體關係、單位分量的累加、數線上的一數值、兩數相除的商、兩數量的比值，百分比分別為 15.35%、10%、0.47%、1.86%、3.49%、1.86%。從表 2 顯示中國 B 版本教科書設計透過「表示」活動類型有 28.32%。其中部分-整體關係、單位分量的累加、數線上的一數值、兩數相除的商、兩數量的比值，百分比分別為 18.55%、2.76%、3.76%、2.26%、.50%、0%。

表 1:臺灣 A 版本教科書編排分數意義的數學活動類型分布

活動類型	年級 \ 分數意義	台灣 A 版教科書分數的不同意義題數(%)						
		部分-整體	單位分量累加	兩數相除的結果	數線上一點的數值	運算子	兩量的比值	總數
表示	二	11 (2.56)	7 (1.63)	--	--	--	--	
	三	15 (3.49)	16 (3.72)	--	--	--	--	
	四	15 (3.49)	20 (4.65)	--	8 (1.86)	--	--	
	五	21 (4.88)	--	2 (.47)	--	5 (1.16)	--	
	六	4 (.93)	--	--	--	10 (2.33)	8 (1.86)	
	合	66(15.35)	43(10. 00)	2(.47)	8(1.86)	15(3.49)	8 (1.86)	142(33.02)
操作與計算	二	--	--	--	--	--	--	
	三	1 (.23)	28 (6.51)	--	--	--	--	
	四	12 (2.79)	70 (16.28)	--	1 (.23)	--	--	
	五	24 (.59)	37 (8.60)	9 (2.09)	--	34 (7.91)	--	
	六	5 (1.16)	9 (2.09)	--	--	19 (4.42)	10 (2.33)	
	合	42(9.77)	144(33.49)	9(2.09)	1(.23)	53(12.33)	10(2.33)	259(60.23)
解釋	二	6 (1.40)	--	--	--	--	--	
	三	3 (.70)	2 (.47)	--	--	--	--	
	四	3 (.70)	4 (.93)	--	1 (.23)	--	--	
	五	1 (.23)	--	1 (.23)	--	2 (.47)	--	
	六	--	--	--	--	1 (.23)	2 (.47)	
	合	13(3.02)	6(1.40)	1(.23)	1(.23)	3(.70)	2(.47)	26(6.05)
論證與推理	二	1 (0.23)	--	--	--	--	--	
	三	1 (0.23)	1 (0.23)	--	--	--	--	
	四	--	--	--	--	--	--	
	五	--	--	--	--	--	--	
	六	--	--	--	--	--	--	
	合	2(.47)	1(.23)					3(.70)
總計		123 (28.60)	194 (45.12)	12 (2.79)	10 (2.33)	71 (16.51)	20 (4.65)	430

表 2:中國 B 版本教科書編排分數意義的數學活動類型分布

分數意義／年級／活動類型		中國 B 版教科書分數的不同意義題數(%)						
		部分-整體	單位分量累加	兩數相除的結果	數線上一點的數值	運算子	兩量的比值	總數
表示	三	46(11.53)	3(.75)	2(.50)	--	2(.50)	--	
	五	28(7.02)	2(.50)	13(3.26)	2(.50)	--	--	
	六	--	6(1.50)	--	7(1.75)	2(.50)	--	
	合	74(18.55)	11(2.76)	15(3.76)	9(2.26)	4(.50)	0	113(28.32)
操作計算	三	13(3.26)	10(2.51)	--	--	--	--	
	五	21(5.26)	99(24.81)	14(3.51)	--	--	--	
	六	--	23(5.76)	--	26(6.52)	32(8.02)	18(4.51)	
	合	34(8.52)	132(33.08)	14(3.51)	26(6.52)	32(8.02)	18(4.51)	256(64.2)
解釋	三	2(.50)	--	--	--	--	--	
	五	1(.25)	19(4.76)	1(.25)	--	--	--	
	六	--	--	--	--	3(.75)	4(1.00)	
	合	3(.75)	19(4.76)	1(.25)	0	3(.75)	4(1.00)	30(7.52)
論證與推理	三	--	--	--	--	--	--	0
	五	--	--	--	--	--	--	0
	六	--	--	--	--	--	--	0
	合	0	0	0	0	0	0	0
總計		111(27.82)	162 (40.60)	30 (7.52)	35(8.77)	39(9.77)	22(5.51)	399

(四) 臺灣和中國教科書安排不到 10%的活動讓學生透過「解釋」、「論證與推理」活動類型來學習分數的六種不同意義。

從表 1 和表 2 的數據顯示臺灣與中國的教科書較少提供機會讓學生透過高認知需求的「解釋」、「論證與推理」活動類型建立分數的不同意義。臺灣教科書提供「解釋」、「論證與推理」活動類型之百分比分別為 6.05%和 0.70%，而中國教科書提供「解釋」、「論證與推理」活動類型之百分比分別為 7.52%和 0%。

肆、結論與討論

臺灣 A 版本從二年級下學期開始引入分數概念，分數教材涵蓋八冊。教材中強調分數意義的建立，從低年級「部分-整體」和「單位分量的累加」，逐漸擴充到中年級的「分數是兩數相除的結果」和「數線上一點表示的數值」高年級「分數倍的語言」和「兩量的比值」。從低年級到中年級，乃至高年級，分數六種不同意義的引入，有其特殊的角色與目的，為了建立假分數的意義而需將「部分-整體」擴充為「分數是單位分量的累加」，到了中年級為了學習將分數化為小數，而擴充「兩數相除的結果」的分數意義。高年級為了學習從乘數為整數擴充為乘數是分數的意義，而需擴充「運算子」的分數意義。但是中國 B 版本教科書並不重視分數意義的建立，而只強調分數的計算，而且教材對分數意義的處理是不精但卻深，如分數與小數的互換，一開始引入分數化為小數，就讓學生計算化為無限小數的分數，以四捨五入將小數位數取到兩位。

臺灣自 1997 年後，教科書為了幫助學生掌握整體單位量 1，在設計上做了一項重大改變，就是對於要求算出部分量大小的題目在題幹中改為用含有單位量

詞的問句(林碧珍，2019)。但臺灣教科書對分數處理的改變是否有利於學生的學習，則需要進一步研究探討。本研究的第二作者已經蒐集了臺灣與中國學生在分數六種意義的測驗資料，期待有機會能分析報導兩岸提供不同教材的學習機會如何造成對學生學習的不同表現。未來研究亦可探討蒐集現今學生使用臺灣在2000年以前進行的分數六種意義的測驗試題的資料，以進行分析比較。

兩國教材皆以單位分量的累加為最高，部分–整體次之。臺灣 A 版教科書「單位分量的累加」的引入，是為了四年級建立假分數概念；但是中國 B 版教科書主要是為了學習真分數的相加減，而使得中國 B 版教科書的假分數是安排在「分數是兩數相除結果」與「分數是數線上的一點所表示的數值」之後才學習。臺灣A 版本和中國 B 版本對於「兩數相除的結果」的學習，都是為了學習將分數化為小數而引入，但是臺灣 A 版本強調「兩數相除的結果」的意義，而中國 B 版本則強調分數化為小數的計算。

有關數學活動類型的設計，臺灣和中國教科書對於分數意義的學習以透過「操作與計算」的活動類型最多，主要是用來學習「分數是單位分量的累加」，而透過「表示」活動主要是在建立分數的「部分-整體關係」意義，但是臺灣和中國教科書提供不到一成的「解釋」、「論證與推理」高認知需求活動類型給學生學習分數的六種不同意義。

參考文獻

林碧珍、鄭俊彥、蔡寶桂（2018）。**國小六年級學生數學論證評量工具之建構**。**測驗學刊，65**(3)，257-290。

林碧珍(2019)。分数在教科书中的不同意义 (上)。 **小学教学: 数学版， 4**，4-8。

张奠宙(2010)。“分数”教学中需要澄清的几个数学问题。 **小学教学: 数学版，** 1， 4-6。

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, *91*, 126.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117-151.

Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, *49*(7), 1003-1024.

Fraenkel, J., Wallen, N., & Hyun, H. (2003). *How to Design and Evaluate Research in Education 15th ed*. New York :McGraw-Hill Education.

Comparison of Elementary Textbooks of Taiwan and China on Mathematical Activity Types Related to the Meanings of Fractions

Tzu- Yu- Chao[1] Pi-Jen Lin[2]
[1] Institute of Math amd Science Education, National Tsing Hua University
[2]Institute of Math amd Science Education, National Tsing Hua University

Abstract

The purpose of this study was to compare the different meanings of fractions in elementary school mathematics textbooks in Taiwan and China. The subjects of the study were the A version of mathematics textbooks in Taiwan and the B version in China. This research adopts a content analysis method, with mathematical problems as the unit of analysis. The findings of the study includes: The fraction in Taiwan is distributed across eight volumes, from grade 2 to grade 6, while in China, it is concentrated in three volumes—the first semester of the third grade, the second semester of the fifth grade, and the second semester of the sixth grade. Both countries' textbooks establish the basic concept of fractions through the part-whole relationship, but their interpretations of this relationship differs. The introduction of the six different meanings of fractions in Taiwan and China each has different purpose. For instance, the A version in Taiwan introduces the repeated unit fractions to establish the concept of improper fractions, whereas the B version in China uses it to handle the addition and subtraction of proper fractions with like denominators. The introduction of fractions as the result of division in both versions aims to convert fractions into decimals, but the Chinese B version has an additional purpose of converting improper fractions into mixed numbers. .In both countries' textbooks, the repeated unit fractions is the most emphasized meaning, followed by the part-whole relationship. The learning of fraction meanings in Taiwan and China primarily involves "manipulation and computation" activities, mainly focusing on "fractions as repeated unit fractions." Meanwhile, "representation" activities are primarily used to establish the "part-whole relationship" meaning of fractions. However, both countries' textbooks provide less than 10% of high cognitive-demand activity types, such as "explanation," "argumentation, and reasoning," for students to learn the six meanings of fractions.

Key words: Fraction concepts, elementary mathematics textbooks, Taiwan and China

學生小組成就區分合作學習融入六年級小數與分數的計算教學之研究

許家穎[1]　魏士軒[2]

[1] 國立臺中教育大學數學教育系 bma112101@gmail.com

[2] 國立臺中教育大學數學教育系 scottiewei@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在探討小組成就區分合作學習法（STAD）對國小六年級學童在「小數與分數的計算」單元之學習成就與學習動機的影響，本研究採用實驗研究法分析兩組學生在數學學習成就上的差異，並探討實驗組學生在學習動機前後測之變化，期望研究結果能為國小教師在數學教學實踐中提供參考。選取雲林縣偏遠地區麥寮鄉兩所國小作為研究場域，參與學生分配至實驗組與對照組，研究者參考相關文獻，設計並實施適用於實驗組的合作學習教學實驗。

在量化分析方面，本研究蒐集兩組學童的「小數與分數的計算成就評量」成績，並針對實驗組進行「數學學習動機量表」的前後測分析，以檢視不同教學方法對學習成效與學習動機的影響。

在質性分析部分，每次教學結束後，實驗組學童需撰寫數學學習日誌，記錄當日學習收穫與心得。另外學童會以小組為單位進行討論，研究者則透過平板錄音觀察紀錄各組的討論情形。完整教學實驗結束後，研究者依據小數與分數的計算成就評量的高、中、低分組，從實驗組各組選出 2 位(一名男生、一名女生)，進行學習動機相關的個別晤談，以深入了解合作學習對學生學習態度與動機的影響。

結果顯示兩種教學法在學習成效與學習動機上的提升無顯著差異，雖然實驗組學生在學習興趣、自信心與投入度方面有所提升，但與對照組相比，未達顯著性。

關鍵字：小組成就區分法、合作學習、學習動機、偏遠地區

壹、緒論

本研究旨在探討小組成就區分合作學習法（STAD）融入數學教學對國小五年級學童在「小數與分數的計算」單元之學習成就與學習動機的影響，研究目標在於透過不同的教學模式，分析其對學生數學學習成效與動機的差異，進一步了解合作學習是否能有效提升學生的學習表現。期望透過學童對課堂內容的理解與學習歷程，使其所獲得的數學知識與技能內化為可遷移的能力，真正應用於日常生活與未來學習中。

一、研究動機

數學是國小階段的核心基礎課程，其中分數與小數的四則運算對於培養學生的數學思維與解題能力具有關鍵作用。由於涉及抽象概念（如通分、約分）以及繁瑣的計算過程，該單元常成為學生學習的難點，學生在分數概念中最常見的錯誤是概念和程序錯誤，即在比較、排序和執行分數計算操作時。許多學生因理解不完全或計算錯誤而逐漸喪失學習興趣與信心（Alkhateeb, 2020; Dash, 2020; Jarrah et al., 2022）。

國內外許多研究皆探討「合作學習」對學童學習成效與動機的影響，其研究顯示，此方法不需重新編寫教材或改變課程大綱，只需設計符合合作學習情境的

教案與學習活動，即可有效實施。因此，若能將合作學習融入數學教學，透過同儕之間的互動、鼓勵與解釋，學生的學習動機將提升，學習成效亦可優化，使其擺脫傳統講述式教學「教師講授、學生被動接受」的情境，進而促進更積極的學習參與。

本研究採用合作學習法中的 STAD（Student Teams Achievement Divisions，學生小組成就區分）合作學習法是一種透過異質分組、小組合作與積分競賽來激發學生學習動力的教學策略，相關研究指出，STAD 方法能幫助學生互相支持、共同進步，尤其適用於數學教學中較具挑戰性的運算單元。因此本研究旨在探討STAD 方法融入分數與小數四則運算教學的效果，期望為國小數學教學提供具體建議，進一步提升學生的學習成就與學習動機。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究之研究目的：

（一） 探討 STAD 合作學習法對六年級學生的合作態度。

（二） 探討 STAD 合作學習法對六年級學生數學興趣學習動機。

（三） 探討 STAD 合作學習法對六年級學生分數與小數四則學習學業成就之影響。

貳、文獻探討

一、合作學習的意涵與理論基礎

合作學習是一種結構化且系統化的教學策略，強調異質小組成員間的相互合作與支持，以提升學生的學習成效與團隊合作能力。其核心理念在於學生共同分擔責任，透過積極的互賴與互動來達成學習目標。合作學習將學生置於學習的中心，鼓勵他們透過討論、分享與問題解決來建構知識。此外，教師的角色也從傳統的知識傳授者轉變為學習的促進者，提供適切的指導與支持。Agustina (2016) 也表明，為學生提供用自己的語言和方法交流想法的機會可以幫助他們提高解決問題的能力。根據 Nurhikmah & Ernawati (2020) 的說法，可以使用的替代方案之一是合作學習模式，其中合作學習要求學生積極、積極地進行小組討論，同時仍然尊重。

Johnson 和 Johnson（1999）指出，合作學習能有效促進學生的自主學習與學習興趣，優於傳統的個別學習模式。合作學習的理論基礎涵蓋多種學術觀點，其中建構主義理論（Constructivism）由 Piaget 和 Vygotsky 提出，主張學生透過與環境及他人的互動來建構知識，Vygotsky 的「進側發展區（ZPD）」理論進一步強調，透過同儕合作，學生能夠達到個體無法獨立完成的學習高度。社會互賴理論（Social Interdependence Theory）認為團隊的成功依賴於成員之間的積極互賴，透過協作促進學習成效（Johnson & Johnson, 1999）。社會建構論（Social Constructivism）則進一步強調學習是一種透過社會互動進行的合作過程，學生在討論與協商中深化對概念的理解，並共同建構知識。吳美慧（2014）研究發現 STAD 教學策略在國小數學教學中能顯著提升學生的學業成效與學習興趣。

二、合作學習的特色與優勢

李俊湖（2015）提出合作學習有別於小組學習，是學生在團體內相互支持一起工作，以建立積極互賴的關係，共同增進自我與他人的學習，並發展個人績效與責任感。現今合作學習具有以下六大特點：（1）異質分組：促進多元觀點的交

流與學習；(2) 積極互賴：成員間的成功彼此幫助，提升責任感；(3) 個人責任：每位成員需對自己的學習和小組目標負責；(4) 促進互動：強調討論、反饋與合作解決問題；(5) 人際與小團體技巧：幫助學生發展溝通、協作與問題解決能力；（6）團體歷程：鼓勵小組反思運作效率並持續改進，這些特色使合作學習在提升學生學習動機與學習成效方面展現顯著優勢。

三、合作學習在教育實踐中的應用

近年來，合作學習已廣泛應用於不同學科與教育階段，特別是在數學、科學與語言學習方面，展現出良好的學習成效。學習模式合作學習 STAD 類型有利於學生以小組形式合作，互相幫助並交換意見以實現學習目標。這種方法不僅增加了學生之間的互動，也鼓勵學生更積極地參與教學過程。在上下文中 21 世紀技能，合作學習非常重要，因為它支持 4C 技能（批判性思維、溝通、協作和創造力）的發展，這是 21 世紀教育的主要焦點。

STA 是所有合作學習方法中最容易實施的一種，是 Slavin 於 1978 年所發展出來的合作學習法，根據 Rizzaludin (2022)的說法，這種名為 STAD 的合作學習活動在實施過程中涉及 4 到 5 名具有不同成就、種族和性別的學生，他們被聚集在一個學習小組中，教育者的任務是首先展示材料。Asmedy (2021) 認為，STAD學習模式是將學生分為多個異質群體的學習模式，其中包含 4 至 5 個人，每個人來自不同的種族背景、學術技能和性別。研究顯示，合作學習不僅能夠提升學習成就，還能增強學生的社交技巧與解決問題的能力。合作學習能夠營造積極的學習環境，讓學生透過互相支持與回饋提升學習信心，減少學習焦慮。未來在教育實踐中，教師可透過設計適合合作學習的課程與活動，有效促進學生的知識建構與能力發展，進而提升整體教學成效。透過 Saleh & Filawati (2019)的研究可知，實施 STAD 模式合作學習策略能夠幫助學生提昇在校活動和學業成績。根據Tambunan 等人（2020）的研究，透過 STAD 學習，可以提高學生處理數學問題的能力。這些研究(廖玉鈴，2020；吳秋蓮，2017；莊媛婷，2022；侯慧玲，2019；陳慧玉，2017；Tania et al.， 2024）均證實，合作學習不僅能有效提升數學學習成效，還適用於培養團隊合作技巧、促進學習態度與強化溝通模式，研究亦指出，合作學習能提升學生的幸福感，並在從基本技能習得到複雜問題解決的各層面均展現顯著成效。

參、研究方法與設計

一、 研究架構

本研究採用準實驗研究法之不等組前後測實驗設計，透過前測、實驗教學與後測，探討 STAD 合作學習法在國小六年級數學教學中的影響，研究對象分為實驗組與對照組，其中實驗組採用 STAD 合作學習法，對照組則使用傳統講述教學法，以比較兩種教學法對學生數學學習成效與學習動機的影響。

本研究的自變項為教學法，分為 STAD 合作學習法與傳統講述教學法。依變項則為學生的數學學習成效與學習動機，其中學習成效以「分數與小數四則運算測驗成績」進行評估，學習動機則透過學習動機量表進行測量。

為確保研究的內部效度，本研究控制多項變因，以減少非教學法因素對結果的影響，在教學內容方面，實驗組與對照組皆使用相同的教材與教學進度，以確保學習內容的一致性。教學時數保持相同，兩組皆接受 7 節課的教學，每節課 40 分鐘，確保學生的學習時間一致，為避免教師風格影響學生的學習表現，實驗組由研究者親自授課，而對照組則由原班教師進行教學，確保教學方式為唯一的變因，在學生特性方面，透過前測共 13 題，滿分 13 分，結果確認兩組學生的程度

相近，以確保兩組學生的學習起點相當，進而提升研究結果的信效度。

表 3-1

小數與分數的計算前測成就評量程度分析

前測總分	人數	平均值	標準差
實驗組	14	5.57	3.031
對照組	17	5.41	3.607

本研究設計旨在確保實驗過程的嚴謹性,使研究結果能夠準確反映 STAD 合作學習法對學生數學學習成效與學習動機的影響,並提供國小數學教學應用的實證參考。

二、　教學者

(一) 實驗組教師

實驗組的教學由研究者本人負責，研究者熟悉 STAD 合作學習法，並參與本研究的教學設計與實施，在課堂中，研究者的主要職責包括組織小組討論、監控學生學習進度，以及進行積分競賽，確保學生能透過合作學習模式提升數學學習成效。研究者在教學過程中提供適時的學習支持與指導，以協助學生建立對數學概念的深層理解。

(二) 對照組教師

對照組的教學則由原班級數學教師負責，該教師擁有 9 年的數學教學經驗，對教材內容及教學進度安排皆十分熟悉。對照組採用傳統講述式教學法，教師以講解數學概念與演示解題步驟為主，並搭配習題練習，以鞏固學生對數學運算的理解與應用。

本研究透過不同的教學者與教學法進行比較,期望能清楚呈現 STAD 合作學習法對六年級學生數學學習成效與學習動機的影響。

三、　研究對象

本研究的研究對象為雲林縣麥寮鄉兩間國小的六年級學生，共計兩個班級，其中一班為實驗組，另一班為對照組。透過不同的教學模式，探討 STAD 合作學習法對學生數學學習成效與學習動機的影響。

(一) 實驗組

實驗組學生來自研究者所任教的班級，班級總人數為 14 人（男生 9 人，女生 5 人)。該班學生以異質分組方式進行分組，依據數學成績與學生特質分為 3 組，每組 4 至 5 人。分組過程中，研究者綜合考量性別比例、學生互動關係及學習能力，以確保小組成員具有多元性與均衡性，促進小組內部有效合作與學習支持。

為確保分組的合理性與公平性，本研究於教學前進行先備知識測驗，測驗工具採用康軒國小六年級上學期第一單元前測考卷，測驗結果作為學生分組依據，以利後續合作學習的實施。

(二) 對照組

對照組學生來自另一間國小的六年級班級,班級總人數為 17 人(男生 8 人，女生 9 人)，該班採用傳統講述式教學法，學生不進行小組分組，而是依照固定座位接受數學課程，主要透過教師講解與習題練習進行學習。

為確保兩組學生的學習起點相近，在實驗開始前，兩組學生皆進行數學成績的基礎檢測，測驗結果顯示兩組學生的平均分數接近，無顯著差異，確保實驗組與對

照組在研究開始時的可比性。

本研究透過實驗組與對照組的比較分析，探討 STAD 合作學習法在數學學習成效與學習動機方面的影響，期望為國小數學教學提供實證依據。

四、　研究工具

本研究旨在探討 STAD 合作學習法應用於國小六年級學生分數與小數四則運算學習的成效與學習動機，並設計與使用多種研究工具來收集量化與質性數據。主要研究工具包括評量試卷、學習動機量表、小考、學生學習日誌、課堂觀察紀錄表與小組積分記錄表，以確保研究數據的完整性與準確性。

研究者根據教學內容與學習目標，選用康軒版與翰林版 113 年度國小數學第十二冊第一單元測驗卷，作為單元前測與後測的測驗工具。前測主要評估學生對分數與小數基本概念及運算技能的掌握程度，而後測則用來檢測學生在 STAD 合作學習法教學後的學習成效，特別針對運算能力與應用題解題能力進行評估。試卷內容涵蓋分數與小數的加減、乘除及混合運算，試題類型包括選擇題、填充題與應用題，並已經過現場教師與專家學者審閱，確保其符合課綱與評測標準。前後測內容一致，僅在數值上有所變動，作為複本測驗，以分析學生的學習成就與進步情形。

學習動機量表則參考吳美慧（2014）設計的數學學習興趣問卷，並進行適當修改，以測量學生在 STAD 合作學習環境中的學習興趣變化。問卷涵蓋學習興趣與合作學習態度兩大面向，共 25 道題目，使用 5C 量表進行評估，此問卷用於評估學生在實驗前後學習動機的變化，進一步分析 STAD 方法是否能有效提升學生的學習興趣。

在每兩節課後，學生需進行 5 道小考題目，透過 Quizzizz 數位測驗提供遊戲化學習體驗，以降低測驗焦慮，並即時檢測學生對當日教學內容的掌握情況。小考涵蓋分數與小數的基本運算與應用題，形式包括選擇題與填充題，結果同時作為小組積分的依據，以激勵學生積極參與學習，促進小組合作與競爭意識。

為記錄學習歷程，學生需撰寫數學學習日誌，記錄七節課的學習心得與反思，並搭配圖畫呈現學習經驗，數學學習日誌有助於學生整理與內化所學內容，也提供研究者分析學生對 STAD 合作學習的真實體驗與學習感受，作為補充質性數據的依據。

研究過程中，研究者使用課堂觀察紀錄表來記錄學生的學習行為，包括專注度、小組互動情況與課堂表現。紀錄表分為量化指標（如發言次數、專注程度）與質性描述（如學生在合作學習中的具體行為），作為分析學生學習行為與小組合作情況的輔助資料，幫助評估 STAD 合作學習法的實際影響。

最後透過小組積分記錄表追蹤小組合作學習的成果，包括小考得分、組內測驗進步情況及合作表現。小組積分計算方式根據組員個別測驗成績與小組總體進步幅度進行加總，並提供即時反饋與排名，以鼓勵學生積極參與學習與合作，提升學習動機與團隊競爭力，使學習過程更加具挑戰性與趣味性。

五、　晤談對象

為深入了解不同學習背景與能力的學生對 STAD 合作學習法 的感受及影響，本研究選取實驗組中高、中、低成就的學生進行半結構式訪談，透過個別經驗分享，分析合作學習對不同層次學生的影響與適用性。

晤談對象依據成績表現進行分層選取，高分組（前 27%） 代表班級中學習能力較強的學生，通常具備較好的學習策略與領導能力；中分組（中間 46%）

代表班級中典型學習者，反映一般學生的學習狀況；低分組（後 27%） 則涵蓋學習能力較弱的學生，能揭示學習過程中的障礙與挑戰。透過這樣的分層方式，能夠全面呈現不同學習經驗，並分析 STAD 方法在不同成就層次學生中的適用性與公平性，質性訪談可補充量化數據的不足，捕捉學生在學習過程中的情感變化、學習行為與合作經驗。

訪談對象的選取標準不僅考量學業成就，也納入學生的口語表達能力與參與意願，確保訪談內容具代表性與研究價值，每個成就層次各選取兩名學生（男、女各一名），共計六人。訪談內容涵蓋學生對學習態度、合作學習經驗與解題過程的看法，藉由不同層次學生的視角，深入探討 STAD 方法在實驗教學中的實際影響與學習情境。

肆、研究結果與討論

一、探討 STAD 合作學習法對六年級學生分數與小數四則學習學業成就之影響

本節旨在探討國小六年級學生在學習小數與分數計算時，使用學生小組成就區分法（STAD）與講述式教學法這兩種教學方式後，對於學生數學學習成效的影響差異，並進行分析比較。本研究以教學法為自變項，後測總分為依變項，並將前測總分設定為共變項，進行單因子共變數分析（ANCOVA）。在進行此分析之前，須先確認組內迴歸係數是否具有同質性，根據表 4-1 的檢驗結果顯示，教學法與前測成績之間的交互作用未達統計顯著水準（$F = .846$，$p = .336 > .05$），表示滿足組內迴歸係數同質性的假設，因此可以繼續進行單因子共變數分析。

表 4-1-1

來源	第 III 類平方和	df	均方	F	顯著性
教學法	7.248	1	7.248	1.320	.261
前測總分	56.722	1	56.722	10.331	.003
教學法 * 前測總分	4.643	1	4.643	.846	.366
殘差	148.247	27	5.491		
總計	2614.000	31			
校正後總計	227.419	30			

接著進行單因子共變數分析（ANCOVA），由表 4-2 的分析結果可知，在排除前測成績的影響後，不同教學法對學生後測成績之影響並未達統計上的顯著差異（$F = .502$，$p = .484 > .05$），顯示學生小組成就區分法（STAD）與講述式教學法對於學生數學推理能力的學習成效並無明顯差異。

表 4-1-2

不同教學法數學評量學習成效差異之共變數分析摘要表

來源	第 III 類平方和	df	均方	F	顯著性
前測總分	71.060	1	71.060	13.014	.001
教學法	2.743	1	2.743	.502	.484
殘差	152.889	28	5.460		
總計	2614.000	31			
校正後總計	227.419	30			

二、探討 STAD 合作學習法對六年級學生數學興趣學習動機及合作態度之分析

在學習動機方面，本研究透過學習動機量表進行分析，發現實驗組學生在數學的學習興趣、自信心與學習投入度等面向，雖有提升的趨勢，但與對照組相比未達顯著差異。從訪談資料可見，學生普遍認為透過 STAD 合作學習法能提升數學學習的趣味性，並透過小組討論的方式，更有效掌握較為困難的數學概念，此學生認為小組合作能減少計算錯誤的情形，有效提升解題的準確性。

中低成就學生在訪談中指出，透過 STAD 合作學習法，他們更容易從同儕獲得即時協助，降低了個人的學習壓力，進而提升自信與參與數學學習的意願。由此可見，STAD 合作學習模式對於不同學習成就學生的學習動機具有潛在的正向影響，尤其對中低成就學生而言，能有效提升其學習的主動性與積極性。

三、國小六年級學生運用學生小組成就區分法（STAD）進行課堂討論內容之探討。

本研究透過觀察國小六年級學生於使用學生小組成就區分法（STAD）進行數學課堂討論的情形，發現各小組之討論效率存在明顯差異。第二組由高成就學生 S6 同學主動於課程初期帶領小組成員展開討論，因此在第一節課即展現良好的討論成效(表 4-3-1)。第三組內的每位組員皆表現出積極參與討論的態度，然而數學能力較佳的 S5 同學表示，長期帶領小組討論略感負擔，最感興趣的環節並非小組討論，而是 STAD 中的個人測驗，由於測驗以平板電腦（Quizzizz）進行，因此每次的小考都讓他感到特別有趣；相較之下，另一名具備一定數學能力的 S3 同學則認為，透過多次確認解題步驟及互相討論雖稍顯繁瑣，但能有效減輕自身壓力並增強解題信心(表 4-3-2)。第一組在初期的討論效率相對較低，但隨著課程進行，至第五節課時逐漸展現討論品質的提升，顯示出該小組經歷了一段漸進式適應與改善的歷程。

表 4-3-1

學生第二小組第一節課題目討論內容

<table>
<tr><th>第一節課題目</th><th>第二組</th></tr>
<tr><td>下表是六年 1 班這個月做資源回收部分品項的紀錄，有地方被 弄髒了。鋁製品的回收單價比鐵製品多幾元？
<table>
<tr><th>項目</th><th>回收單價</th><th>回收量</th><th>賣得價錢</th></tr>
<tr><td>鋁製品</td><td>每公斤 32 元</td><td>7.5 公斤</td><td>240 元</td></tr>
<tr><td>鐵製品</td><td>每公斤[illegible]元</td><td>20.5 公斤</td><td>164 元</td></tr>
</table>
</td><td>S13：32 是回收的單價。
S12：他就價錢減回收價就好了，價錢除回收價，我們要先算出鐵製品的回收單價。
S6：沒有!鋁製品總價錢除以回收量就等於每公斤的單價，依這個原理所以鐵製品總獲得的價錢除以回收量，就可以算出每公斤多少元。
S12：鋁製品回收單價再減掉鐵製品的回收單價，會等於 24 元。</td></tr>
</table>

表 4-3-2

學生第二小組第一節課題目討論內容

第三節課題目	第三組
$2\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$	*S10*：中間這個。 *S7*：不用，它已經是乘了就不用。 *S5*：1 又 7 分之 8，算完了 *S4*：啊不行直接唸出來 187 喔 *S5*：哪裡 187 欸? *S11*：哪一個要顛倒。 *S5*：$2\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$，除變乘啊，要變號的後面那個數字。

伍、結論

本研究旨在探討國小六年級學生在學習小數與分數計算時，使用學生小組成就區分法（STAD）與傳統講述式教學法後的數學學習成效差異，並透過量化與質性資料進行分析比較。研究結果顯示，在排除前測成績影響後，兩種教學法對學生後測數學成績及學習動機之影響皆未達到顯著差異，說明 STAD 與講述式教學法在提升學生數學能力方面的效果無明顯差異。

從學習動機與訪談資料的分析發現，學生普遍認為透過 STAD 合作學習模式能提高數學學習的趣味性，尤其是透過小組討論更容易掌握較困難的數學概念，並且減少計算錯誤，提升解題的準確性。中低成就學生特別提到，透過 STAD 模式能更容易獲得同儕的即時協助，有效降低學習壓力，進一步提升學習的自信心與主動性。學生也曾表示，使用平板電腦進行考試不僅能提高考試的意願，也能有效降低考試的焦慮感，Quizzizz 等平板電腦測驗工具的運用，也證實能提高學生參與考試的意願，同時減緩考試時的焦慮感，進而提升測驗表現與動機。

研究雖證實 STAD 方法仍然一定正向的影響，但研究對象限於特定地區與學校，未必能完全適用於不同環境，學習成效主要透過測驗與問卷評估，未能全面反映學生長期學習成果，未來可透過長期追蹤研究，分析 STAD 方法對學生學習的持續影響，並探討如何在不同學習風格與需求下，進一步最佳化合作學習策略，以提升學習成效與教學實踐的適用性。

參考文獻

壹、中文部分

李俊湖（2015）。**十二年國民基本教育有效教學策略—合作學習**。國立臺灣師範大學出版社。

吳美慧（2014）。**合作學習對國小二年級學生數學領域學習成效影響之研究**（系統編號：102NTCT0611017）〔碩士論文，國立臺中教育大學〕。臺灣碩博士論文知識加值系統。

侯慧玲（2019）。**小組積分競賽合作學習融入異分母分數的加減單元對五年級學童學習成就影響之研究**（系統編號：107NTNT1507006）〔碩士論文，國立臺

南大學〕。臺灣碩博士論文知識加值系統。
莊媛婷（2022）。**合作學習法融入對國小高年級學童數學學業成就與人際關係之影響**（系統編號：111NPTU1568011）〔碩士論文，國立屏東大學〕。臺灣碩博士論文知識加值系統。
廖玉鈴（2020）。**利用合作學習教學策略提升偏鄉小校國小二年級學童數學學習之探討**（系統編號：107NTNT1212007）〔碩士論文，國立臺南大學。臺灣碩博士論文知識加值系統。

貳、英文部分

Alkhateeb, M. A. (2020). Correcting misconceptions in fractions using interactive technological learning activities. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 19(4), 291–308.
Agustina, L. (2016). Upaya meningkatkan kemampuan pemahaman konsep dan pemecahan masalah matematika siswa SMP Negeri 4 Sipirok kelas VII melalui pendekatan matematika realistik (PMR). *EKSAKTA: Jurnal Penelitian Dan Pembelajaran MIPA*, *1*(1).
Asmedy, A. (2021). Pengaruh model pembelajaran kooperatif tipe STAD terhadap hasil belajar siswa sekolah dasar. *Ainara Journal (Jurnal Penelitian dan PKM Bidang Ilmu Pendidikan, 2*(2), 108–113
Nurhikmah, N., & Ernawati, E. (2020). Pengaruh model Team Assisted Individualization (TAI) terhadap kemampuan berpikir kritis matematis siswa berbasis media Whatsapp. *JTMT: Journal Tadris Matematika*, *1*(2), 19-26.
Dash, A. S. (2020). The approach to teaching fractions: Misconceptions and more. *Azim Premji University*.
Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E.(1999). Learning together and alone: *Cooperative, Competitive, and Individual learning.* (5th ed.), Boston：Allyn & Bacon. Lester,
Jarrah, A. M., Wardat, Y., & Gningue, S. (2022). Misconception on addition and subtraction of fractions in seventh-grade middle school students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(6), em2115.
Rizzaludin, R. (2022). Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Student Teams Achievement Divisions (STAD) terhadap Peningkatan Prestasi Belajar Siswa. *Ainara Journal (Jurnal Penelitian Dan PKM Bidang Ilmu Pendidikan)*, *3*(1), 11-16.
Saleh, R. (2019). Efektifitas penerapan model pembelajaran kooperatif tipe students team achievement division dalam meningkatkan aktivitas dan hasil belajar kognitif siswa. *Edubiotik: Jurnal Pendidikan, Biologi dan Terapan*, *4*(02), 75-82.
Slavin, R.E.(1995). *Cooperative learning ：Theory,research,and practuce* (2nd ed).Masschuetts: Allyn and Bacon.
Tambunan, N., Siregar, E. Y., & Harahap, M. S. (2020). Efektivitas Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Student Teams Achievenment Division (Stad) Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa SMA NEGERI 1 ANGKOLA SELATAN. *JURNAL MathEdu (Mathematic Education Journal)*, *3*(1), 61-68.
Tania, R., Pahmi, S., Hopeman, T. A., & Minasyan, S. (2024). The impact of the STAD model on motivating math learning in addition and subtraction. *Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, **12**(1), 173-186. https://doi.org/10.30738/union.v12i1.15936

The Study of Student Teams Achievement Divisions (STAD) Cooperative Learning Integrated into Sixth-Grade Decimal and Fraction Computation Teaching

Jia-Ying Hsu[1], Shih-Hsuan Wei[2]

[1]Department of Mathematics Education, National Taichung University

[2]Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

The Effects of Student Teams-Achievement Division (STAD) on Sixth-Grade Students' Learning Achievement and Motivation in Decimal and Fraction Calculations This study aims to investigate the effects of the Student Teams-Achievement Division (STAD) cooperative learning method on the learning achievement and motivation of sixth-grade elementary school students in the "Decimal and Fraction Calculations" unit. An experimental research design was adopted to analyze the differences in mathematics learning achievement between two groups of students and to examine changes in the learning motivation of students in the experimental group before and after the intervention. The study seeks to provide insights for elementary school teachers in their mathematics teaching practices. The two elementary schools in Mailiao Township, a remote area in Yunlin County, were selected as the research sites. Students were assigned to either the experimental group or the control group. Based on a review of relevant literature, the researcher designed and implemented a cooperative learning instructional experiment for the experimental group.

For quantitative analysis, students' performance on the "Decimal and Fraction Calculations Achievement Assessment" was collected for both groups. Additionally, pre- and post-tests using the "Mathematics Learning Motivation Scale" were administered to the experimental group to examine the impact of different teaching methods on learning outcomes and motivation.

For qualitative analysis, students in the experimental group were required to write learning journals after each lesson to record their learning experiences and reflections. After the instructional experiment was completed, students from the experimental group were categorized into high, medium, and low achievement levels based on their assessment results. Two students (one male and one female) were selected from each category for individual interviews focusing on learning motivation. These interviews aimed to gain a deeper understanding of the impact of cooperative learning on students' learning attitudes and motivation.

The results indicate that no significant difference existed in the improvement of learning achievement and motivation between the two teaching methods. Although students in the experimental group demonstrated some increase in learning interest, confidence, and engagement, the difference was not statistically significant compared to the control group.

Keywords: Student Teams Achievement Divisions (STAD), Cooperative Learning, Learning Motivation, Remote Areas

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(3) 數位科技工具與數學教學

研討主題

「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系

台灣數學教育學會

國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

八年級學生經歷數位數學遊戲學習等差數列的感受

楊凱琳[1]、施柏帆[1]

[1]國立臺灣師範大學數學系

摘要

本研究旨在探討將數位數學遊戲融入數學課堂，對八年級學生學習等差數列單元之情意表現的感受。以新竹市某所與桃園市某兩所公立國中八年級共六個班級學生為研究對象，將《速戰數決》數位數學遊戲融入於正式課程中。情意表現藉由情意問卷蒐集學生的情意反映、對課堂參與之感受，分別以敘述性統計與歸納法進行量化與質性的資料整理與詮釋。本研究以量化分析為主、質性分析為輔，綜合評估學生對於數位數學遊戲融入課堂的感受。研究結果顯示，(1)情意表現有明顯的正向效益，學生普遍展現出高度的學習動機與參與度。(2)大多數學生肯定此教學方式，並從學習經驗中提供具建設性的教學與遊戲優化建議。建議未來研究可擴大應用情境與教學單元，設計更具挑戰性的任務並提升評量工具的品質；同時，納入長期追蹤與質性資料，以更全面理解數位數學遊戲對學生學習歷程與成效的影響。

關鍵字：數位遊戲式學習、數位遊戲式教學

壹、緒論

一、　研究動機與背景

數學對於多數學生來說，常被認為是困難且令人感到害怕的科目，也使得數學動機低落、數學焦慮的情形(Hussein et al., 2021)。儘管臺灣學生在國際評量如 TIMSS 2023 與 PISA 2022 中展現出優異的數學表現，然而情意面向卻不容忽視。根據 TIMSS2023 的調查結果，臺灣四年級與八年級學生不喜歡數學的比例分別高達 46% 與 61%；PISA2022 亦顯示數學焦慮指數位居全球第三，反映出學習動機與參與感的不足。Yang 等人 (2022)指出，臺灣教學現場普遍採取「表現導向」教學，重視考試成績而忽略學生理解與策略發展。此教學模式雖有助於短期提升成效，卻易忽視個別差異與有效引導，導致學生在學習歷程中缺乏參與感與學習動機，進而影響其情意表現。

近年來，隨著科技迅速發展，數位遊戲式學習（Digital Game-Based Learning, DGBL）被視為一種能有效提升學生學習動機的方式，也逐漸成為數學教育領域中的熱門研究主題之一(Byun & Joung, 2018)。然而，Byun 與 Joung 也指出，儘管現有的數位數學遊戲之機制能提高學生的參與度，但其內容多侷限於重複練習既有概念。其數學知識往往是附加於遊戲之外，而非融入於機制本身，難以幫助學生鞏固數學概念的理解。甚至，若遊戲設計上未能妥善結合學習目標，可能導致學生「玩了遊戲卻沒有真正學到東西」的情形(Ke, 2008)。除此之外，過去研究也發現，數位數學遊戲的研究對象多聚焦於小學生，針對國高中生的探討相對稀少(Hussein et al., 2021)。

《速戰數決》在此背景之下，配合教育部「中小學數位學習精進方案」之「中小學數學遊戲開發與推廣計畫」建置了數位數學遊戲平臺，涵蓋了適合國小、國中以及高中學生的數學遊戲，試圖彌補過去研究中的不足。其設計理念以「數學奠基活動」(Mathematics-Grounding Activities, MGAs)為核心，強調在遊戲機制、提示系統中融入數學內容。讓學生在遊玩遊戲的過程，透過觀察、操作及嘗試錯誤等過程，主動進行數學思考並建立數學概念。然而，國內對於此平臺遊戲進行的研究較為缺乏。加上過去的研究也指出，在實施數位遊戲時，教師於過程中的教學與引導扮演了重要因素(Hussein et al., 2021)。因此，將數位數學遊戲搭配教師既有的數學課堂中進行較能發揮其效益。

基於上述的研究背景與動機，本研究以國中八年級學生為對象，瞭解《速戰數決》數位數學遊戲融入數學課堂對於學生的情意表現，並以過去研究中少被提及的等差數列單元為例。

二、研究目的與問題

本研究旨在探討將數位數學遊戲融入數學課堂，對八年級學生學習等差數列單元之情意表現的感受，對應研究問題如下：

1. 數位數學遊戲融入數學學習的教學方式下，對於國中八年級學生在等差數列概念的情意表現為何？
2. 學生對於數位數學遊戲融入數學教學的看法為何？

貳、 文獻探討

一、數位遊戲式學習

數位遊戲式學習(Digital Game-Based Learning, DGBL)，最早可追溯於 Marc Prensky 所提出的定義，泛指任何透過數位遊戲來進行學習的活動(Prensky, 2001)。DGBL 因其遊戲的樂趣與挑戰，可激發學生的學習動機，並使學習過程更具沉浸性與互動性(Hwa, 2018)。典型的 DGBL 設計往往包含任務導向、即時回饋、難度遞進、得分系統與目標導向等要素，透過這些機制增進學生的參與感與自我調節能力(Hussein et al., 2021)。然而，後續學者對此定義亦提出檢討與批評。 Byun 與 Joung (2018)的後設分析研究指出，Prensky 提出的定義過於鬆散，未強調學習成效或教學目標是否有達成，容易將任何含有遊戲元素的數位活動皆視為 DGBL。導致後續研究在操作與成效分析上產生模糊性。

事實上，DGBL 的設計特徵不僅關係到遊戲的類型，更與學習的深度息息相關。Yang (2025)針對既有的數位數學遊戲類型分成三類：第一類，「靈魂出竅型」(Soul leaving a body)，遊戲與學習彼此分離。學生仍透過傳統的測驗或教學影片進行學習，遊戲內容僅為附加的娛樂元素；第二類為「借屍還魂型」(Soul borrowing a body)，學習內容被整合進遊戲情境中，學生需運用既有的知識完成任務，主要針對已學習過的數學概念精熟練習；第三類則為「脫胎換骨型」(Transforming a body)，該類則是將數學概念直接融入於遊戲機制之中，學生在觀察與操作的過程中即進行數學思考，從而促進其概念建構。Byun 與 Joung (2018)亦指出，第一類與第二類型的遊戲雖有助於提升學習動機與精熟複習，但較難以深化對於數學的理解。反之，第三類因數學任務融入於遊戲機制中，能促使學生進行數學思考、投入於數學學習當中。因此，本研究將瞭解第三類數位遊戲類型對於學生的情意表現。

二、數位遊戲式教學

雖然，數位數學遊戲已被廣泛認為能促進學生的數學學習動機與表現，但其成效並非僅取決於遊戲本身的設計，教師在教學過程中的引導也成為了重要關鍵(Hussein et al., 2021)。Ke (2008)也指出，教師的課堂引導、學習活動安排，以及提供適時的鷹架策略，將更有助於彰顯 DGBL 所帶來的效益。

進一步探究教師如何在 DGBL 中為學生搭建鷹架，Sun 等 (2021)透過課堂觀察與質性資料蒐集，深入瞭解小學生在 DGBL 數學課堂中對於教師鷹架策略的實際感受與學習經驗。從研究發現，學生普遍認為教師所提供的教學引導與鷹架協助，能幫助其理解任務、掌握學習重點、維持參與動機的關鍵要素。該研究將教師的鷹架策略分為兩種形式，分別為全班鷹架(whole-class scaffolding)與一對一鷹架(one-to-one scaffolding)。前者的目的主要用於規則說明與遊戲示範；後者主要用於提供即時回饋與提示。

一對一鷹架也呼應教育部「數位學習精進方案」中所強調的「四學」數位學習模式(教育部，2021)。透過學生自學、組內共學、組間互學以及教師導學的過程，除了達成全班鷹架、一對一鷹架之外，也能強化學生的數學學習動機與參與感，兼顧了差異化學習與合作學習的實施方式，建立起學生的自主學習能力。因此，本研究在數位數學遊戲融入於課堂教學的設計上，將採用教育部提出的「四學」策略。

參、研究方法

一、 研究方法與設計

本研究採用質量並進的研究方法，了解學生在課堂中進行數位數學遊戲後的情意表現。研究流程共分為三個階段(見**圖 1**)：研究準備階段、正式研究階段、資料分析階段，以下分別詳細說明：

(一) 研究準備階段

研究基於教育部「中小學數位數學遊戲推廣與實驗計畫」(前身為中小學數學遊戲開發與推廣計畫)下所進行的研究。由計畫主持人楊凱琳教授的帶領一群現職教師組成計畫團隊，將已開發完成的《速戰數決》國中組數位遊戲，結合教育部(2021)提出的「四學」教學模式，設計遊戲課程教案，並實際將數位數學遊戲融入於課堂教學中。

本研究採用《速戰數決》平臺遊戲中的《序數列車》，該款遊戲由劉建成老師、謝熹鈴老師、李慧玲老師以及吳冠霖老師所設計的數位遊戲，主要是用於發展等差數列概念。該遊戲共設計三個關卡，其任務安排具有明確的層次性，旨在循序漸進地引導學生建構等差數列的數學概念。有關遊戲內容的關卡介紹見**表 1**。

表 1 《序數列車》遊戲各關卡內容說明

遊戲畫面	關卡內容說明

	第一關結合學生熟悉的「打地鼠」情境，主要著重於檢視學生觀察與辨識數列規律的基礎能力。
	第二關為遊戲設計的核心環節，透過數字牌卡的排列與排隊條件等遊戲機制，促使學生在操作歷程中覺察數字之間的變化關係，進而理解公差對數列結構的影響，以推導等差數列第 n 項的一般公式。
	第三關則為進階挑戰，評量學生對前述概念的掌握情形，並引導其運用等差數列的性質進行問題解決，強化對抽象規則的應用能力。

(二) 正式研究階段

正式研究階段以新竹市某所公立國中 2 個班、桃園市某 2 所公立國中各 2 個班，尚未學習過等差數列的數學內容之 6 班國中八年級學生為施測對象。以該校數學教師為教學者，進行數位數學遊戲融入數學課堂活動。

(三) 資料分析階段

資料分析階段將分成量化與質性資料兩部分。量化資料分析方法主要包含內部一致性、確認型因素分析。質性資料分析方法主要為歸納法。

圖 1 研究流程

二、研究對象

本研究之研究對象為新竹市某所公立國中 2 個班、桃園市某 2 所公立國中各 2 個班，尚未學習過等差數列的數學內容之 6 班國中八年級學生為施測對象，共計 128 人，各校班級及人數分布見**表 2**。

表 2 各校參與教學實驗之人數分布

學校	班級	人數
新竹市 A 國中	2	40
桃園市 A 國中	2	48
桃園市 B 國中	2	40
合計	6	128

三、 研究工具與資料分析

情意問卷主要分為兩部分。第一部分為四點量表的問卷，包含五個向度：「使用科技的信心」(Pierce et al., 2007)、「數學焦慮」(Hopko, 2003)、「情感參與」、「認知參與」以及「行為參與」(Fredricks et al., 2004; Yang & Chen, 2023)，各向度皆為 1 題。最低分 1 分代表非常不同意，最高分 4 分代表非常同意，總共 5 題，僅第 2 題為反向題。第二部分則為開放題，用於調查學生對於數位數學遊戲融入教學的看法。詳細內容整理於**表 3**。

表 3 情意問卷之設計內容

面向	題目內容	題號	
使用科技的信心	在玩《速戰數決》平臺遊戲時，我能順利操作各種工具(如電腦、平板)	第一部分	第 1 題
數學焦慮	在玩《速戰數決》平臺遊戲時，我會因為無法完成任務而感到焦慮		第 2 題
情感參與	我覺得《速戰數決》平臺遊戲讓數學學習更有趣		第 3 題
認知參與	玩《速戰數決》平臺遊戲時，我需要主動思考		第 4 題
行為參與	我希望老師能提供更多《速戰數決》平臺遊戲的活動		第 5 題
數位數學遊戲對於數學學習的幫助	如果老師持續將「速戰數決」平臺遊戲融入於數學課堂中，對我的數學學習可能有的幫助是什麼？為什麼？	第二部分	第 1 題
數位數學遊戲對於教師教學方式建議	如果老師持續將「速戰數決」平臺遊戲融入於數學課堂中，我希望老師可以改變的地方是什麼？為什麼？		第 2 題

經研究者統計有效資料為 128 分，以下分別針對情意問卷進行信、效度分析：

1. 效度分析

研究者使用因素分析法，確認這五題是否呈現兩個因子：「正向」與「負向(焦慮)」情意。KMO 值為 .763，Bartlett 球形檢定達顯著水準($\chi^2(10) = 258.286$，$p < .001$)，資料適合進行因素分析。結果顯示，「正向情意」因子包含使用科技的信心、情感參與、認知參與及行為參與；「負向情意」因子包含數學焦慮。

2. 信度分析

「正向情意」的四個問項之內部一致性 α 值為 .848，達高度信度水準。

肆、研究結果與討論

一、數位數學遊戲對學生情意表現的影響

根據信效度分析結果，可初步將情意問卷的第一部分區分為兩大構面，分別為「正向情意」與「數學焦慮」。其中，正向情意包含使用科技的信心、情感參與、認知參與與行為參與等四個面向。以下將依此分類，針對結果(見**圖 2**)，分別進行詳細論述：

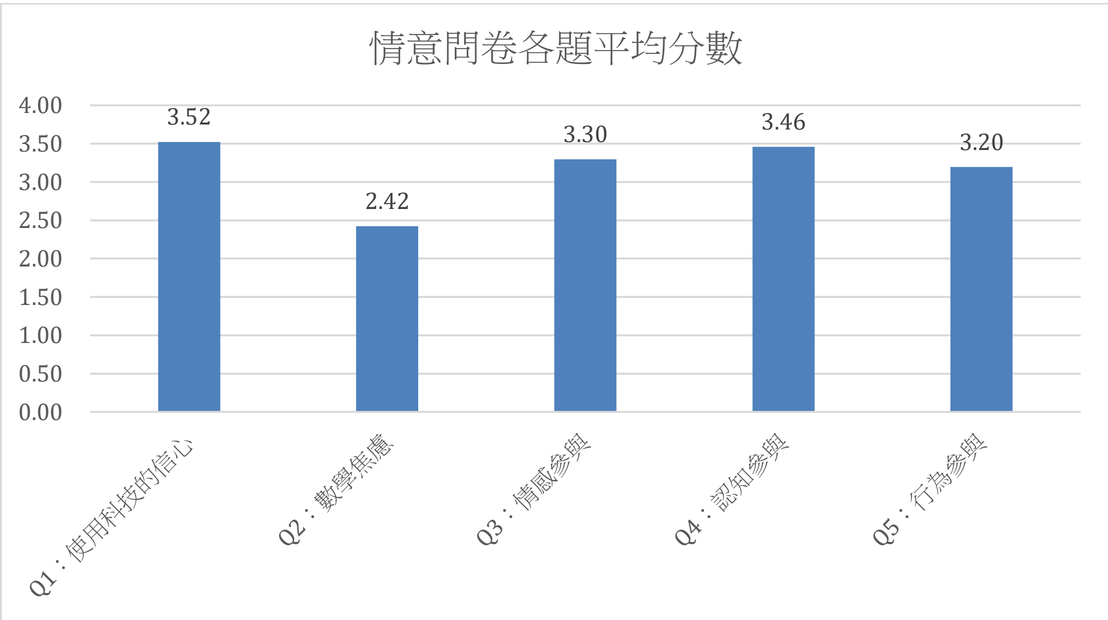
(一)正向情意

根據敘述統計結果，在正向情意構面的四個問項中，學生的平均得分皆高於 2.5，顯示整體傾向偏向肯定與正向的學習態度。其中，使用科技的信心之平均數最高(M = 3.52, SD = .63)，顯示大多數學生對於數位科技在學習過程中的應用具備良好的信心與接受度。認知參與、情感參與的平均數亦分別落在 3.30 與 3.46 (SD 分別為 .70 與 .83)，說明學生不僅認為《速戰數決》平臺遊戲能讓數學學習更有趣，也表示遊玩遊戲的過程中需要進行主動思考與理解。而行為參與雖為正向構面中得分相對較低者(M = 3.20, SD = .94)，但仍高於 2.5，表示多數學生在課堂中仍對於老師於數學課堂中將《速戰數決》數位遊戲融入課堂教學抱有期待。

(二)數學焦慮

數學焦慮的平均數為 2.42，略低於 2.5，但標準差則達 1.15，為五題中最高，顯示學生在焦慮的感受仍存在個體間的差異。部分學生可能對數學學習活動感到不安或排斥，反映出教學介入雖有遊戲融入的方式進行，但可能仍無法完全消弭學生原有的數學焦慮經驗。

圖 2 情意問卷的第一部分之量化結果 (n = 128)



整體而言，問卷結果反映出學生對數位遊戲融入數學教學具有明確的正向

情意回應，不僅展現出對科技操作的信心，也在情感、認知與行為層面表現出積極參與的傾向。這些結果顯示數位遊戲的融入有助於激發學生的學習動機與參與感。而數學焦慮的結果也值得我們進一步思考，對於部分學生而言，數位數學遊戲不全然能緩解學生的數學焦慮，也有賴教師於教學過程中為學生所搭建的鷹架(Sun et al., 2021)。

二、 學生對於數位數學遊戲融入數學學習的看法

為深入了解學生對數位數學遊戲融入數學課堂之看法，情意問卷的第二部分設計兩個開放性問題，分別探討數位數學遊戲對於數學學習的幫助以及對於教師教學方式建議。研究者將資料進行歸納，最終依據兩個開放性問題，分別進行詳細說明：

(一) 數位數學遊戲對於數學學習的幫助

在填答問卷的 128 名學生中，有 28.1%的學生表示，因為《速戰數決》平臺遊戲讓其能「熱衷於數學學習」，提起他們對於數學學習的興趣，也改變了他們對於數學學習的看法。例如，學生表示：「更樂意學習因為比聽課有趣」、「用比較好玩的方式學數學，因為平常覺得數學不太好玩」、「讓我更愛學數學，數學其實蠻有趣的」；也有 48.4%的學生表示，《速戰數決》平臺遊戲將能「促進數學思考與概念建立」。不僅僅是玩遊戲，過程中也需要進行數學思考。也因為需要進行數學思考，對於數學概念也較容易理解。例如，一些學生提到：「上課更能聽的懂。因為它能幫助思考」、「因為以玩遊戲的方式來上數學會更容易記住」、「遊戲中的即時反饋幫助我更快理解數學概念，並加強解題能力」；另外，也有 4. 7%的學生指出《速戰數決》平臺遊戲能作為課前預習的功能，有助於銜接後續的課程內容，學生表示：「上課比較清楚在做什麼，因為有課前練習」。

不過，也有 18. 8% 的學生未表達明確幫助或持保留態度，其中部分學生甚至認為遊戲對學習幫助有限。（遊戲難度對高成就學生而言，挑戰性不足）
建議教師可以在連結課本教學時，提供更多具有挑戰性的任務，以滿足這些學生的學習需求。

(二) 對於教師將遊戲融入課堂教學的調整方式

在填答問卷的 128 名學生中，有 74.2%學生滿意教師目前的教學方式，認為沒有需要再進行教學安排上的調整。不過，也有 14.1%的學生希望老師能提供更多遊戲融入課堂教學的機會，並於教學過程中提供多一些示範或是增加小組討論的機會。此回應也呼應了過去文獻所述，不能單提供數位數學遊戲給學生，教師於過程中如何給予引導與搭建鷹架也是重要的(Hussein et al., 2021; Sun et al., 2021)。

除此之外，也有 11.7%的學生非針對教師教學方式的調整提出建議，而是針對遊戲本身提出回饋。部分學生提及：「遊戲操作有時會卡」、「遊戲中的地鼠移動速度需要再加快」等。此一觀點也呼應了學生對於使用科技的信心，倘若因遊戲在操作出現困難，即便遊戲設計的有趣，也可能會降低學生的學習感受(Pierce et al., 2007)。

整體而言，多數學生認為《速戰數決》數位數學遊戲有助於提升學習興趣、促進思考並輔助課前預習，對情意表現產生正向影響。雖有少數程度較高的學生認為幫助有限，但普遍仍肯定其學習價值。針對教學安排，約七成學生表示無需改變，顯示整體教學設計獲得肯定；另有部分學生建議增加教學引導與活動互動，亦有學生針對遊戲本身提出優化建議，如提升速度與操作流暢

度。這些回饋有助於未來在遊戲設計與教學實施上進一步優化。

伍、結論與建議

一、 結論

(一)數位遊戲對學生在情意表現上有正向影響

研究結果顯示，學生在數位數學遊戲的學習過程中，整體展現出高度的正向情意反應。無論是在使用科技的信心、情感參與、認知參與或行為參與等面向，學生的回饋皆呈現出正面且積極的態度，顯示數位遊戲具有激發學習動機、促進思考參與與提升課堂投入的潛力。

然而，針對數學焦慮的調查亦反映出部分學生對數學仍存有不安與壓力感，顯示數位遊戲雖能改善學習氛圍，卻未必能完全消除原有的焦慮經驗。此結果提醒教師在教學過程中仍須搭配適切的引導與鷹架支持，方能有效因應學生間的個別差異，進一步發揮數位數學遊戲的最大效益。

(二) 學生對數位數學遊戲學習與教學回饋

從學生的觀點來看多數學生認為《速戰數決》能提升數學學習興趣、促進思考與加強概念理解，並具備課前預習的功能。然而也存在少數學生因程度較高或遊戲內容過於簡單，認為幫助有限，顯示未來教師可搭配設計更具挑戰性的學習任務來因應差異化學習需求。

在教學層面，大多數學生對教師目前的教學安排表示滿意，但也有學生建議增加引導說明、分組討論，亦有少數回饋提及操作流暢度與系統穩定性問題。整體而言，學生回饋不僅肯定教學方式，也提供未來教學優化與平臺改善的重要參考。

二、 建議

(一)實施數位數學遊戲式教學研究

目前國內針對《速戰數決》遊戲平臺上的數位遊戲進行研究的文獻較為缺乏，建議未來可以嘗試進行數位數學遊戲融入數學課堂時，可參考本研究的實施流程，嘗試不同款遊戲的教學。並加入研究工具調查學生的學習表現，以檢視數位數學遊戲帶來的學習成效。除此之外，於教學任務的設計上，也可針對不同程度的學生，提供差異化的任務安排，增進教學帶來的效益。

(二)進行長期追蹤與蒐集更多質性資料

本研究以短期介入與問卷分析為主，建議後續研究可結合教學觀察、深度訪談等過程，進行更長期與深入的追蹤，以全面理解數位數學遊戲對學生學習歷程與改變的影響。

(三)開發數位數學遊戲類型

本研究顯示，「脫胎換骨型」的數位數學遊戲有助於提升學生的學習興趣與參與感，並能循序漸進地引導學生投入數學概念的建構過程。為進一步發揮此類型遊戲在數學教育中的潛力，未來若有相關數位遊戲開發規劃，建議可朝向數學任務融入遊戲機制的方向設計，使學生在提升學習動機的同時，亦能獲得有感的數學學習機會。

參考文獻

中文部分

教育部 (2021)。**全面推動中小學數位學習精進方案相關回應**。教育部資訊及科

技教育司。https://reurl.cc/knqZEn
英文部分
Byun, J., & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K–12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, *118*(3-4), 113-126. https://doi.org/10.1111/ssm.12271
Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., & Paris, A. H. (2004). School Engagement: Potential of the Concept, State of the Evidence. *Review of Educational Research*, *74*(1), 59-109. https://doi.org/10.3102/00346543074001059
Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L., & Hunt, M. K. (2003). The Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS): construction, validity, and reliability. *Assessment*, *10*(2), 178-182. https://doi.org/10.1177/1073191103010002008
Hussein, M. H., Ow, S. H., Elaish, M. M., & Jensen, E. O. (2021). Digital game-based learning in K-12 mathematics education: a systematic literature review. *Education and Information Technologies*, *27*(2), 2859-2891. https://doi.org/10.1007/s10639-021-10721-x
Hwa, S. P. (2018). Pedagogical Change in Mathematics Learning: Harnessing the Power of Digital Game-Based Learning. *Journal of Educational Technology & Society*, *21*(4), 259–276. http://www.jstor.org/stable/26511553
Ke, F. (2008). A case study of computer gaming for math: Engaged learning from gameplay? *Computers & Education*, *51*(4), 1609-1620. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2008.03.003
Pierce, R., Stacey, K., & Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers & Education*, *48*(2), 285-300. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.01.006
Sun, L., Ruokamo, H., Siklander, P., Li, B., & Devlin, K. (2021). Primary school students' perceptions of scaffolding in digital game-based learning in mathematics. *Learning, Culture and Social Interaction*, *28*. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2020.100457
Yang, K.-L., Hsu, H.-Y., & Cheng, Y.-H. (2022). Opportunities and challenges of mathematics learning in Taiwan: a critical review. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(3), 569-580. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01326-2
Yang, K.-L., & Chen, C.-Y. (2023). Effects of non-digital games integrated with digital games for advancing fifth graders' spatial reasoning abilities. *Education and Information Technologies*, *29*(5), 6341-6356. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12096-7
Yang, K.-L. (2025, January). *A missing piece in serious games for learning mathematics: The need for mathematics-grounding activities* [Conference presentation]. 6th International Conference on Advances in Education and Information Technology (AEIT 2025), Fukuoka, Japan.

Eighth-Grade Students' Experiences of Learning Arithmetic Sequences Through a Digital Mathematics Game

Kai-Lin Yang[1] Bo-Fan Shih[1]
[1]National Taiwan Normal University Department of Mathematics

Abstract

This study investigates eighth-grade students' affective responses to integrating a digital mathematics game, Quick-Witted Math Showdown, into arithmetic sequence lessons. Participants included six classes from three public junior high schools in Hsinchu and Taoyuan. An affective questionnaire was used to collect students' reflections on motivation and classroom engagement. Data were analyzed using descriptive statistics and inductive qualitative methods. Results show that (1) students demonstrated increased motivation and active participation, and (2) most students affirmed the teaching approach, offering constructive feedback for improvement. Future research may explore broader topics, design more challenging tasks, and include long-term and qualitative assessments.

Key words: Digital Game-Based Learning, Digital Game-Based Instruction

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(4) 數學師資與數位科技素養

研討主題
「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

數學教育相關研究結果在數學課堂實踐情況的調查研究：以差異化教學為例

蕭籽芸[1]　謝佳叡[2]
[1]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 s110617043@stu.ntue.edu.tw
[2]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系 paris@tea.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在探討臺北市公立國小數學教學中，差異化教學策略在實踐現況及其影響。研究採用問卷調查法，以北部某師資培育大學在職碩士專班教師為樣本，調查內容聚焦三大議題：教師對數學教育相關研究成果的認識程度；文獻中教學設計在實務現場的應用情形；教師在選擇教學方案時所考量的關鍵因素。問卷中的研究工具取材自國內歷年國小數學領域差異化教學文獻，共21篇中選取具有代表性的五篇（針對二至六年級）。資料分析據採用簡單敘述統計，開放式問答題則以內容分析法歸納主題。

結果顯示，約82.1%的教師未曾閱讀過相關研究文獻，僅有約5.26%的教師表示曾接觸；而在教學實施方面，59%的教師未採用文獻中所述的策略，僅有4%的教師完全依樣施行，但多數（約89.44%）教師持有積極嘗試態度，認為可根據班級實際情況做調整。進一步分析表明，教師認為阻礙實施的主要因素包括教學進度壓力、教材準備困難、班級學生差異以及個人時間與專業發展資源的不足。本研究揭示出現場教師對差異化教學文獻認識不足與策略應用不全之現狀，並指出理論與實務之間存在明顯落差。

關鍵字：理論與實務落差、研究應用、差異化教學

壹、緒論

一、研究動機與背景

歷代以來，人類的進步均建立在前人智慧的累積之上，教育領域亦然。透過對臺灣小學數學教育相關論文的閱覽，研究者發現許多公開或出版的研究所提出的教學方案均顯示出對於教學有顯著成效，但卻少有這些方案能在實務中持續被應用或再度驗證。這一現象引發了研究者的好奇：為什麼這些被宣稱好的教學常不被實際應用在實際教學現場上？在實際的教學現場，這些研究成果是否真如論文中所描述的那般有效？或者，教師在選擇教學方案時，因為種種實務限制或個人考量而未能全面採用這些方案？因此，本研究希望能從更全面的視角出發，探討教學現場是否普遍未能應用這些研究成果，以及教師在採用教學方案時傾向考慮的因素有哪些，進而提出未來設計教學方案時可納入的具體面向。

此外，研究者期望藉由提高研究成果在實務中的執行率，促使教育研究真正與現場教學產生連結，使後續研究更具體可行。在考量多方面因素後，研究者選取「差異化教學」作為研究標的。一方面，差異化教學屬於教育界長期關注的議題，並非全然新興，故可排除因接觸時間過短而未獲應用的可能性；另

一方面，差異化教學符合當前教育現場的趨勢，既是教師普遍面臨的挑戰，也是滿足學生多元學習需求的重要策略。另一方面，從1930年的分組教學、1960年代的個別化教育、1970年代的建構主義到1980年代的學生本位教育，其演進脈絡顯示出差異化教學模式具有深厚的歷史底蘊（陳卉穎，2022）。此外，根據教育部（2014）推動的十二年國民基本教育實施計畫，其三大願景之一為「成就每一個孩子」，並在五大理念中強調「因材施教、適性揚才」。

針對數學領域，教育部（2018）在十二年國教數學領域課程綱要中也特別指出，同齡學生在數學認知發展上存在個別差異，因此在教學實踐中必須適時採用差異化教學策略，以確保每位學生均能在每堂課中獲得切身的學習經驗。當前國內補習市場的興盛、家庭背景日益多元以及常態編班等現況，都使得學生之間的個體差異更為顯著，成為所有現場教師普遍面臨的重要挑戰。

二、研究目的與問題

根據上述的研究背景與動機，本研究旨在針對臺灣小學數學教育領域中普通班級的課堂實況，透過問卷調查深入了解數學相關研究成果在實務現場的應用情形，以及教師在採用教學方案時所考量的各項因素。藉由以差異化教學法為例，本研究期望能揭示當前研究成果與現場教學之間的落差，進而提出具體建議，以提高未來教學方案在實際的運用，促使教育研究真正發揮其改善教學實踐與提升學習成效的價值與必要性。

本研究的主要待答問題包括：

一、 現場教師對於數學教育相關研究成果的認識程度為何？

二、 數學教育相關研究成果在實務現場的應用情況如何？

三、 教師在選擇教學方案時傾向考量的關鍵因素有哪些？

這些問題不僅有助於揭示現場教師對研究成果的認知與接受狀況，也能從中找出阻礙研究成果落實的具體原因，進一步為未來設計與推廣適切、有效的教學方案提供理論依據與實務參考。

貳、文獻探討

一、差異化教學的界定與實施

差異化教學強調以學生為中心，根據學生的背景、學習風格、學習需求與先備知識，靈活調整課程內容、學習活動與評量方式（Tomlinson, 2001）。孫允梅（2015）在其行動研究中探討了如何將差異化教學運用於補救教學，藉由進度式與主題式兩種模式，實現對低成就學生的個別化診斷與教學調整。該研究強調，補救教學的成功關鍵在於能夠整合分層教材與個別學習資源，從而提升學生的學習成效與動機。與此類似，楊妃婷（2020）則著重於數位平台輔助下的差異化教學，其採準實驗設計驗證了數位工具在提升小學四年級學生自我效能及專注度方面的效果，並建議在數位輔助的情境中，應結合適性分組活動以達到最佳教學效果。

林佩璇（2017）則從文化歷史觀點切入，探討了教師在實施差異化教學過程中所遇到的矛盾與轉化歷程。她指出，儘管差異化教學在理論上強調個別化學習，但在實際運作時，教師仍需面對既定教材、校本文化及教育政策等多重

壓力，透過反思與協商逐步達到教學策略的創新與轉化。這樣的轉化不僅涉及教師對教學理念的認同，亦反映出整個教育現場對差異化教學的需求和挑戰。

另外，李奕璇（2022）從國中數學教師的個案研究中指出，教師在設計個別化教材與多元評量過程中，需要根據學生學習背景進行調整，從而實現差異化教學的核心目標——縮小學生間的學習落差與提升整體學習成效。這些研究共同指出，差異化教學的實施並非單一策略，無論是運用補救教學、數位平台輔助，還是透過個案研究揭示教師專業成長的歷程，都強調在實際教學中必須靈活運用多元策略，以滿足不同學習需求。

二、國內國小數學領域實施差異化教學的相關研究

在國內國小數學教學領域中，差異化教學的實施已受到多項行動研究與實證研究的關注。以孫允梅（2015）的補救教學研究為例，其針對低成就學生所採用的分層教學模式，不僅改善了學生的數學成就，也提升了學習動機，進一步驗證了差異化策略在補救教學中的應用潛力。楊妃婷（2020）則運用數位平台輔助的模式，對國小四年級數學學習進行前後測比較，結果顯示數位輔助結合差異化策略能夠顯著提高學生的自我效能及學習成就，並建議教師在設計教學活動時應考慮適性分組，這為數位時代下的教學創新提供了新視角。

徐郁荏（2022）的研究聚焦於國小高年級，利用課前診斷與分層策略，有效提升學生的學習成效及改變其學習態度。其研究發現，中等程度的學生進步尤為顯著，並提出進一步整合小組合作與多元評量的建議。此外，游蔚嫣（2013）在二年級加減法教學中，將STAD合作學習法與差異化策略相結合，結果證實此融合策略能夠促進學生間的合作與互助，並顯著改善學生的學習成效，且在教學過程中，教師能夠透過持續反思來解決搭便車等實施問題。

鄺柔羽（2023）針對五年級數學課程，探討彈性分組在差異化教學中的應用，研究結果顯示，透過依據學生能力進行彈性分組，不僅能夠提升學生學習動機，還可明顯改善學業成績，並縮小不同學習程度間的差距。進一步來看，陳卉穎（2022）的行動研究在小六數學教學中亦證實，透過多元化教學策略，如分組討論、遊戲競賽及個別化學習單等方式，能夠使學生在數學成績與統計圖運用能力上獲得顯著提升，且其正向學習態度亦隨之改善。這些研究可看出國小數學領域實施差異化教學在各年級、不同學習主題中均展現正向成效。不論是從補救、合作學習、數位輔助還是彈性分組的角度出發，各研究皆認為，針對學生個別差異設計的教學策略不僅有助於提升學習成效，更能改變學生對數學學習的態度與動機。

三、實務現場執行差異化教學的挑戰

雖然差異化教學在理論與實證研究中展現出顯著成效，但在實務現場執行時，教師常面臨多重挑戰。首先，教師在課程設計上必須考量班級中學生的多元背景、先備知識與學習風格，這對於教材準備、教學活動安排及評量設計均構成極大壓力。林佩璇（2017）的研究指出，教師在實施過程中常受到既定教材與校本文化的限制，必須透過不斷的反思與協商來突破這些固有模式，才能逐步推動教學轉型。其次，實際教學中如何掌握時間與課堂管理也是一大挑戰。陳卉穎（2022）與游蔚嫣（2013）的行動研究皆反映出，在有限的課堂時間內，要同時兼顧全班學生的個別需求與整體進度，教師常面臨時間分配不均及部分

學生無法充分參與的問題。研究建議教師可以運用數位平台與適性分組策略，以縮短個別化輔導的時間成本。

科技輔助教學在實務上亦存在使用困難與技術適應問題。楊妃婷（2020）與林正勳（2023）的研究均顯示，雖然數位平台與智慧教室可以顯著提升學生學習成效與動機，但教師必須花費額外時間學習及熟悉這些科技工具，並在教學過程中不斷調整與優化教學設計。許淑婷（2024）的平板電腦研究亦指出，教師在運用科技輔助教學時，需明確規範平板使用行為，否則可能引發紀律問題，影響教學秩序。

混齡與分層教學也是實務執行中常見的挑戰。徐慧中與徐偉民（2019）的研究針對混齡數學補救教學進行探討，發現不同年齡層學生之間存在明顯學習差異，教師在進行分組及課程設計時，難以同時滿足所有學生的需求。研究中提到，差異化教學需經歷嘗試、調整至穩定三個階段，教師必須根據學生表現及反饋不斷修改教學策略，這要求教師具有高度的適應力與反思能力。

教師專業成長與同行合作亦是克服實務挑戰的關鍵。李奕璇（2022）與陳為彤（2019）的個案研究均指出，透過教學反思、同儕討論及專業社群的支持，教師能夠在實踐過程中逐步提升自身的教學策略與評量方法。這種持續的專業發展不僅有助於解決實務挑戰，也能推動整體教學品質的提升。以上從業成長等多重挑戰。各研究從不同角度揭示了這些問題，並提出透過數位輔助、適性分組、持續反思與同行合作等策略作為解決途徑。這些挑戰與策略不僅為現場教師提供了寶貴參考，也呼籲教育主管機關與學校在資源分配與專業發展上提供更多支持，進一步促進差異化教學在現場的落實。

參、研究方法

一、研究對象與樣本

為了降低各縣市之課程進度、地區文化特質差異等非欲討論之變因，正式研究擬聚焦於臺北市的公立學校，調查臺北市公立國小教授數學課的現職導師之看法，期望調查一到六各年級教師，盡可能人數比例平均。本前導研究以北部教師進行問卷測試，共蒐集18份，包含11位國小在職教師、1位國中數學老師、2位高中數學教師，1位補救教學專聘教師、3位修習教育學程的數學專長碩班生，其中15位為對數學領域之班級教學有經驗者。

二、研究設計與工具

本研究使用調查研究法，透過問卷調查國小現職教師對於數學教學相關論文研究的閱讀經驗、在實施數學課時的應用情況與考量的因素，題目包含封閉與開放式問題，以差異化教學為例聚焦主題。以紙本問卷及網路問卷進行填答測試，以增加觸及率並利於問卷蒐集。

三、研究工具

問卷中的論文取材自國內歷年國小數學領域差異化教學文獻，共21篇，從中選具有代表性的五篇作為研究工具。這五篇的挑選除了原調查對象包含低、中、高年級，也選取研究對象為整個班級、較符合一般導師的日常經歷，且學術引用次數較多、曝光度可能較高者。其中二到六年級每個年級各選一篇，一年級目前沒有相關研究。問卷題目設計先對該研究提供簡短介紹，簡介中包含

論文題目、研究教學對象、教學過程（包含數學內容、上課時間與方式、教學流程與方法、教學材料、分組方式、學習單等）、研究結果，讓閱讀者很容易捕捉到研究的描述，之後請受試教師回答之前是否看過（或聽過）這個研究？是否執行過類似的差異化教學？ 是否會嘗試這樣的差異化教學？如果會，會有多類似？以第一篇論文為範例，詳見表1，其餘各篇論文之題目相同。研究工具除了依結構選取與符合表面校度，同時請專家審查已具被專家效度。

表1

研究問卷之題目範例

以下共有幾篇國內差異化數學教學研究論文的簡短介紹，請您瀏覽後逐一回答問題。

論文一：STAD 合作學習法融合差異化教學於國小二年級加減法（2021）
教學對象：二年級

教學過程：學習 1000 以內數字與三位數加減，每週 6 節課，共四週。教學流程採差異化策略，全班授課時提供不同輔助材料（低成就者用積木操作，其他用小白板計算）。小組學習採異質分組，學習單分為低中高程度版本，需組內互助完成個人與小組任務。利用因材網指派個別練習，單元後測亦依程度區分。每組上台分享，並透過加分機制表揚表現佳者。課後十分鐘強化低成就學生的學習，以積木與白板筆操作確保理解。

研究結果：STAD 合作學習法融合差異化教學對於不同程度的學生，在不同的單元學習中，能**提升學習意願和學習成效**。

1. **您之前看過這個研究嗎？** ☐看過 ☐沒看過 ☐不確定
2. **您之前在數學課或其他課堂也實施過這樣的差異化教學嗎？**
   ☐有，而且完全一樣 ☐有類似，但不完全一樣 ☐沒有
3. **您是否會想在班上實施這樣的差異化教學呢？**
   ☐會，而且完全一樣 ☐可以試試，但不會完全一樣
   ☐不會這樣實施，因為

四、資料收集與分析

本研究採用方便取樣，由北部某師資培育大學在職碩士專班學生填寫問卷，所有樣本皆至少花20分鐘閱讀並填答，以確保受試者有充分時間理解問卷內容。問卷內容包含兩部分：勾選題和開放式問答題。勾選題以簡單敘述統計方式分析，主要調查受試教師是否曾看過、聽過或實施過差異化教學相關研究；而問答題則採用內容分析與歸納法，將受試者對文獻認識、實施經驗與未來應用意向的回答歸納成主題，進一步探討其使用或不使用此教學策略的原因。

資料分析部分，勾選題數據以百分比、平均數等描述性統計呈現；問答題則透過開放式編碼、主題歸納，探討教師是否知曉該研究、是否實施過類似策略及其原因。透過這種方式，研究團隊能系統性地整理受試教師對差異化教學文獻認識與實踐經驗的回應，為後續研究提供有效的實證資料與理論參考。

肆、發現與討論

依照本研究之待答問題將調查結果分述如下。

一、現場教師對於數學教育相關研究結果的認識程度為何？

現場教師對於數學教育相關研究結果的認識程度調查結果詳見表2。根據表2數據，受調教師對所選取的五篇研究論文認識度普遍偏低，平均有82.1%的教師表示未曾閱讀或聽聞過這些研究，僅有約5.26%的受試者表示曾看過，而約12.64%的教師對此持不確定態度。這顯示在現場教師中，數學教育差異化教學的相關文獻並未廣為人知，可能因為資訊傳播、專業發展或個人時間限制等因素所致。

此結果反映出目前國內差異化教學研究的曝光度及應用普及率仍有待提升，可能影響教師在實際教學中對新策略的接受與運用。研究者應考慮加強學術成果與實務間的連結，並透過專業研習或校內分享等方式提高教師對這些研究的認識與了解，進一步促進差異化教學理念的普及與實踐。

表 2

樣本教師對樣本論文認識程度之百分比

認識程度		論文一	論文二	論文三	論文四	論文五	平均
是否看過這個研究	看過	5.3%	5.2%	5.3%	10.5%	0%	5.26%
	沒看過	84.2%	73.7%	78.9%	84.2%	89.5%	82.1%
	不確定	10.5%	21.1%	15.8%	5.3%	10.5%	12.64%
合計		100%	100%	100%	100%	100%	100%

二、數學教育相關研究結果在現場被實施的情況如何？

表3為樣本教師對樣本論文中的教學方式之實施情況。從表3數據看來，多數現場教師並未在課堂上完全採用研究中的教學設計，平均有59%的教師表示未曾實施相關做法，而僅有約4%的教師完全依研究設計實施；另外，有37%的教師則認為採用類似但不完全相同的方式。這表明儘管部分教師在實踐中嘗試調整教學策略，但大部分教師並未完全複製文獻中的差異化教學模式。

這樣的實施情況可能反映出現場教師在將理論轉化為實際操作時面臨種種挑戰，例如教學資源、時間與學生差異等因素。因此，未來推動差異化教學時，需考量如何使策略更符合實際班級情境，並針對教師需求提供具體操作指引與資源支持，以促進文獻中成功經驗在現場的落實與調整。

表 3

樣本教師對樣本論文中的教學方式之實施情況（百分比）

實施情況	論文一	論文二	論文三	論文四	論文五	平均
有，而且完全一樣	0%	0%	10.50%	10.50%	0%	4%
類似，但不完全一樣	52.60%	52.60%	26.30%	31.60%	21.10%	37%
沒有	47.40%	47.40%	63.20%	57.90%	78.90%	59%
合計	100%	100%	100%	100%	100%	100%

三、教師在選擇教學方案時傾向考量的因素是哪些？

樣本教師對樣本論文中的實施意願各篇調查結果詳見表4。根據表4結果，多數教師對於在班上實施這些研究的教學設計抱持積極嘗試態度，約89.44%的

受試者表示可以試行，但多半不會完全複製原研究方案，僅有約5.28%的教師表示會完全依樣施行，同時5.28%的教師則表示不會採用。這反映出教師普遍認為研究中的教學策略具有參考價值，但實際應用時仍需根據本班情境進行調整。

進一步根據表5的開放式提問結果，教師未將研究落實於教學的主要原因包括：缺乏閱讀相關文獻、教學進度壓力、教材準備困難、班級學生差異大以及教學習慣固化等。這些因素共同限制了差異化教學策略在現場的全面應用，顯示未來推動相關策略時，不僅需要提供足夠的教學資源和時間支持，也必須加強教師對文獻的瞭解與專業發展，從而克服現有困難，促進教學創新。

表 4

樣本教師對樣本論文中的實施意願

是否想在班上實施	論文一	論文二	論文三	論文四	論文五	平均
會，且完全一樣	5.30%	0%	0%	21.10%	0%	5.28%
可以試但不會完全一樣	89.40%	94.70%	94.70%	78.90%	89.50%	89.44%
不會這樣實施	5.30%	5.30%	5.30%	0%	10.50%	5.28%
合計	100%	100%	100%	100%	100%	100%

表 5

樣本教師對研究未落實於教學原因一覽表

未將研究落實教學原因類型	類型描述舉隅
沒有閱讀相關研究或論文	➢ 因為不知道有這些研究 ➢ 老師比較少時間閱讀論文 ➢ 多數都在處理庶務性質…未能自行吸收新知 ➢ 未能閱讀足夠多的相關文章，沒有底氣
教學進度壓力	➢ 教學準備工作動作繁複，時間不足 ➢ 會有進度、時間的壓力 ➢ 教師在實際現場額外要處理的瑣事太多，心力甚少可以放在純教學上 ➢ 時間不夠(課時常被借走) ➢ 現場時間壓力影響 ➢ 實際使用可能遇到時間不足、必須趕課的問題。 ➢ 國小數學課程時間較少，進度緊湊。
教材不易準備	➢ 準備差異化教學的教材、課程設計需要大量的時間 ➢ 教師也得花大量時間準備上課教材，非常不容易！
對象差異無法適用	➢ 每一個班級的學生組成與班級**文化不盡**相同 ➢ 因為時代環境的不同、學生特質的多樣性，所以每個研究都**無法直接運用在實際**課堂上 ➢ 很難有教學策略可以讓所有老師適用 ➢ 學生的差異性並不一定適合那些教學論文的結果 ➢ 實驗對象不完全適用於其他學生 ➢ 適用於作者的樣本，但套入不同的環境狀況可能就不適用，因此不會被所有老師採用 ➢ 每個班級的學生組成和程度都不同

教學習慣固化	➢	大部分老師都有原先的教法
	➢	嘗試[新教學]可能會失去一些上課時間
	➢	教學現場中已有太多活動介入，教師業務量繁重，很難再有心力去嘗試
家長阻礙	➢	家長認為學生應該學到相等的知識

從表5的結果可以看出，教師未將研究落實於教學中，除了表面上反映出資源與時間不足的問題之外，更隱含著教師對自身專業發展及學術資訊接收的瓶頸。首先，「沒有閱讀相關研究或論文」的部分揭示出一個現實問題，即教師在忙碌的日常教學工作中缺乏足夠的時間與精力去主動獲取新知，導致對最新的教育研究與創新策略缺乏認識。此外，這也反映出部分教師可能較為保守，習慣依賴既有的教學模式，而對於學術研究與實務應用之間的連結並未形成有效的橋樑。

另一方面，「教學進度壓力」、「教材不易準備」以及「教學習慣固化」等因素，顯示出教育現場存在著結構性問題。教學進度與時間壓力使得教師難以在課堂中實施較為複雜且需要充分準備的差異化教學策略；而教材準備困難則暗示出現行教材及教學資源未能充分滿足個別化需求，進一步限制了創新教學的發展。至於「對象差異無法適用」與「家長阻礙」的因素，則反映出班級內部學生多元差異及外部家長期待對教師施行新教學策略構成挑戰。這些隱含觀點均指出，為促進差異化教學的落實，不僅需要解決教師個人閱讀與專業發展的不足，更必須從系統性角度改善資源分配、教材設計、班級管理及家校溝通等環節，才能真正推動教學創新。

伍、研究結論與建議

對於研究設計，現場教師的時間真的非常有限，但想要了解教學現場落實的意願最適合調查的還是現場教師。本研究結果顯示，現場教師對於差異化教學相關文獻的認識普遍偏低，約82.1%的教師表示未曾閱讀或聽聞過相關研究，僅有極少數教師（約5.26%）表示曾接觸過。這一結果反映出現有學術資訊與實務應用間存在明顯鴻溝，可能與教師日常工作繁忙、缺乏專業發展機會及資訊傳播不足等因素有關。教師對新教學策略的接受與實施受到其資訊來源與專業背景的制約，從而限制了差異化教學理念在現場的廣泛應用。

此外，儘管多數教師對於文獻中所描述的教學策略持有嘗試態度（約89.44%的受試者表示可以試行，但多半不會完全複製），但實際上只有少部分教師曾在課堂上實施相關做法（約4%完全依樣施行，59%未曾實施）。這反映出在將理論轉化為實際教學過程中，教師普遍面臨資源、時間、教材準備以及班級學生差異等多重挑戰，進而影響其教學策略的完整落實與應用。

針對本研究結果，建議未來推動差異化教學時，首先應加強學術成果與實務間的連結。可透過校內研習、專業發展課程或同儕交流等方式，促使教師能夠了解並掌握最新的差異化教學研究成果，進一步提升其個人專業成長與實踐能力。此外，應鼓勵學校與教育主管機關提供更多資源支持，減輕教師在教材準備與課程設計上的負擔，從而促進新教學策略在實際班級中的有效轉化與應用。

另一方面，建議未來在推動差異化教學策略時，應針對現場實務中的多元挑戰設計具體操作指引。教師可考慮採用數位平台輔助、適性分組與多元評量等方法，根據班級實際情況調整教學流程與活動，從而應對教學進度壓力及班級學生差異的問題。同時，加強家校溝通與支持，消除家長對新教學策略的疑慮，並鼓勵教師透過持續反思與專業合作，不斷優化教學設計，最終實現教學創新與整體學習成效的提升。

參考文獻

Tomlinson, C. A. (2001). How to differentiate instruction in mixed-ability classrooms (2nd ed.). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

李奕璇 (2022)。**國中數學教師的差異化教學實踐之個案研究。**國立臺北教育大學課程與教學傳播科技研究所碩士論文。

林正勳 (2023)。**智慧教室輔助差異化教學對國小五年級學生體積與容積學習成效與動機之影響。**國立中正大學教學專業發展數位學習碩士論文。

林佩璇 (2017) 。矛盾趨動擴展學習：差異化教學的實踐轉化。 **課程與教學季刊，20**(4)，117–150。

林采葳 (2020)。**教師運用差異化教學提升國小三年級學童數學學習成效之行動研究** 。國立臺中教育大學教育系碩士論文。

孫允梅 (2015)。**差異化教學應用於補救教學之行動研究。國立臺北教育大學課程與教學傳播科技研究所碩士論文**。

徐郁荏(2022)。**差異化教學對國小高年級學童數學學習成就及學習態度影響之研究。**國立台中教育大學教師專業碩士學位學程碩士論文。

徐慧中、徐偉民(2019)。以差異化教學實施國小混齡數學補救教學之行動研究. **臺灣數學教師, 40**(2), 1–28。

張蔚嫣 (2013)。**STAD 合作學習法融合差異化教學於國小二年級加減法之行動研究**。, 國立臺東大學課程與教學碩士在職專班碩士論文。

教育部（2014）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。台北市：作者。

教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域**。台北市：作者。

許淑婷 (2024)。**平板電腦應用於國小六年級英語差異化教學與學習動機之行動研究**。淡江大學教育與未來設計系碩士論文。

陳卉穎(2022)。**運用差異化教學於小六學生數學學習之行動研究**。國立暨南國際大學碩士論文。

陳為彤 (2019)。**國小四年級數學課程之差異化教學研究—以屏東縣某國小為例** 。國立屏東大學教育系碩士論文。

游翊蓮 (2022)。**國小五年級數學教學融入差異化教學策略之行動研究**。國立中正大學教育學研究所碩士論文。

黃于眞、陳美如 (2018)。差異化教學對國中學生數學學習成效影響之研究。**師資培育與教師專業發展期刊, 11**(1), 91–122.

楊妃婷 (2020) 。**數位平台輔助與差異化教學策略對國小數學學習成效之影響**。國立臺北教育大學數學暨資訊教育系碩士論文。

廖典萱(2024)。**因材網輔助自主學習課堂模式對國小四年級學童學習數學之行動研究**。靜宜大學教育研究所碩士論文。

蔡辰北、陳靜紋，(2013)。淺談差異化教學。**臺灣教育評論月刊， 2**（11），78-

80。
蔡怡萱，（2018）。**高中教師於融合班數學課堂實施差異化教學之行動研究**。國立臺灣師範大學特殊教育系碩士論文。
簡玉敏、高桂懷，（2015）。教室裡的春天差異化教學之學與思。**師友月刊，575**，16-21。
鄺柔羽(2023)。國小五年級數學課程實施之行動研究—以差異化教學彈性分組為例。國立臺灣師範大學教育系碩士論文。
羅元廷 (2022)。教學現場的差異化教學。臺**灣教育評論月刊, 11**(5), 1511-54。

A Survey on the Implementation of Mathematical Education Research Findings in the Mathematics Classroom: Taking Differentiated Instruction as an Example

Tsu-yun Hsiao, Chia-Jui Hsieh
Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

Abstract

This study aims to explore the current implementation and impact of differentiated instruction strategies in mathematics teaching at public elementary schools in Taipei. A questionnaire survey was conducted among in-service teachers enrolled in a master's program at a teacher education institution in northern Taiwan. The survey focused on three key aspects: teachers' familiarity with research findings in mathematics education, the application of instructional designs presented in the literature in real classroom settings, and the critical factors teachers consider when selecting instructional strategies. The research tools used in the questionnaire were drawn from domestic studies on differentiated instruction in elementary mathematics over the years; among 21 studies, five representative ones (targeting grades 2 to 6) were selected. Data analysis was conducted using simple descriptive statistics, while open-ended responses were analyzed using content analysis to identify recurring themes.

The results indicated that approximately 82.1% of the teachers had never read the relevant research literature, with only about 5.26% reporting that they had encountered these studies. In terms of implementation, 59% of teachers had not adopted the teaching strategies described in the literature, and only about 4% of teachers implemented them exactly as described; however, a majority (approximately 89.44%) expressed a positive willingness to try these strategies, suggesting that they would adapt the approaches to suit their specific classroom contexts. Further analysis revealed that the main barriers to implementation included time constraints due to instructional pace, difficulties in preparing appropriate teaching materials, the varied composition of students within a class, and a lack of personal time and professional development resources.

Key words: Gap between theory and practice, research application, differentiated instruction

臺灣高中數學教師對導數概念的認識論觀點

楊凱琳[1]　郭品辰[2]
[1]國立臺灣師範大學數學系 kailin@ntnu.edu.tw
[2]國立臺灣師範大學數學系 pcguo@ntnu.edu.tw

摘要

教師的認識論觀點（epistemological views）被視為是影響其課堂教學實踐的重要因素。而在高中微積分課程中，導數概念不僅是分析真實問題的重要數學工具，亦作為學習進階數學概念的知識基礎。有鑑於臺灣中學數學教師在國際 TEDS-M 研究中於數學內容知識（mathematical content knowledge）與數學教學內容知識（mathematical pedagogical content knowledge）方面均有優異表現，本研究採用現象學方法（phenomenographic approach），探討具豐富教學經驗之臺灣數學教師對導數概念的認識論觀點，並進一步提供對微積分學習與教學的啟示。

透過半結構式訪談，我們訪談六位在微積分學習與教學方面具高度自我效能感的資深中學教師，並運用主題分析法（thematic analysis）歸納出六大核心主題。在導數概念的本質與重要性方面，教師的觀點包括：(a) 過程觀與物件觀的導數理解方式，(b) 變化率與極限作為導數概念的關鍵基礎，以及 (c) 具有雙重視角及多維視角的導數概念認知。在導數概念的學習方面，教師的回應則呈現出不同觀點，包括：(d) 先備知識與學習技能的需求，(e) 對數學嚴謹性的要求，以及 (f) 透過多種例證建構不同概念間的連結。

本研究有助於深化對具高自我效能之有經驗教師如何理解導數概念本質與重要性的認識，並闡明其不同的理解方式。在理論層面，本研究所歸納的主題可進一步闡釋導數概念的內涵及其教學應用，並透過多樣例證促進概念間的連結。在實務層面，本研究結果可作為師資培育的參考，以回應與教師認識論觀點發展相關的教學議題。

關鍵字：臺灣高中數學教師、認識論觀點、微積分、導數概念

Taiwanese Secondary Mathematics Teachers' Epistemological Views on the Derivative Concept

Kai-Lin Yang Pin-Chen Guo
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

Teachers' epistemological views are identified as important determinants of their classroom practices. In secondary school calculus, the derivative concept serves as a fundamental tool for analyzing real-world problems and advancing mathematical understanding. In view that Taiwanese secondary mathematics teachers performed well on both mathematical content knowledge and mathematical pedagogical content knowledge in the international TEDS-M study, this study adopted the phenomenographic approach to explore Taiwanese experienced mathematics teachers' epistemological views on the derivative concept and provide implications for improving calculus learning and teaching. Through semi-structured interviews with six secondary teachers with high self-efficacy in learning and teaching calculus, we employed thematic analysis and formed six themes.

For the essence and importance of the derivative concept, teachers' responses highlighted (a) both process and product views on the derivative concept, (b) both rate of change and limit as the foundation of the derivative concept, and (c) dual and multidimensional perspectives on understanding the derivative concept. For the learning of the derivative concept, teachers' responses revealed various perspectives on (d) prerequisite knowledge and learning skills, (e) the need for mathematical rigor, and (f) multiple examples used for different connections. This study contributes to deepening our understanding of how experienced teachers with high self-efficacy perceive the essence and importance of the derivative concept and the ways of understanding it. Theoretically, the themes help clarify the derivative concept and its pedagogical applications through the use of examples for different connections. Practically, the findings can inform teacher education by addressing pedagogical issues related to developing teachers' epistemological views.

Keywords: Taiwanese Secondary Mathematics Teachers, Epistemological Views, Calculus, Derivative Concept

1. Introduction

In the curriculum enactment process in mathematics education (Remillard & Heck, 2014), teachers shape their instructional decisions based on national policies and official curricula, including national curriculum guidelines, consequential assessments, and approved textbooks. These elements, combined with teachers' personal learning and teaching experiences, contribute to their intended curriculum, which further influences the actual instructional processes and methods employed in the classroom. Given that Taiwanese secondary school teachers have demonstrated strong performance in both mathematical content knowledge and mathematical pedagogical content knowledge in the international TEDS-M study (Hsieh et al., 2010), it is valuable to investigate their views and knowledge regarding mathematical concepts, especially among experienced teachers.

Among various teacher-related factors, epistemological views have been identified as critical determinants of classroom practices (Borko & Putnam, 1996). Changes in mathematics teaching often require deeper transformations in teachers' epistemological views. Specifically, epistemology explores questions such as the "definitions of knowledge, how knowledge is constructed, and how knowledge is evaluated" (Hofer & Pintrich, 1997, p.88), which directly relate to issues in mathematical content knowledge and mathematical pedagogical content knowledge as well as instructional orientations. Therefore, exploring experienced teachers' epistemological views can offer insights into different perspectives on the nature of mathematical concepts and valuable experiences related to learning and instruction.

Meanwhile, in an era emphasizing STEM education and technological advancements, calculus remains a cornerstone of modern mathematics with applications across various disciplines. As many countries have made calculus compulsory for secondary-level students (Bressoud et al., 2016), its role in high school mathematics has become a critical issue in mathematics education (Thompson & Harel, 2021). In secondary school calculus, the derivative concept serves as a fundamental model for analyzing real-world problems, interpreting the properties of functions in context, and forming the basis for understanding integration and the fundamental theorem of calculus. However, several researchers have highlighted students' difficulties in learning derivatives (Bressoud et al., 2016), with even gifted students exhibiting unexpected weaknesses in their conceptual understanding of derivatives (Zandieh, 2000). Given that students' performance is shaped by their classroom experiences, which are, in turn, influenced by teachers' intended curriculum, investigating teachers' epistemological views may also reveal the sources of students' difficulties and suggest ways to address them.

While previous studies (e.g., Eichler & Erens, 2014) have categorized teachers' orientations (or beliefs) into several types, they pointed out that their findings face limitations in generalizability due to a predominant focus on Western contexts, leaving a gap in understanding teachers' perspectives in Eastern settings. To address this gap, this study focuses on Taiwanese experienced secondary mathematics teachers and examines how their epistemological views influence their understanding and teaching of the derivative concept. By employing a qualitative approach through interviews and thematic analysis, this study aims to provide a nuanced perspective on how experienced teachers conceptualize derivatives and the implications for calculus instruction.

2. Theoretical Perspectives

As the purpose of this study is to explore teachers' epistemological views of the derivative concept, understanding the discussions in the related literature will aid in our analysis and interpretation of the interview data. In this section, we review the derivative concept from three perspectives: basic mental models, concept formation, and teaching orientation, which will serve as a reference for the subsequent analysis.

2.1 Basic Mental Models of the Derivative Concept

Regarding the essence of the derivative concept, Greefrath et al. (2016) proposed four fundamental *basic mental models* (BMMs), which describe the content-related meaning learners should or actually do attribute to a mathematical concept from a subject-didactic perspective: (1) the local rate of change: the derivative provides the instantaneous rate at which a quantity is changing with respect to another; (2) the tangent slope: the derivative represents the slope of the tangent line to the graph of a function at a specific point, indicating the local direction of the curve; (3) the local linearity: at a sufficiently small scale around a point, the graph of a differentiable function can be approximated by a straight line, and the derivative gives the slope of this line; and (4) the amplification factor: the derivative indicates how a small change in the independent variable affects the dependent variable, acting as a proportionality factor. Teachers' epistemological views on these BMMs, including their understanding and evaluation of the importance and interconnectedness of these interpretations, can significantly shape their instructional approaches and the opportunities they provide for students to develop a robust understanding of the derivative.

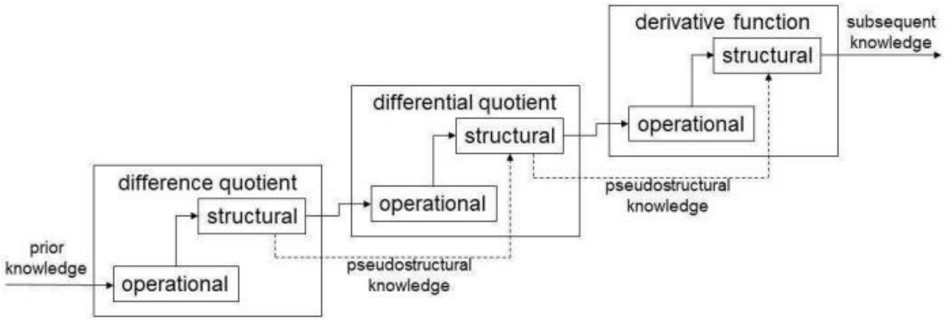
2.2 Model of Concept Formation of the Derivative Concept

Regarding the learning of mathematical concepts, Sfard's (1991) model of concept formation includes the following steps: processes on the prior mathematical objects (prior knowledge), interiorization, condensation, and reification, which ultimately lead to the formation of an object. Then, a new process could be applied to this object, which is the first step in the formation of the new concept. Indeed, the differentiation between process and object is well accepted in mathematics education. Regarding research on teachers' perspectives, a traditional dichotomy suggested that Western educational systems often emphasized the process of mathematical learning, while Eastern systems, including Taiwan, were perceived as prioritizing the object or product, such as correct answers (Leung, 2001). However, recent research suggests that Taiwan's perspective has been influenced by the Western emphasis on the process view, indicating that Taiwanese pre-service teachers place equal emphasis on both the dynamic (process) and static (product) nature of mathematics (Dreher et al., 2021).

Building on Sfard's work, Zandieh (2000) used this hierarchical structure to illustrate the concept of derivatives. A typical learning path for understanding the derivative begins with the ratio process, which involves taking two differences as objects which are further acted by division. Then, the reified object, the ratio, is used in the next process, where we engage in the limiting process to obtain the differential quotient. Subsequently, the reified object, the limit, is employed again and again to define each value of the derivative function, forming the reified function object. Finally, the derivative function is a reified object, which can be manipulated in the instruction of the higher order derivatives or more applications. Thus, the acquisition of the derivative concept can be represented as a model in Figure 1 (Litteck et al., 2023), including three sub-concepts, difference quotient, differential quotient, and derivative functions with each having operational (process) and structural (object) aspects.

Figure 1

Model for the Acquisition of the Derivative Concept (From Litteck et al., 2023).



From the literature (Dreher et al., 2021), Taiwanese teachers' epistemological views likely encompass both process and product perspectives on the derivative. While some teachers may emphasize the derivative as the outcome of a limit process, others might focus on the application of the reified object. Understanding these different perspectives held by teachers is crucial for examining their pedagogical choices.

2.3 Teaching Orientation of the Derivative Concept

Eichler and Erens (2014) highlighted that teaching orientation toward calculus, including the derivative concept, is significantly influenced by teachers' belief systems. These belief systems can be understood as a structured organization of central and peripheral teaching goals. Eichler and Erens identified four main trends in calculus curricula that shape these teaching goals: (1) the generic trend, which emphasizes a bottom-up development of concepts through examples; (2) the technology trend, which focuses on using technology as a tool for conceptual learning; (3) the modeling trend, which employs realistic applications as a starting point for developing abstract concepts; and (4) the moderate New Math trend, which prioritizes exactness and formal rigor.

Teachers' individual teaching orientations can be understood as the ways they select and prioritize instructional goals, aligning with one or more curriculum trends. Their epistemological views not only shape their teaching orientations but also influence how they approach the instruction of the derivative concept. Understanding these epistemological views and their alignment with broader curriculum trends provides valuable insights into how teachers conceptualize and teach derivatives.

2.4 Research Questions

Based on Hofer and Pintrich's (1997) description of the epistemological views, the research questions are: (1) How are Taiwanese experienced teachers' views about the essence of the derivative concept? (2) How are Taiwanese experienced teachers' views about the learning of the derivative concept?

3. Method

This study was part of a project on analyzing textbooks, assessing students' understanding, and exploring experienced teachers' views and their relationships regarding the derivative concept. This study adopted the phenomenographic approach to investigate how experienced teachers think about the derivative concept and how the understanding of the derivative concept is developed as this approach can effectively capture the variation in teachers' conceptualizations and how they evaluate different interpretations and learning (See Marton, 1981). Data were collected using semi-structured interviews with six teachers who perceived themselves with high self-efficacy in learning and teaching the derivative concept. Three main interview questions included: (1) When teaching the textbook unit on derivatives, what is essential to teach/learn? What main ideas are important? (This question prompts the teacher to reflect on the importance of the unit, exploring the underlying reasons why it is important.) (2) How would you teach and guide students in learning the unit? Why do you choose this approach? (This question delves into teaching strategies.) (3) What challenges will students encounter in learning the unit? What might be the reasons for these challenges? (This question explores learning challenges and their causes.)

Thematic analysis was employed to systematically identify, organize, and interpret patterns of meaning (themes) within the dataset. The analysis followed an iterative process, involving multiple stages to ensure the accuracy and validity of the findings. First, a guiding framework was established to focus the analysis and maintain consistency throughout the process. After all interview transcripts and written responses were thoroughly reviewed to ensure familiarity with the data, collaborative discussions were held to determine the coding strategy. These discussions aimed to clarify and align interpretations, foster a shared understanding of the data and ensure consistency in coding practices. During this phase, initial notes and ideas were documented to capture early impressions and significant observations. Next, the data were systematically coded, with each text segment assigned descriptive labels to capture the essence of participants' perspectives. These codes, along with the corresponding data, were then carefully reviewed, compared, and grouped into potential sub-themes based on their similarities and differences. This rigorous process ensured that the emerging patterns accurately reflected variations in participants' perceptions and interpretations while maintaining coherence in theme development. Finally, the sub-themes were synthesized into broader themes that encapsulated the core patterns and meanings within the data.

4. Main Findings

4.1 Teachers' Epistemological View on the Essence of the Derivative Concept

As for epistemological views on the essence and importance of the derivative concept, three key themes were highlighted as both process and product views on the derivative concept, both rate of change and limit as the foundation of the derivative concept, and dual and multidimensional perspectives on understanding the derivative concept. Regarding the process and product views, we identify two types of teachers, one using terms such as "taking the limit of", and the other using "the limit value of" to describe the definition of the derivative. For instance, one teacher said "I think it's about drawing the graph, using a secant line, then taking the limit and approaching the tangent. I feel this is more intuitive, and I also think this is the very first definition of the derivative." (T-010), another teacher emphasized "The meaning of the derivative is the limit value of the rate of change." (H-001).

Regarding the foundation of the derivative concept, several teachers mentioned "The difference quotient and the limit are essential foundations for learning the derivative." (J-163), "The limit of the rate of change is what truly the derivative is." (S-007), etc. Regarding the perspectives on understanding the derivative concept, we found several interesting views, such as "Calculus is basically addition, subtraction, multiplication, and division, plus a fifth operation called lim" (J-076), "The formula for differentiation is just like that… even though you don't fully understand differentiation, the formula is so simple. It's like how mathematics is a discovery as if it has always existed in such beauty. I think letting someone feel this is pretty great" (Y-013).

4.2 Teachers' Epistemological View on the Learning of the Derivative Concept

As for epistemological views on the learning of the derivative concept, three key themes were highlighted prerequisite knowledge and learning skills, the need for mathematical rigor, and multiple examples used for different connections. Regarding prerequisite knowledge and learning skills, most participants mentioned velocity in physics as an important introductory approach, as one teacher even said, "The teacher who enlightens students about calculus should be the physics teacher" (J-020). Regarding the need for mathematical rigor, however, the same teacher later remarked, "I feel like the kids seem to learn one kind of symbol system in physics, but this system isn't that rigorous, so when they encounter more complex problems, they get confused" (J-080). In contrast, another teacher stated, "I think rigor itself is really important in mathematics, but s/he [student] doesn't necessarily need to be so rigorous from the start... maintaining enthusiasm might be even more important" (Y-149).

Regarding multiple examples used for different connections (Rodríguez-Nieto et al, 2022), most participants used illustrative examples for instruction-oriented connections or different representational connections, or counter-examples were used for feature connections or for part-whole connections. For instance, Teacher M emphasized the use of x-t and v-t diagrams in physics to build upon students' familiarity with physical concepts. Teacher J purposefully presented a counterexample by solving a problem incorrectly due to overlooking given information to encourage students to analyze common misconceptions and recognize the importance of careful problem interpretation. Also, all six teachers highlighted the use of dynamic geometry software to facilitate connections between different representations and mathematical concepts.

5. Discussion and Conclusion

Teachers' views on the essence of the derivative concept implied that (1) the derivative concept emerges from the real world and then involves the mathematical world, and (2) the derivative concept was perceived as definitional and dynamic knowledge as well as a combination of functional and transformational thinking. The two views align with the notion that abstract mathematical concepts are grounded in practical contexts and enhance students' understanding (Vinner, 1991) as well as the conception that advanced thinking involves moving from process-based reasoning to object-based conceptualization by ways of thinking for abstraction from structured practices (Selden & Selden, 2005). To embrace both views, teachers may be more likely to integrate practical applications with theoretical knowledge in teaching, fostering a deeper and more connected understanding of mathematical concepts.

Teachers' views on the learning of the derivative concept implied that (1) "knowing why and about", besides "knowing what and how", was also emphasized; (2) "knowing to" was considered as a bridge from "knowing what and how" to "knowing why and about", and (3) the same example was used for different connections. These views suggest a progression in which conceptual and procedural knowledge develop iteratively, emphasizing the understanding of why they work through connections within and between multiple representations. This interconnected approach to teaching derivatives echoes the call for quality in both procedural and conceptual knowledge as highlighted by Star and Stylianides (2013). This study contributes to deepening our understanding of to what extent experienced teachers with high self-efficacy in learning and teaching calculus perceive the essence and importance of the derivative concept and the ways of understanding it. Theoretically, the themes contribute to elaborating the essence of the derivative concept and proposing different pedagogical functions through the use of multiple examples for different connections. Practically, the themes can be applied to teacher education as pedagogical issues for eliciting and developing teachers' epistemological views.

References

Borko, H., & Putnam, R. (1996). Learning to teach. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 673-708). New York: MacMillan.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and learning of calculus. In *Teaching and Learning of Calculus. ICME-13 Topical Surveys.* Springer, Cham.

Dreher, A., Lindmeier, A., Feltes, P., & Hsieh, F. J. (2021). Do cultural norms influence how teacher noticing is studied in different cultural contexts? A focus on expert norms of responding to students' mathematical thinking. *ZDM, 53*(1), 165–179.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM, 46*(4), 647-659.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral, subject matter-related didactical perspectives of concept formation. *Journal für Mathematik didaktik, 37*(Suppl. 1), 99–12.

Hofer, B. K., & Pintrich, P. R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. *Review of Educational Research, 67*(1), 88–140.

Hsieh, F. J., Wang, T. Y., Hsieh, C. J., Tang, S. J., & Chao, G. (2010). *A milestone of an international study in Taiwan teacher education: An international comparison of Taiwan mathematics teacher preparation* (Taiwan TEDS-2008).

Leung, F. K. S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 35–51.

Litteck, K., Rolfes, T., & Heinze, A. (2024). The structure of knowledge about the concept of derivative – a study investigating a process-object framework. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–2

Marton, F. (1981). Phenomenography—describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*(2), 177-200.

Remillard, J. T., & Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM, 46*(5), 705-718.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Moll, V. F. (2022). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(6), 1231-1256.

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 1-13.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian journal of science, mathematics and technology education, 13*, 169-181.

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM, 53*(3), 507–519.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Springer Netherlands.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. IV, pp. 103–127). Providence, RI: American Mathematical Society.

探究教師在數學數位差異化教學中轉變之理論框架

何曉彬[1]　楊凱琳[2]
[1]臺灣師範大學數學系 he.xiaobin03@gmail.com
[2]臺灣師範大學數學系 kailinyang3@gmail.com

摘要

隨著教育科技的快速發展，將數位工具融入數學教學已成為滿足學生多樣化學習需求的重要方法 (Drijvers, 2020; Hwang et al., 2021) 。數位差異化教學應運而生，旨在通過利用數位工具提供學生個性化的學習路徑 (Tomlinson, 2017) 。教師在適應教育改革的過程中需要經歷複雜的轉變歷程 (Lawless & Pellegrino, 2007) ，並受到個體知識信念、機構支持和社會文化背景的共同影響 (Ertmer & Ottenbreit-Leftwich, 2013) 。現有對教師的轉變的研究主要關注教師自評知能、態度與外顯行為之變化，而在解釋教師轉變的方面缺少深度，教師轉變的內在機制如何運作常被忽略。

鑑於轉化學習理論 (Transformative learning theory, TLT) (Mezirow, 2008)強調個體對於關鍵事件的批判反思，有助於解釋教師在數位差異化教學中所經歷的循環往復、深層次與根本性的轉變；以及關注本位採用模式 (Concerns-Based Adoption Model, CBAM) (Hall & Hord, 2015)提供結構化模型，可用於刻化教師在數位差異化教學過程中所呈現的關注階段和使用層次。基於這兩個理論視角的互補性，並考量教師轉變受個體差異及環境因素的交互影響，本研究整合 TLT 與 CBAM 形成理論框架，旨在探究數位差異化教學中教師在個體因素與環境脈絡交織下所展現的顯性與隱性轉變，並進一步剖析個體轉變所涉及的內在機制。本框架不僅有助於闡明數學教師在數位差異化教學環境下的挑戰與良機，還能提供具體的理論支撐以探討教師轉變歷程中的關鍵因素。

關鍵字：教師轉變、轉化學習理論、關注本位採用模式、數位差異化教學

A theoretical framework for investigating mathematics teachers' transition in digital differentiated instruction

1. Introduction

Recent reports by the OECD (2022) revealed that ‚students' learning abilities and cognitive levels may span the equivalent of six grade levels within a mathematics classroom, which is even more pronounced in digital learning environments (Capinding, 2022). In response to this challenge, digital differentiated instruction (DDI) has been recognized as an effective approach to satisfy the diverse learning requirements of students (Prast et al., 2018). Teachers, as key agents, influenced the success of educational reforms (Patfield et al., 2021). Incorporating DDI into mathematics classroom requires mathematics teachers possess digital differentiated instruction competencies—including knowledge, skills, and attitudes—and transition from traditional teaching methods to innovative DDI strategies. It is a challenge which is by no means trivial. Beyond providing professional development opportunities for mathematics teachers (Lindner & Schwab, 2020), it is essential to understand the comprehensive trajectory of teacher changes under educational reform (Trouche et al., 2020). Such an understanding not only supports professional growth but also promotes the broader dissemination of reform initiatives.

Teacher transition encompasses changes in both cognition (as "knowing") and practice (as "doing") (e.g. Abedi, 2024; Clarke & Hollingsworth, 2002). Over the past two years, the Digital Differentiated Instruction (DDI) program supported by Ministry of Education has provided the opportunities for secondary teachers in Taiwan to enhance their digital differentiation competencies and explore the DDI models that are appropriate for teachers' teaching sites. This program aimed at promoting positive changes in teachers' knowledge, attitudes, and behaviors of DDI to improve student learning outcome. Similar to the previous researches, the DDI program has interpreted teacher changes by employing assessments of self-reported instructional knowledge, skills, and attitudes as well as evaluations of observable and measurable behaviors (Clarke & Hollingsworth, 2002; Desimone, 2009; Lewis & Perry, 2014, 2017; Trouche et al., 2020). However, discrepancies often arise between what teachers know and how they act—a phenomenon known as the "problem of enactment" (Kennedy, 2016). This gap suggests stems from a lack of insight on the internal mechanisms of cognitive and affective aspects, and their interplay. The underlying teacher change have not been sufficiently explored. Consequently, it is calling for an integrated analysis that addresses the content, process, and causes of teacher changes to explain the complexity of their changes in DDI programs. It would benefit to identify the internal and external mechanisms of teacher change, and explore the underlying reasons for trigger these changes, achieving the consistency between "knowing" and "doing". To underscore that our exploration of teacher change extends beyond surface-level observations and investigation, this article employed the term "transition" to delineate this distinction.

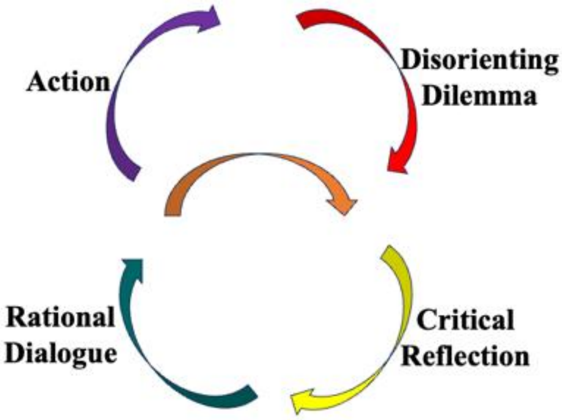
Given Transformative Learning Theory (TLT) (Mezirow, 2018) benefits to explain the cyclical, deep, and fundamental transition through critical reflection on key events, while Concerns-Based Adoption Model (CBAM) (Hall & Hord, 2015) provided the structured models for inscribing the stages of concerns and levels of use, the present study therefore aims to integrate these two perspectives to construct a theoretical framework that not only explains the explicit and implicit transition of mathematics teachers within the DDI program but also illuminates the internal mechanisms working underlying their transition processes.

2. Transformative Learning Theory

Transformative Learning Theory, as proposed by Mezirow, posits that individuals reconstruct their existing Frames of Reference (FoR) through a process of critical reflection which was evoked by new inputs or triggered events (Mezirow, 2000, p. 16). And the emerged frames of reference further influences how individuals perceive, understand, and act (Mezirow, 2000, 2008). From this perspective, teacher transition involves more than changes in explicit competencies and observable behaviors, it also entails a deep, internal process of change and reconstruction. Research has demonstrated that teachers who engage in a transformative learning process tend to develop more adaptive instructional strategies (Mei et al., 2022), with sustained critical reflection enables teachers to achieve an consistent cognitive and affective transition as well as behavioral transition (Taylor & Cranton, 2012). It bridging the gap between theoretical knowledge and practical teaching.

Figure 1

Transformative Learning Process



Note: Adapted from Johnson & Olanoff (2020)

Figure 1 illustrates four key elements in the transformative learning process (Mezirow, 2000): (i) Disorienting Dilemma: Events that challenge teachers' existing assumptions and expectation (that is frames of reference, which included beliefs, values, intentions, etc.); (ii) Critical Reflection: The central element of transformative learning, critical reflection allows individual constructing new understanding from their experiences and their reflections on those experience; (iii) Rational Discourse: Engaging in thoughtful discussion and collaboration with peers to refine new assumptions and understandings; (iv) Action: The practical application of new insights into teaching practice.

This cyclical process illustrates that a teacher's frame of reference not only guides their actions but is also continually reshaped by their actions through critical reflection and rational dialogue (Mezirow, 2000, 2008). Importantly, transition is not instantaneous; but a dynamic process marked by trials and periods of instability. Teachers may experiment and revise their approaches in implementing digital differentiated instruction, undergoing multiple cycles of critical reflection and rational discourse until a relatively stable transformation is achieved.

Critical reflection, as the cornerstone of TLT, its content and depth have been questioned and criticized. Drawing on Dewey's relational perspective theory, Holdo (2023) argues that the critical reflection process itself should also be considered a key object of reflective learning. In the realm of digital differentiated instruction, every teaching episode, classroom reflection, or feedback session serves as a valuable resource for subsequent transformative learning, thereby fostering a profound and in-depth reflection as well as critical engagement on digital differentiated instruction.

On the other hand, even though TLT offers deep insights into individual transformation, scholars have critiqued it for neglecting contextual factors (Holdo, 2023). Greeno (2009) argued that an individual's frame of reference is constructed within specific contexts. Social norms, school cultures, collaborative practices, and leadership support would shaping teachers' frames of reference and teaching-related actions (e.g., Aehling et al., 2012; Bianchini & Cavazos, 2007). Additionally, personal differences—such as prior knowledge, teaching experiences, and professional identity—further influence how teachers' frames of reference and teaching-related action evolve and form (e.g., Avalos, 2011; Christou et al., 2004; Oerke, 2012; Teerling et al., 2018). Recognizing the importance of both contextual and individual factors is essential for a comprehensive understanding of transformative learning.

Herbst and Chazan (2023) proposed the practical rationality of teaching, suggesting that individual's actions and decisions are shaped by a combination of individual resources (included stable and malleable characteristics) and social-technical resources (included norms and obligations). Their framework clearly delineate the component of these two resources. However, transformative learning theory posits the mutual influence between individuals' frames of reference and their teaching practices, both are shaped by contexts. Building on this perspective, the present study restructures the components of individual resources by considering stable personal characteristics (such as disciplinary background, teaching experience, lived experience and professional identity) as individual factors influencing teacher transition. While malleable characteristics, such as knowledge and beliefs, are conceptualized as one's frame of reference. In the context of DDI, norms, such as norms of activities, contractual norms, and situational norms, are regarded as teachers' practice, reflecting how DDI carried out in their classroom. Obligations mainly focused on institutional obligations (such as social, school and class culture) and interpersonal obligations (such as relationships with administrators, colleagues, students and their parents). Teacher transition is thus understood under the interaction between individual and contextual factors.

Although TLT has enriched the depth and comprehensiveness in studying teacher transition, the operationalization still deserves to be strengthened (Taylor & Cranton, 2012). For understanding teachers' transition under DDI program, it became imperative to incorporate operational indicators to help identify the characteristics and evolution of teachers' frames of reference and teaching-related actions.

3. The Concerns-Based Adoption Model

The Concerns-Based Adoption Model (CBAM) provides a detailed framework for describing and measuring the extent to which teachers adopt educational reforms. CBAM considered teachers' perspectives and behaviors as a whole. Emphasizing that transition is a process rather than a one-time event (Hall & Hord, 2015), CBAM encompasses three dimensions:

- Stages of Concern (SoC): Relate to individual beliefs and attitudes, aimed at interpreting how teachers perceive digital differentiated instruction.
- Levels of Use (LoU): Concern observable behaviors and gauge the extent of teachers' adoption of digital differentiated instruction.
- Innovation Configuration (IC): Relate to the real-world environment in which the innovation is implemented, thereby providing an authentic understanding of how digital differentiated instruction operates.

Each dimension can be used independently, but combined favorably provides a comprehensive perspective that facilitates a deeper understanding of the process of teacher change. This integrated perspective can be employed to study teacher change and provide analytical tools for tracking its the progress.

Given that the DDI program is embedded in authentic classroom settings, this study primarily focuses on teachers' performances along the SoC and LoU dimensions. However, it is important to note that CBAM was originally developed for general educational reforms, and its traditional indicators may not fully capture the deeper, more nuanced transitions emphasized by TLT. To address this, the study proposes a restructuring of CBAM from the TLT perspective within the DDI context.

SoC framework outlines the evolution of teachers' concerns (included emotions, attitudes, beliefs…), encompassing three major stages—self, task, and impact—further divided into seven sub-stages (Hall & Hord, 2015). Hall and Hord (1987) noted that teachers might experience multiple stages with varying rates, and individual concerns may reflect in multiple stages concurrently (Matar, 2015); moreover, his/her stage of concern may even regress (Hall & Hord, 2015). Nevertheless, the original CBAM does not adequately explain variations among teachers within the same stage or the dynamics of transitioning between stages. Given that teacher development and transition are complex processes, the original framework falls short in clarifying the subtle and recurrent nature of these transitions. The internal factors driving a teacher's concern at a given stage, as well as the "dilemma of disorientation" and "critical reflection" experienced when transitioning between stages, merit further investigation to fully elucidate teacher transition.

Additionally, although the DDI program is rooted in real classroom settings where students serve as the primary agents, student's feedback and performance—as a reference for teacher adjustment and transition—has not been considered within the original SoC. In light of these considerations, rather than using the original SoC structure, this study opts for the concern categories proposed by Watzke (2007) (see Table 1), which more explicitly incorporate student in the impact concern stage, and considering suited for longitudinal analysis.

Table 1

Different Categories of Stages of Concerns

Groupings	*Self stage-related groupings*	*Task Stage-related groupings*	*Impact stage-related groupings*
Categories	· Professional development · Performance appraisal · School policies and culture · Relations with students	· Adequacy of instructional materials/curriculum · Instructional deterrents to teaching · Classroom conduct · Non-instructional demands on time · Student personal problems · Professional (instructional) freedom	· Student academic growth · Student motivation · Student social-emotional growth · Individual student differences

Note. Adapted from Watzke (2007).

LoU considers teachers' actions during the digital differentiated instruction process. According to Hall and Hord (2015), LoU comprises eight levels, which including five levels of active use (Levels III–VI) and three levels indicating non-use (Levels 0–II). Although LoU does not require teachers to progress uniformly through all levels, each teacher is ultimately assigned a single level (Matar, 2017). In the context of e-learning, Matar (2017) redefined the seven categories of LoU which are closely align with the context of this study. Seven categories and the reinterpretation of each categories under the context of digital differentiated instruction are shown as follows:

- ***Knowledge****:* Teachers begin to understand the advantages, disadvantages of digital differentiated instruction, as well as the efforts required to overcome its shortcomings.
- ***Acquiring Information:*** Teachers actively seek information of digital differentiated instruction.
- ***Sharing:*** Teachers engage in proactive dialogue with colleagues about DDI.
- ***Assessing:*** Teachers evaluate both student learning outcomes as well as their own teaching and learning process.
- ***Planning:*** Teachers devise the plans for designing and implementing DDI.
- ***Status Reporting:*** Teachers share experiences, report reflections, and obtain feedback for further adjustments.
- ***Performing:*** Teachers implement significant modifications or innovations about instructional approaches, strategies and tools of DDI in their practice.

It is important that LoU not only reflects the levels of innovation adoption within the classroom but also captures broader changes iin teachers' daily professional and personal practices. Author plan to develop a DDI Classroom Observation Protocol by integrating elements from both technology integration and differentiated instruction frameworks, thereby enhancing the identification of teachers' action in classroom.

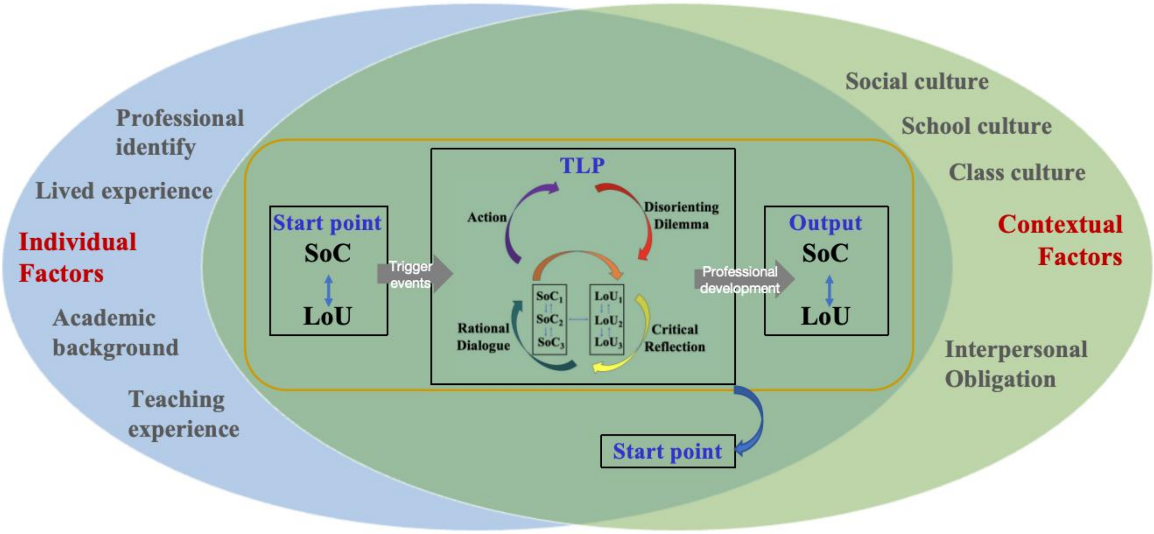
In summary, Revised-CBAM (R-CBAM) offers operational indicator for identifying teacher transition. The R-CBAM focuses exclusively on SoC and LoU to capture changes in teachers' frames of reference and teaching-related behaviors, while TLT provides an overarching perspective for considering the deep developmental and dynamic interactive influences within and between SoC and LoU.

4. A Theoretical Framework for Understanding Teacher Transition in Digital Differentiated Instruction in Mathematics

Based on the discussion and critique of the aforementioned model and theoretical framework, this study develops a theoretical framework for understanding the transition of mathematics teachers within the process of digital differentiated instruction programs (see Figure 2). This framework aims to assist researchers in interpreting the changes or developments in teachers' Stages of Concern (SoC) and Levels of Use (LoU) of a transformative learning cycle with the influence of individual factors and contextual factors. Concurrently, the framework enables the identification of the brainstorming, critical reflection, and the iterative experimentation and adjustments that occur between teachers' SoC and LoU during the transformative learning process, as well as the dynamic interactions between SoC and LoU. The teachers' start point and outcome, along with the transformative learning process, collectively serve as new start point for subsequent learning cycles.

Figure 2

Teacher's Transition Framework with the Transformative Learning Perspective



Note. SoC = Stages of Concerns, LoU = Levels of Use, TLP = Transformative Learning Process. SoC_n and LoU_n denote the various kinds of teachers SoC and LoU, respectively.

The theoretical framework proposed herein compensates for the lack of operational specificity in Transformative Learning Theory regarding teacher transition, expands the application of CBAM within the field of digital mathematics education, and emphasizes the deep connection between cognitive and affective transition and behavioral transition. Educational policymakers can utilize this framework to design long-term professional development programs, to monitor teachers' progress during the implementation of innovative teaching or educational reform. By providing appropriate resources and support tailored to different developmental stages, it is benefit for enhancing the sustainability of teacher transition and professional growth. Future empirical research may further validate this framework through longitudinal studies tracking teacher transition.

Reference

Abedi, E. A. (2024). Tensions between technology integration practices of teachers and ICT in education policy expectations: implications for change in teacher knowledge, beliefs and teaching practices. *Journal of computers in education, 11*(4), 1215-1234.

Avalos, B. (2011). Teacher professional development in teaching and teacher education over ten years. *Teaching and teacher education*, *27*(1), 10-20.

Bianchini, J. A., & Cavazos, L. M. (2007). Learning from students, inquiry into practice, and participation in professional communities: Beginning teachers' uneven progress toward equitable science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, *44*(4), 586-612.

Capinding, A. T. (2022). Impact of Modular Distance Learning on High School Students Mathematics Motivation, Interest/Attitude, Anxiety and Achievement during the COVID-19 Pandemic. *European Journal of Educational Research*, *11*(2), 917-934.

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and teacher education*, *18*(8), 947-967.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational researcher*, *38*(3), 181-199.

Ertmer, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. (2013). Removing obstacles to the pedagogical changes required by Jonassen's vision of authentic technology-enabled learning. *Computers & education*, *64*, 175-182.

Greeno, J. G. (2009). A theory bite on contextualizing, framing, and positioning: A companion to Son and Goldstone. *Cognition and Instruction*, *27*(3), 269-275.

Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and teaching*, *8*(3), 381-391.

Hall, G. E., & Hord, S. M. (2015). *Implementing change: Patterns, principles, and potholes*. Boston, MA: Pearson Education.

Herbst, P. G., & Chazan, D. (2023). Keeping theorizing in touch with practice: Practical rationality as a middle range theory of mathematics teaching. In *Theorizing teaching: Current status and open issues* (pp. 189-224). Cham: Springer International Publishing.

Holdo, M. (2023). Critical reflection: John Dewey's relational view of transformative learning. *Journal of Transformative Education*, *21*(1), 9-25.

Hwang, S., Flavin, E., & Lee, J. E. (2023). Exploring research trends of technology use in mathematics education: A scoping review using topic modeling. *Education and Information Technologies*, *28*(8), 10753-10780.

Johnson, K., & Olanoff, D. (2020). Using transformative learning theory to help prospective teachers learn mathematics that they already "know". *The Mathematics Enthusiast*, *17*(2), 725-769.

Lawless, K. A., & Pellegrino, J. W. (2007). Professional development in integrating technology into teaching and learning: Knowns, unknowns, and ways to pursue better questions and answers. *Review of educational research*, *77*(4), 575-614.

Lewis, C., & Perry, R. (2014). Lesson Study with Mathematical Resources: A Sustainable Model for Locally-Led Teacher Professional Learning. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(1), n1.

Lewis, C., & Perry, R. (2017). Lesson study to scale up research-based knowledge: A randomized, controlled trial of fractions learning. *Journal for research in mathematics education, 48*(3), 261-299.

Lindner, K. T., & Schwab, S. (2020). Differentiation and individualisation in inclusive education: a systematic review and narrative synthesis. *International journal of inclusive education*, 1-21.

Matar, N. A. (2017). Defining E-Learning Level of Use in Jordanian Universities Using CBAM Framework. *Int. J. Emerg. Technol. Learn.*, *12*(3), 142-153.

Mei, W., Khair, Z., & Othman, M. (2022). Transformational learning in teacher context. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 12*(8), 1653-1667.

Mezirow, J. (2000). Learning to think like an adult. *Learning as transformation: Critical perspectives on a theory in progress*, 3-33.

Mezirow, J. (2008). An overview on transformative learning. *Lifelong learning*, 40-54.

Patfield, S., Gore, J., & Harris, J. (2022). Scaling up effective professional development: Toward successful adaptation through attention to underlying mechanisms. *Teaching and Teacher Education*, *116*, 103756.

Prast, E. J., Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2018). Differentiated instruction in primary mathematics: Effects of teacher professional development on student achievement. *Learning and Instruction*, *54*, 22-34.

Taylor, E. W., & Cranton, P. (2012). *The handbook of transformative learning: Theory, research, and practice*. John Wiley & Sons.

Tomlinson, C. A. (2017). *How to differentiate instruction in academically diverse classrooms*. Ascd.

Trouche, L., Rocha, K., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: The case of Anna's documentation work. *ZDM,* 1-15.

Watzke, J. L. (2007). Longitudinal research on beginning teacher development: Complexity as a challenge to concerns-based stage theory. *Teaching and Teacher Education, 23*(1), 106-122.

Abstract

With the rapid advancement of educational technology, integrating digital tools into mathematics instruction has become a key approach to meeting students' diverse learning needs (Drijvers, 2020; Hwang et al., 2021). Digital differentiated instruction (DDI) has emerged as a means to provide personalized learning pathways through the use of digital tools (Tomlinson, 2017). However, as teachers adapt to educational reforms, they undergo a complex transition process, influenced by their knowledge and beliefs, institutional support, and sociocultural contexts (Lawless & Pellegrino, 2007; Ertmer & Ottenbreit-Leftwich, 2013). Existing research on teacher change primarily focuses on self-assessed competencies, attitudes, and observable behaviors, often lacking depth in explaining the internal mechanisms that drive transition.

Drawing on Transformative Learning Theory (TLT) (Mezirow, 2008), which emphasizes critical reflection on key events, contributing to explaining the iterative, profound, and fundamental transition that teachers undergo in DDI. Meanwhile, the Concerns-Based Adoption Model (CBAM) (Hall & Hord, 2015) provides a structured framework for delineating teachers' stages of concerns and levels of uses during the adoption of DDI. Given the complementary strengths of these two perspectives, and considering the interactive influence of individual difference and contextual factors on teacher transition, this study integrates TLT and CBAM into a theoretical framework. This framework aims to explore the explicit and implicit transition of teachers in DDI, shaped by the interplay between individual factors and contextual factors. It also enables a deeper interpretation of the underlying mechanisms driving individual transition. It not only offers insights into challenges and opportunities within DDI context, but also provides a robust theoretical foundation for exploring the key factors influencing teacher transition.

Keywords Teacher transition, Transformative Learning Theory, The Concerns-Based Adoption Model, Digital Differentiated Instruction

An Action Research on the Integration of JDM Curriculum into Professional Learning Communities for Rural Teachers

Yen-Ting Lai[1], Chia-Hsin Kuo[2], Erh-Tsung Chin[3]
[1,3]Graduate Institute of Science Education, National Changhua University of Education, [2] Department of Education Policy and Administration, National Chi Nan University

Abstract

This study primarily explores how teachers in rural areas integrate the JDM curriculum into their Professional Learning Communities (PLCs) to enhance their mathematical teaching knowledge. It focuses on how elementary school teachers in rural areas, with different areas of expertise, improve their mathematical teaching knowledge in the classroom.

The research tools used in this study include the Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) perception scale for elementary school teachers proposed by Chen (2014) as pre- and post-tests, teaching activity videos, interview transcripts, and community activity documents. The "Just Do Math (JDM)" curriculum developed by the Central Math Advisory Team is used for data collection. The study was conducted with a PLC consisting of four teachers from a rural school in Taichung City.

The findings of this study are as follows: (1) The JDM curriculum has a clear structure and provides strong support for teachers with a math background, but teachers without a math background face challenges in the adaptation process; (2) The JDM curriculum’s assessment tools enhance student participation, but teachers expect more tiered designs and interactive resources to support diversified teaching; (3) After using the JDM curriculum, teachers show an overall improvement in their mathematical teaching knowledge.

Key words: Professional Learning Community, JDM Curriculum, Mathematical Teaching Knowledge

Introduction

1.Research Motivation and Background

Rural teachers often face significant challenges due to limited resources and professional development opportunities, resulting in isolation and difficulty in adopting innovative teaching strategies (Darling-Hammond, 2006; Guskey, 2002). The lack of adequate teaching materials, technological support, and access to professional development further hinders their growth (Hargreaves & Fullan, 2012). In this context, Professional Learning Communities (PLCs) provide a valuable platform for teachers to share knowledge, collaborate, and solve problems (Stoll et al., 2006).

Since the Ministry of Education established the National Education Guidance Team, the Mathematics Field Central Guidance Team, led by Professor Lin Fuluai, has launched the "Just Do Math (JDM)" project. This initiative includes foundational mathematics modules, literacy teaching modules, and micro-courses, alongside professional development courses and workshops for mathematics teachers.

This study explores whether PLCs and JDM materials can enhance professional dialogue, promote continuous learning, and improve rural teachers' teaching practices and mathematics skills through feedback and community support.

2.Research Questions

Based on the research motivation outlined above, the research questions are as follows:

(a)What is the effectiveness of JDM materials for teachers with a mathematics background and those without?

(b)Can the assessment tools of JDM materials effectively support the teaching of rural mathematics teachers?

(c)Does the use of JDM materials lead to an improvement in teachers' mathematical teaching knowledge?

Literature Review

1.Professional Learning Community (PLCs)

In rural areas with limited educational resources, Professional Learning Communities (PLCs) play a vital role in teachers' professional growth and student outcomes. PLCs foster collaboration, joint lesson planning, and continuous reflection on teaching practices. DuFour (2004) outlines three core principles for PLCs: ensuring students' right to learn, fostering teacher collaboration, and enhancing student learning through professional growth. The Ministry of Education (2009) identifies seven key characteristics of PLCs: shared vision, collaboration, joint inquiry, practice sharing, action orientation, continuous improvement, and results focus.

PLCs for rural teachers vary based on school needs. Chang (2009) categorizes PLCs into four types:

(1) Grade-based PLCs: Formed by teachers of the same grade, focusing on curriculum design and collaboration, especially important in rural areas with fewer teachers.

(2) Subject/Disciplinary PLCs: Focus on specific subjects, such as math, to improve teaching through joint planning and observation.

(3) School Mission-based PLCs: Focus on tasks like curriculum design or integrating local culture, working closely with the school curriculum committee.

(4)Professional Development Theme-based PLCs: Formed around common educational issues like technology integration or new teaching methods.

PLCs address teacher isolation, promote professional development, and share resources, helping to bridge the urban-rural education gap. Moving forward, technology integration, action research, and cross-school collaboration will enhance the effectiveness of PLCs in rural areas.

2.Analysis of Just Do Math (JDM) Related Teaching Materials

Since the Ministry of Education established the National Education Counseling Group, the Central Counseling Group has focused on developing curriculum and teaching strategies to train seed teachers and enhance local teams' professional skills. Led by Professor Lin Fulai, the "Just Do Math (JDM)" project has created several modules over the past decade: Math Foundation, Math in the Classroom, Math Literacy Teaching, and Math Micro-Learning, alongside professional development courses and workshops. The JDM project uses a progressive teaching approach, with JDM 1.0 (Math Foundation Module) grounded in motivational theory, representational learning, and diagnostic conjecture to help students grasp math concepts. JDM 2.0 (Foundation in Classroom Module) emphasizes practical application with principles like motivation, mathematical sense, co-constructing knowledge, diagnostic interventions, and integrated unit design, using hands-on tasks and games.

JDM 3.0 (Math Literacy Module) aligns with the 108 Curriculum Guidelines and PISA 2022, focusing on critical thinking, creativity, and communication. It uses formative

assessments through written and verbal feedback to evaluate learning outcomes.
JDM 4.0 (Math Micro-Learning Module) offers short, flexible activities that incorporate 21st-century skills and can be easily integrated into existing curricula. Available for download at the National Taiwan Normal University Mathematics Teaching Research Center, these materials support rural teachers in professional learning communities (PLCs), helping them enhance teaching skills and improve student outcomes.

3. Mathematical Pedagogical Content Knowledge (MPCK)

Previous studies have explored Shulman's (1987) concept of Pedagogical Content Knowledge (PCK) and identified several key components: knowledge of students, teaching strategies, teaching goals, subject content, curriculum, context, general teaching, assessment, and media. However, general teaching knowledge lacks specificity, and media knowledge is often less relevant in typical classrooms. Consequently, Chen (2014) redefined Mathematical Pedagogical Content Knowledge (MPCK) into seven core categories: (1) Curriculum and Goal Knowledge (2)Subject Content Knowledge (3) Teaching Strategy Knowledge (4) Teaching Representation Knowledge (5) Mathematical Context Knowledge (6) Knowledge of Student Learning (7) Assessment Knowledge. This framework refines the knowledge areas essential for effective math teaching and offers a solid foundation for teacher professional development and learning communities.

Research Methodology

1. Research Participants

The participants in this study are teachers from a rural school located in a coastal administrative district of Taichung City. The school has a harmonious team atmosphere and strong ties with the local community. The school also has a professional development community aimed at enhancing teachers' teaching abilities. However, the parents in the community tend to adopt more traditional family education methods. Except for the PLC convener and one teacher with a background in mathematics education, the rest of the teachers come from non-science backgrounds. This section provides an individual analysis of this case PLC, as shown in Table 1:

Table 1: Participation of Teachers in the PLC Community Case Study

Teacher Code	Gender	Position	Educational Background	Age (Years of Teaching Experience)	Years of Participation in PLC
T0	Male	Director (PLC Convener)	Master's in Mathematics Education	29 (6)	6
T1	Female	3rd Grade Homeroom Teacher	Bachelor's in English Education	49 (10)	1
T2	Female	5th Grade Homeroom Teacher	Master's in Art Education	37 (11)	1
T3	Male	Group Leader	Bachelor's in Mathematics Education	29 (6)	1

As shown in Table 1, the participating teachers are experienced, with over five years of teaching. Due to the school's remote location, students do not attend after-school tutoring but participate in the school's after-care program or go home directly. Teachers only correct homework from the same day, ensuring that students' math learning is not influenced by external factors, allowing for a clearer observation of the PLC's impact on teachers' professional growth.

2. Research Framework

The research framework of this study (as shown in Figure 1) outlines the entire process of teacher participation in the community, including the pre-stage of self-perception measurement of mathematical teaching knowledge, the mid-stage of learning and application, and the post-stage of teaching effectiveness assessment. The framework also integrates JDM materials to support teacher growth.

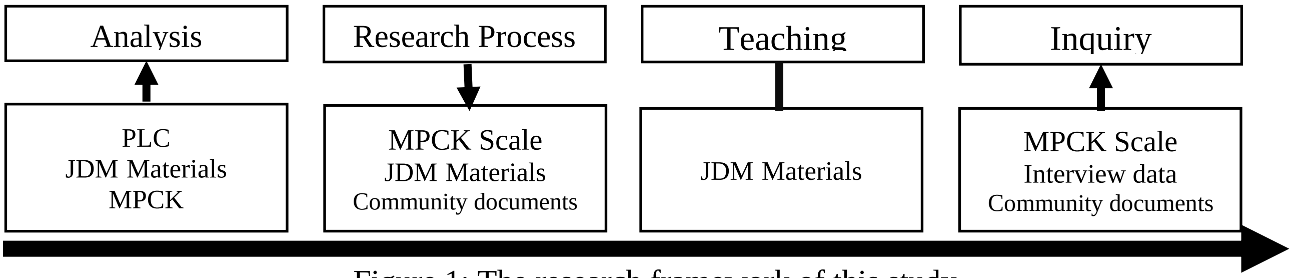


Figure 1: The research framework of this study

Before the study began, the researcher thoroughly reviewed literature on Teacher Professional Learning Communities (PLC), Just Do Math (JDM) materials, and Mathematical Pedagogical Content Knowledge (MPCK). This analysis ensured the relevance and accuracy of the research materials and established a solid theoretical foundation for the study. The research tools identified include the MPCK Scale, JDM materials, and community activity documents, all designed to support teachers' practice and collaboration within the PLC.

During the study, teachers used the co-planning handbook from the Mathematics Education Center at National Taiwan Normal University to design and implement teaching activities. After data collection, the researcher will analyze the MPCK scale results, teaching videos, teacher interviews, community documents, and student performance data. This analysis will evaluate the effectiveness of JDM materials and PLCs in enhancing mathematical teaching knowledge, fulfilling the study's objectives.

3. Research Tools

This study primarily explores how the integration of JDM materials into teacher professional learning communities (PLCs) can enhance the mathematical teaching knowledge of rural teachers. The research tools used in this study include the MPCK Perception Scale proposed by Chen (2014) as pre- and post-tests, interview data, and documents related to community activities. The use of these research tools is analyzed in the following Table 2:

Table 2: Analysis of Research Tools

Research Tool Name	Purpose of the Research Tool	Timing of Use
Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) Perception Scale	This scale is used to measure participants' self-perception of their mathematical teaching knowledge.	Beginning and end of community activities
JDM-related Materials	PLC teachers use these materials to design curriculum-related activities.	During community activities
Interview Data	To understand the participants' engagement process in the community.	Before, during, and after community activities

Community Activity Documents	To understand the events of different activities within the community.	During community activities

(1) Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK) Perception Scale

This study uses the MPCK Perception Scale (Chen, 2014) at the beginning and end of the PLC activities to assess participants' self-perception of their mathematical teaching knowledge.

The scale includes five dimensions: Curriculum and Goal Knowledge (2 items), Subject Content Knowledge (5 items), Teaching Strategy Knowledge (3 items), Teaching Representation Knowledge (4 items), and Assessment of Learning Outcomes Knowledge (3 items), totaling 17 items. The scale shows good reliability with an overall Cronbach's α of 0.919, and subscale reliabilities ranging from 0.644 to 0.837. The survey takes 10-15 minutes to complete, with responses using a Likert scale from 5 (Always) to 1 (Never).

(2) JDM-Related Materials

The "Just Do Math (JDM)" program, developed by the National Education Mathematics Central Counseling Group, aims to create an engaging, meaningful learning environment for students. It has evolved through multiple stages: JDM 1.0 (Foundational Math Activities), JDM 2.0 (Classroom Integration), JDM 3.0 (Math Literacy Teaching), and JDM 4.0 (Micro-Learning Modules). Each stage integrates principles from the PISA 2022 math framework and focuses on 21st-century thinking skills. Comprehensive resources, including lesson plans, collaborative guides, and teaching videos, are available at the National Taiwan Normal University Mathematics Teaching Research Center. These materials are particularly suited for rural teachers involved in math PLCs, offering a step-by-step professional development approach.

(3) Interview Data

This study collects interview data to explore teachers' experiences with community interactions, collaborative lesson planning, and course implementation. A semi-structured interview outline, reviewed by experts, focuses on course materials, teacher PLCs, and teaching reflections.

(4) Community Activity Documents

The study includes four types of community activity documents: (1) Collaborative Planning: Records of teacher discussions on teaching goals, course design, and resource use during joint lesson planning. (2) Teaching Feedback Sharing: Summaries of feedback from teachers sharing their teaching practices, including evaluations and suggestions for improvement. (3) Teacher Collaborative Feedback: Records of teachers' reflections on collaboration, focusing on efficiency, problem-solving, and knowledge sharing. (4) Course Development Results: A compilation of lesson plans, teaching resources, and student learning outcomes reflecting contributions to course innovation and professional development. These documents provide valuable data for analyzing the impact of the community on teachers' professional growth.

4. Data Analysis

This study will employ content analysis, or quasi-statistical analysis (Niu, 2021). According to Shaughnessy et al. (2009), content analysis involves defining data characteristics, categorizing them using specific rules, and calculating the frequency of each category. Bryman (2016) highlights that the main advantage of content analysis is its use of clear, objective standards combined with reliable tools, making it easier to analyze qualitative data by converting it into quantitative measures for comparison.

5. Research Validity

To ensure the quality of qualitative research, this study follows the four reliability standards outlined by Niu (2021): credibility, transferability, dependability, and confirmability. The researcher maintains close contact with case teachers and continually reviews relevant literature to enhance their understanding of the topic. Interview skills are practiced to improve data collection accuracy. Interviews are recorded to ensure completeness, and after the interviews, case teachers review the transcripts to verify accuracy and prevent transcription errors from affecting the research validity.

Research Results and Discussion

In this study, case teachers used the JDM materials, which consist of four sequential modules: foundational math activities, foundational teaching, literacy, and micro-courses. The aim is for teachers to gradually improve their teaching skills and ultimately design their own math curriculum. Since the establishment of the math community in August 2024, the researcher, as the facilitator, guided three teachers—two with non-math backgrounds (T1, T2) and one with a Bachelor's in Mathematics Education (T3)—through the modules. Initially, all teachers began with the "Math Foundation Activities Module." The study will analyze their progress based on their classroom performance and understanding of the modules.

In November 2024, the researcher conducted semi-structured interviews with the teachers, who had been using the JDM materials for three months. The interview questions were: (1) Do the JDM materials help you clearly understand the course structure and implementation? (2) Is the content of the "course plan" clear and helpful for your teaching? (3) What are your thoughts on the various assessment tools, such as "learning sheets" and "hands-on activities"? (4) What improvements would you suggest for the online materials and teaching tools?

1. What is the effectiveness of JDM materials for teachers with a mathematics background and those without?

(1) Claim

The JDM materials are well-structured, supporting math-background teachers (T3) in quickly understanding and applying them. However, non-math-background teachers (T1, T2) face challenges with mathematical terminology and logic, requiring additional time and support to adapt. This indicates the materials' effectiveness depends on teachers' professional backgrounds, with those possessing stronger math knowledge adapting faster.

(2) Interpretation and Evidence

Support for Math-Background Teachers: Math-background teacher (T3) finds the materials' clear structure helps quickly grasp the course context, with the "Number Puzzle" activity aiding number sense development. T3 can adapt the materials flexibly, such as adding extension challenges for students based on their abilities.

Challenges for Non-Math-Background Teachers: Non-math-background teachers (T1, T2) struggle with terminology and logic, which slows their adaptation. T1 noted difficulty with technical terms, and T2 emphasized needing community support to understand the materials' logic, highlighting a slower adaptation process.

Adaptability and Teacher Background: Math-background teachers can directly use the materials, while non-math-background teachers require additional resources and support, emphasizing the materials' adaptability depends on teacher background.

Suggestions for Improvement: To aid non-math-background teachers, the materials should include more operational examples, simplify terminology with application examples, and offer flexible module designs tailored to various needs.

(3) Summary

The study finds that while the JDM materials support math-background teachers well, non-math-background teachers face challenges in adaptation.

2. Can the assessment tools of JDM materials effectively support the teaching of rural mathematics teachers?

(1) Claim

JDM materials, especially the worksheets and hands-on activities, effectively engage students, particularly in collaborative and exploratory learning. However, teachers noted that the assessment tools do not address varying student abilities, with struggling learners facing challenges and advanced students lacking opportunities for further exploration. Teachers suggest incorporating differentiated design and more interactive resources.

(2) Interpretation and Evidence

Student Engagement: Teachers observed that the worksheets and hands-on activities significantly boosted student engagement. T3 mentioned, "Hands-on activities helped students experience math principles in practice, leading to high participation." T1 agreed, noting the activities' strong appeal and increased student involvement.

Assessment Tools' Limitations: The assessment tools' uniform design failed to meet the needs of all students. Struggling learners had difficulty with challenging tasks, while stronger students lacked further exploration opportunities. T1 suggested adding differentiation to better cater to diverse abilities.

Need for Interactive Resources: Teachers requested more interactive resources, like simulated videos and data analysis templates, to improve teaching effectiveness and foster critical thinking. T2 emphasized, "Simulated videos would clarify activity processes, saving prep time," while T3 highlighted the value of templates for developing data processing skills.

(3) Summary

The study found that while JDM materials increase student participation, teachers seek more differentiated assessments and interactive resources to support diverse learning needs.

3. Does the use of JDM materials lead to an improvement in teachers' mathematical teaching knowledge?

Before and after the community activities, all three case teachers took the MPCK scale, and the results are shown in Table 3:

Table 3: MPCK Pre- and Post-Test Results of Case Teachers

Teacher	**Curriculum & Goal Knowledge**	**Subject Content Knowledge**	**Teaching Strategy Knowledge**	**Teaching Representation Knowledge**	**Learning Outcome Evaluation Knowledge**	**Overall**
T1 (Pre)	5/2.5	18/3.6	13/4.33	17/4.25	12/4	65/3.82
T1 (Post)	5/2.5	20/4	15/5	17/4.25	13/4.33	70/4.12
T2 (Pre)	6/3	20/4	13/4.33	16/4	13/4.33	68/4
T2 (Post)	8/4	22/4.2	12/4	17/4.25	14/4.67	73/4.29
T3 (Pre)	8/4	23/4.6	13/4.33	18/4.5	12/4	74/4.35
T3 (Post)	9/4.5	23/4.6	13/4.33	20/5	15/5	80/4.71

Note: The numbers in the table represent "Total Score/ Average Score."

The table reveals that T3 consistently scored higher than T1 and T2, both before and after using the JDM materials. Additionally, all three teachers showed improvement in their mathematical teaching knowledge after engaging with the materials.

Conclusion and Recommendations

This study explores how teachers in rural areas integrate the JDM curriculum through professional learning communities in an action research framework. Based on the analysis of the research data, the findings of this study are summarized as follows:

1. What is the effectiveness of JDM materials for teachers with a mathematics background and those without?

The study found that the JDM curriculum supports math teachers in quickly grasping and applying the content. However, non-math teachers struggle with terminology and activity logic. To improve adaptability, the curriculum should include more examples, simplify terms, and increase module flexibility to better support diverse teachers.

2. Can the assessment tools of JDM materials effectively support the teaching of rural mathematics teachers?

The study found that JDM assessment tools effectively boost student engagement, particularly through hands-on and group activities. However, the uniform design does not cater to varying student abilities. Teachers recommend adding tiered designs and interactive resources, like simulation videos and data templates, to reduce preparation time and enhance exploratory learning. These improvements would better support diverse teacher and student needs.

3. Does the use of JDM materials lead to an improvement in teachers' mathematical teaching knowledge?

The study found that after using the JDM materials, all three case teachers showed improvements in various aspects of their mathematics teaching knowledge, with an overall increase in their MPCK scores. This suggests that the JDM materials can support the growth of mathematics teaching knowledge among rural teachers.

References

Bryman, A. (2016). *Social research methods (5th ed.).* Oxford University Press.

Chang, S. R. (2009). The types and development strategies of teacher professional learning communities. *Journal of Educational Research, 15*(2), 123-145.

Chen, Y. T. (2014). The development and validation of the elementary school teachers' mathematical teaching knowledge (MPCK) perception scale. *Journal of Educational Research, 35*(4), 215-235.

Darling-Hammond, L. (2006). *Powerful teacher education: Lessons from exemplary programs.* Jossey-Bass.

DuFour, R. (2004). What is a professional learning community? *Educational Leadership, 61*(8), 6-11.

Guskey, T. R. (2002). Professional development and teacher change. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 8*(3), 381-391.

Hargreaves, A., & Fullan, M. (2012). *Professional capital: Transforming teaching in every school.* Teachers College Press.

Ministry of Education. (2009). *Development and implementation strategies for teacher professional learning communities.* Taipei City: Ministry of Education.

Shaughnessy, J. M., Zechmeister, E. B., & Zechmeister, J. S. (2009). *Research methods in psychology (8th ed.).* McGraw-Hill Education.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform.

Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.
Stoll, L., Bolam, R., McMahon, A., Wallace, M., & Thomas, S. (2006). Professional learning communities: A review of the literature. *Journal of Educational Change, 7*(4), 221-258. https://doi.org/10.1007/s10833-006-0001-8

偏鄉教師專業學習社群融入 JDM 教材之行動研究

賴彥廷[1]　郭珈忻[2]　秦爾聰[3]
[1]國立彰化師範大學科學教育研究所 leo840509@yahoo.com.tw
[2]國立暨南大學教育政策與行政學系 ilpsbb@hotmail.com
[3]國立彰化師範大學科學教育研究所 abechin@cc.ncue.edu.tw

摘要

本研究主要探討偏鄉地區教師如何透過教師專業學習社群（Professional Learning Community, PLC）融入 JDM 教材來提升數學教學知識為主軸，針對不同專長領域的偏鄉國小教師在教學現場如何提升自我的數學教學知識。

本研究使用的研究工具包含陳彥廷（2014）所提出的國小教師數學教學知識（MPCK）知覺量表來當作前後測、教學活動錄影、晤談語料與社群活動相關文件，並使用數學領域中央輔導團的「就是要學好數學(JDM)」教材來進行資料蒐集，對臺中市某偏鄉學校由四位老師組成的教師專業學習社群進行研究。

本研究的發現如下：一、JDM 教材結構清晰，對數學背景教師支持性強，但非數學背景教師適應過程中面臨挑戰；二、JDM 教材評量工具提升學生參與度，但教師期待更多分層設計與互動資源以支持多樣化教學；三、教師使用 JDM 教材後，在數學教學知識總體表現有所提升。

關鍵字：教師專業學習社群、JDM 教材、數學教學知識

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(5) 數學概念發展與學習工具

研討主題

「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

以《圖騰島》桌遊探討小學生空間推理能力之促進效果

吳慧敏[1]　黃暉娟[2]
[1]佛光大學心理學系 hmwu@mail.fgu.edu.tw
[2]佛光大學資訊應用學系 youzhen@mail.fgu.edu.tw

摘要

本研究以專為訓練空間思考能力設計的桌遊《圖騰島》為工具，探討其對學生空間視圖與換位思考能力的影響，並分析遊戲材料的色彩設計對學生學習表現、認知負荷與動機的影響。研究採混合實驗設計，對象為台北市某國小四、五年級共130 名學生。自變項為遊戲材料色彩組合(單單組：單色目標＋單色積木；單彩組：單色目標＋彩色積木；彩彩組：彩色目標＋彩色積木)與年級；依變項為視圖測驗成績(前測與後測)、認知負荷、學習動機與遊戲喜好。活動後進行訪談蒐集學生回饋。結果顯示，所有年級學生視圖能力皆顯著提升，效果量大($\eta p^2 = .503$)。彩色材料雖增加進階活動難度，但認知負荷仍屬可接受範圍，且各組在動機與遊戲喜好上皆呈正向反應。學生普遍認為《圖騰島》能提升空間思考、策略與換位思考能力，是具挑戰性與趣味性的學習型桌遊。

關鍵字：空間推理、視圖與視角轉換、桌遊、小學、色彩設計

壹、緒論

空間能力是人類理解世界、學習數學，以及發展多元智能的核心能力。Boostra 等人(2023)引用荷蘭數學教育家 Freudenthal 於1973年提出的觀點指出，幾何學習對兒童極為重要，因為唯有理解並掌握自己所處的空間，兒童才能夠更自在地生活、呼吸與移動。Bishop(1980)亦指出，視覺／空間能力在數學學習中具有關鍵地位，特別是在幾何、圖形理解與問題解決等方面，能幫助學生更有效地建構數學概念，尤其在發展非語言式的思考方式上扮演重要角色。空間能力(spatial ability)被分為空間定位（spatial orientation）與空間可視化（spatial visualization）能力兩個構面（Clements& Sarama 2007），空間推理(spatial reasoning)指的是個體能夠辨識、理解並在心智中操弄物體的空間屬性與彼此之間的空間關係，也是最具代表性、也最常被研究的一項(Bruce et al., 2017)。廣義而言，空間推理涵蓋視覺化、心智旋轉、對稱、觀點轉換、圖形的分割與重組、定位、定向與導航等多項能力(Mulligan et al., 2020)。自 1970 年代以來，空間推理已逐漸成為數學教育研究的重要主題。近年研究亦指出發現空間推理不僅與 STEM 領域表現高度相關(Bishop, 1980；Uttal et al., 2013)，也與藝術設計等非理工領域具有連結；同時，具備較高空間推理能力者在數學與語文推理方面也表現更佳(Kell et al., 2013)。因此，從教育與研究的角度更加重視空間推理的發展，不僅有助於促進學生學習，更是培養跨領域人才的關鍵。然而，儘管空間推理能力極具價值，實際操作這類任務對許多人而言仍相當困難，因為它會佔用大量有限的工作記憶資源，進而產生高認知負荷。以心像旋轉任務為例，學習者在思考過程中須先對視覺刺激物進行編碼，接著在工作記憶中建構影像、旋轉變換該影像，最後再與另一刺激物進行比較，以判斷兩者是否相同。從認知負荷理論(Sweller, Merrienboer, & Paas, 1998)的觀點來看，這類任務具有高度元素互動性，需要同時處理多項資訊，當所需資源超出學習者的認知負荷上限時，學習效果將會大幅下降。因此，如何有效降低

學生在學習幾何與空間推理時的認知負荷，便成為教學中不可忽視的重要課題。值得注意的是，研究已顯示空間推理能力具有可塑性，能夠透過有效教學加以培養與提升(Bruce et al., 2017；Hawes et al., 2022；Uttal et al., 2013)。隨著這樣的發現，教學理論也逐步從傳統以心智為抽象訊息處理器的觀點，轉向強調身體、環境與大腦之間動態互動的**體現認知理論**。體現認知主張，思考並非單靠內在運算所產生的心理表徵，而是透過身體與環境的互動所構成的一種主動建構歷程(Khatin-Zadeh et al., 2021)。在這樣的觀點下，知覺與身體被視為認知不可分割的一部分，思考活動深受身體經驗與情境的影響。因此，從體現認知的角度來看，透過實際操作與幾何圖像建構，有助於培養學生具備可遷移的空間直覺能力(Kmetová & Nagyová Lehocká, 2021)。

貳、研究目的與研究問題

基於上述背景，本研究感興趣的是，如何應用體現認知理論的原理，設計有利空間推理的學習活動。從體現認知的觀點，身體行動，如用手勢、操作、身體動作是有利的體現模式(Tran et al., 2017)，然而認知負荷的觀點更重視學習過程中學習者認知資源的分配與使用，依據認知負荷理論，學習過程中的認知負荷來源有三：一為學習內容本身的複雜度，即內在認知負荷；　其二為用與處理與學習目標無關的認知負荷，即外在認知負荷；　其三為用於與學習目標相關的心智努力，即有效認知負荷。因此本研究設計一款訓練空間思考能力的桌遊，名為圖騰島，探討此桌遊是否有助提昇學生的空間思考能力，以及桌遊的材料設計是否影響認知負荷及學生的學習動機。圖騰島遊戲是以操作的方式，讓學生建構模型，並訓練學生從不同的角度完成模型的視圖。觀看立體物件時，會因視角不同而有不同的情形，例如前面和對面的人看同一物件會有左右相反的問題，因此試圖從不同角度觀看立體物件時，需進行方位的轉換。對不擅空間思考或缺乏相關經驗的人，這是高認知負荷的任務。依據認知負荷理論，我們可以進行前訓練，先從簡易模型練習前面與對面的圖像關係，再擴大模型的複雜度。因此本研究的圖騰島包括入門版(只考慮前、後二個面向)及進階版(需考慮前、後、左、右四個面向)，由簡入難，以增加學生的信心。然而依據認知負荷理論，難度除了與任務複雜度和學生能力有關外，材料本身也可能增加不必要的複雜度，如當顏色的設計與目標無關時，色彩繽紛的材料可能反是一種干擾。Chang, Cu & Watt(2018)指出，正向的色彩應用一方面可以提升學習者的學習專注力與沉浸感，然而，不當的色彩設計可能會分散注意力、增加視覺搜索的時間、妨礙資訊的組織與呈現、無法有效成為記憶的線索並且使認知超載，更有甚者可能引起負面情緒與文化上的誤解。也就是說，當遊戲是單色玩法時，似乎使用單色的道具，較為符合認知負荷理論的說法，然而從遊戲教材開發設計的角度來看，使用彩色的質材以配合高階複雜玩法，並用同一組道具來配合較低階的單色玩法，有其商業設計上的必要性。因此，平衡彩色的設計所增加活潑性影響遊戲的興致及因干擾所產生的學習抑制是桌遊設計的兩難問題。而色彩設計是否也有可能意外引發的促進專注或某種策略發展?因此本研究除了驗證圖騰島桌遊對學習是否有促進效果外，一併對色彩設計所造成的影響，進行討論與研究。具體的本研究的**研究問題**如下：

一、 圖騰島遊戲是否有助提昇學生的空間思考能力(在本研究中，更具體的說是不同觀點的視圖能力)?

二、 桌遊的材料(目標卡、積木)色彩設計(單色 vs 彩色)是否影響學生的學習表現、遊戲中的認知負荷感和動機及對遊戲的喜好度?

叄、研究目的與研究問題

本研究採用實驗研究法與訪談的混合實驗設計，實驗的組間變項一為活動材料色彩組合。本次的活動材料主要有積木與目標卡牌，積木分為單色(每組所使用的所有積木為同樣的顏色，任意單一色彩)或彩色(積木的色彩混合了紅、黃、藍，但單一個積木只有一種顏色);目標卡牌分為單色(全白色目標)或彩色目標(目標卡牌上有紅、黃、藍三種顏色中的一、或二種，其它地方仍為白色)，因此會有三種組合: 實驗組 1:單色目標＋單色積木(單單組)、實驗組 2:單色目標+ 彩色積木(單彩組)、和實驗組 3:彩色目標＋彩色積木(彩彩組)。本實驗也想看年級間是否有差異，因此實驗的第二個自變項是年級。實驗將蒐集視圖測驗表現(前、後測)、認知負荷與動機，並以訪談法瞭解學生對遊戲的想法與感受，及色彩對他們的影響。

一、 研究參與者：

本研究的參與者為台北一所國小四、五年級的學生，於活動前取得四年級三個班級 82 人及五年級三個班 67 人的知情同意，共 149 人，隨機將各班參與者分配到實驗組別，資料分析時，排除參與不全(如缺前測或後測，或未完整參與二次桌遊活動者)，最後得到有效樣本四年級 69 人，五年級 61 人，合計 130 人。各組人數分配如下表 1。

表 1 實驗樣本分配表

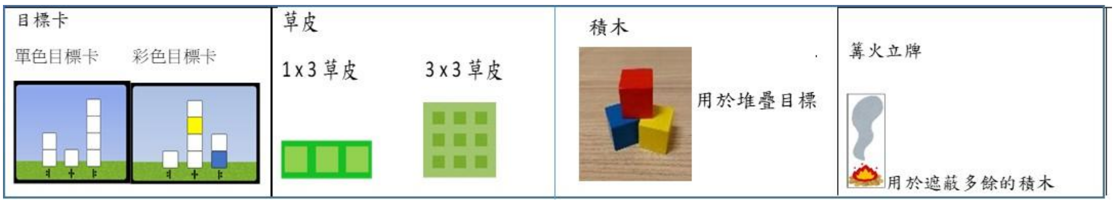
		組別			總和
		單單	單彩	彩彩	
年級	4	30	20	19	69
	5	18	23	20	61
總和		48	43	39	130

二、 研究工具

(一)圖騰島桌遊:在本實驗中使用到該桌遊的配件包括目標卡、積木、草皮、篝火立牌。配件圖示如下圖 1

1. **目標卡**:目標卡分單色(僅白色)與彩色(白色外尚有紅、黃、藍三種顏色中的一、或二個的組合)，一組各 40 張。
2. **積木**：2.5cm x 2.5cm x2.5cm 的積木，分單色積木組(任意單一顏色)36 個，或一組有紅、黃、藍積木，各 12 個。
3. **草皮**: 分 1 x 3(入門版使用)及 3x3(進階版使用)的方格
4. **篝火立牌**×1

圖 1 圖騰島桌遊配件圖示



(二)學習單: 包括活動一、活動二，讓學生練習轉換從不同角度所看到的積木堆疊情形與所得的視圖。活動一學習單用於 1 x 3 的草皮任務，繪製從前、後視角

看到的視圖(積木的堆疊樣式)。活動二學習單用於 3x3 的草皮任務，繪製從前、
後、左、右視角看到的視圖

(三)記分紙：記錄學生從不同角度的得分情形。

(四)視圖測驗：包括選擇題(視圖辨識)8 題，每題一分，共 8 分，及繪圖題(繪製視圖)8 題，每題有 4 小題對應四個面，共 32 分，滿分 40 分。資料分析將分數轉為正確百分比，較易理解分數的意義。

(五)認知負荷與動機問卷：包括活動有趣程度、困難程度、規則容易理解程度、表現滿意度、信心程度、認真程度、繼續的意願，採五點量表。

(六)訪談大綱：主要在瞭解參與學生對遊戲的想法、過程中的感覺、對積木色彩的意見等有助研究者瞭解遊戲材對學生的影響、參與者在過程中認知歷程、感受與建議。

三、 實施步驟：

實驗活動前一週先進行前測，接著進行二週實驗活動，每週一次每次二節課。活動以四人為一小組進行(最少三人)，每小組一位小老師。本次的實驗有二個活動，活動一是入門版，活動二是進階版，每個活動結束後都會請學生填寫對該活動的回饋(認知負荷與動機問卷)。第二週最後約二十分鐘用於小組的大回饋和訪談。實驗活動結束後一週進行後測。因為視圖的內容不在參與者學校課程內容，且圖騰島活動是高認知負荷的活動，因此活動前先進行視圖辨識與繪製前訓練，確保學生瞭解遊戲中目標卡與積木排列的視圖對應關係，活動總帶領者呈現積木在草皮上的排列，各組小老師也複製該排列在學生面前(小組的桌面上)，請學生依據自己的視角，畫出該積木組合從自己的前、後(活動一) 或前、右、後、左(活動二)看過去所呈現的視圖，並畫在所提供的學習單上，然後核對答案。活動一有三題練習(三格都有積木、中間格沒積木、及兩旁格中有一格沒積木)，活動二有二題練習，每題四小題(前、後、左、右)。

肆、結果分析

一、 活動材料色彩對學生視圖學習表現的影響

表 2　四、五年級視圖前後測描述統計

			前測		後測	
年級	組別	個數	平均數	標準差	平均數	標準差
4	1 單單	28	53.48	36.032	68.57	32.457
	2 單彩	20	58.38	35.673	70.88	34.415
	3 彩彩	19	49.21	27.081	67.76	30.010
	總數	67	53.73	33.315	69.03	31.924
5	1 單單	14	52.50	35.396	73.75	27.223
	2 單彩	22	64.32	32.017	81.82	28.838
	3 彩彩	17	54.71	32.026	70.00	35.871
	總數	53	58.11	32.732	75.90	30.733
總數	1 單單	42	53.15	35.390	70.30	30.575
	2 單彩	42	61.49	33.523	76.61	31.709
	3 彩彩	36	51.81	29.220	68.82	32.445
	總數	120	55.67	32.993	72.06	31.459

本研究將視圖測驗分成選擇題和畫(視)圖題。選擇題滿分 8 分，畫圖題滿分 32 分，總分 40 分，資料分析時將其轉換為正確百分比(即正確率 x100)。原始資料有 130 人，資料分析時再扣除前測已滿分的四年級二人，及五年級 8 人，因此視圖學習的有效樣本數是 120 人。表 2是四、五年級視圖測驗的描述統計。整體而言，四年級在前測答對率 53.73%、五年級 58.11%，在前測答對率還不到六成。後測時，四年級答對率已達 69%，五年級已達 75.9%。從描述統計看，四、五年級在後測都有進步。前測以組別和年級進行二因子變異數分析。結果組別 $F(2, 114)=.951$, $p=.390$、年級 $F(1, 114)=.313$, $p=.577$ 和交互作用 $F(2, 114)=.129$, $p=.879$ 皆不顯著。顯示四、五年級的視圖起始能力沒有顯著差異。視圖的前後測以三因子混合設計變異數分析，組別和年級為組間設計，測驗(前後測)為組內設計。推論統計顯示，只有前後測驗達統計上的顯著差異，且達大效果量 $F(1,114)=115.189$， $p<.001$ $\eta_p^2=.503$，其它主效果與交互作用皆不顯著。亦即推論統計結果顯示，玩過圖騰島桌遊後，學生在視圖後測的表現不管組別和年級都有顯著進步，五年級整體而言比四年好，但並沒有達到統計上的差異，目標卡和積木的色彩在本研究中對學習表現也沒有顯著的影響。從上述資料顯示，學生在進行過圖騰島活動後，在視圖的測驗表現皆有進步，但現在的資料無法確定這進步是因為前訓練的效果、圖騰島實驗活動的效果、或測驗(經前、後二次測驗)的效果，未來的研究可進一步驗證，如沒有前訓練、不同的前訓練方式，以及有前後測的控制組，以進一步釐清效果的來源。目前的結果顯示，圖騰島的材料以現有的三種方式進行(單單、單彩或彩彩)對他們的學習成效沒有顯著的差異，但以本研究的方式進行後，不管四年級或五年級， 學生在後測都有顯著的進步。

二、認知負荷感與動機分析

認知負荷與動機共七個指標，其中除困難度是分數愈高表示愈難，其它的指標都是分數愈高愈正向。表 3 是活動一和活動二的認知負荷與動機的描述統計。推論結果顯示除了遊戲一的滿意表現有年級 x 組別的交互作用外，$F(2, 113)=4.065$, $p=.020$, $\eta_p^2=.067$，年級和組別在活動一和活動二的認知負荷和遊戲動機的各指標之主效果與交互作用皆沒有顯著差異。在活動一滿意表現上，四年級的彩彩組滿意表現高於單單組和單彩組，但五年級正好相反，彩彩組滿意表現程度低於單單組和單彩組。為何有這樣的差異，目前仍不清楚，有可能與參與者在過程中與小組的遊戲經驗或成就感有關，需進一步耙梳相關資料。本研究的結果，三組的參與者並沒有感受遊戲難度的差異，材料有色彩的單彩和彩彩組的認知負荷感略高於單單組，這是預期的方向，但並沒有達到統計上的顯著差異。表示因色彩設計所造成的額外負荷量是在受控的程度之內。活動一的困難度在五點量表中都在 2以下，屬簡單。依據認知負荷理論，任務難度簡單時，外在的干擾對學習影響不大。參與者在活動二時有感受到難度的增加，特別是彩彩組，在搭建時需考慮目標位置的顏色，也需要抑制非目標位置的顏色干擾，因此彩彩組的平均困難度在2.78-3.05，屬中等難度。但不管活動一或活動二，三組別間的困難度感受都沒有達顯著差異。參與者覺得遊戲的規則容易理解度、有趣程度、認真程度、信心、繼續的意願都高於理論的中等值上限(3.5)以上，顯示此款遊戲有正向的情意作用。

三、質性回饋

(一)喜歡程度與理由

活動結束後的大回饋，詢問同學對遊戲的整體喜好度、理由和遊戲過程中的感

覺，表 4 是整理所有參與最後大回饋的學生(包含部份資料不全而被排除於前面之分析的參與者)回答喜歡程度次數分配表，

表 5 是回答不同喜好程度的學生之理由及對過程的感受。整體而言，喜歡程度在 3 以下的理由大都為因為覺得很難、或太簡單、或覺得在遊戲中很走倒楣運，但喜歡程度在 3 以下的僅佔所有回饋者的

表 3 認知負荷與遊戲動機描述統計

			活動一			活動二		
			平均數	標準離差	個數	平均數	標準離差	個數
活動困難度	4	1 單單	2.22	1.043	23	2.52	1.122	27
		2 單彩	1.85	0.875	20	2.40	1.314	20
		3 彩彩	1.76	1.147	17	2.78	1.437	18
		總數	1.97	1.025	60	2.55	1.263	65
	5	1 單單	1.72	0.669	18	2.40	0.986	15
		2 單彩	2.00	0.798	23	2.29	1.102	21
		3 彩彩	2.11	1.023	18	3.05	1.146	20
		總數	1.95	0.839	59	2.59	1.125	56
	總數	1 單單	2.00	0.922	41	2.48	1.065	42
		2 單彩	1.93	0.828	43	2.34	1.196	41
		3 彩彩	1.94	1.083	35	2.92	1.282	38
		總數	1.96	0.933	119	2.57	1.196	121
活動規則容易理解度	4	1 單單	3.91	1.276	23	4.07	1.174	27
		2 單彩	3.80	1.361	20	3.60	1.314	20
		3 彩彩	4.00	1.541	17	4.11	1.023	18
		總數	3.90	1.362	60	3.94	1.184	65
	5	1 單單	3.61	1.243	18	3.67	.900	15
		2 單彩	3.96	1.022	23	3.95	1.203	21
		3 彩彩	3.67	1.328	18	3.45	1.234	20
		總數	3.76	1.179	59	3.70	1.143	56
	總數	1 單單	3.78	1.255	41	3.93	1.091	42
		2 單彩	3.88	1.179	43	3.78	1.255	41
		3 彩彩	3.83	1.424	35	3.76	1.173	38
		總數	3.83	1.271	119	3.83	1.167	121
活動有趣程度	4	1 單單	3.78	1.347	23	4.26	0.859	27
		2 單彩	3.75	1.251	20	3.90	1.252	20
		3 彩彩	4.18	1.131	17	4.00	1.085	18
		總數	3.88	1.250	60	4.08	1.050	65
	5	1 單單	3.61	0.916	18	4.13	0.990	15
		2 單彩	3.96	1.022	23	3.86	1.236	21
		3 彩彩	4.22	1.166	18	3.90	1.119	20
		總數	3.93	1.048	59	3.95	1.119	56
	總數	1 單單	3.71	1.167	41	4.21	0.898	42
		2 單彩	3.86	1.125	43	3.88	1.229	41
		3 彩彩	4.20	1.132	35	3.95	1.089	38
		總數	3.91	1.150	119	4.02	1.080	121
滿意自己的表現	4	1 單單	3.91	0.900	23	4.19	0.786	27
		2 單彩	3.90	1.119	20	3.75	1.251	20
		3 彩彩	4.41	0.870	17	4.28	0.826	18
		總數	4.05	0.982	60	4.08	0.973	65
	5	1 單單	4.11	0.832	18	3.93	0.884	15
		2 單彩	4.39	0.839	23	3.90	1.300	21
		3 彩彩	3.61	1.501	18	3.85	1.089	20
		總數	4.07	1.112	59	3.89	1.107	56
	總數	1 單單	4.00	0.866	41	4.10	0.821	42
		2 單彩	4.16	0.998	43	3.83	1.263	41
		3 彩彩	4.00	1.283	35	4.05	0.985	38
		總數	4.06	1.044	119	3.99	1.037	121
完成任務的信心	4	1 單單	4.09	1.203	23	4.26	1.059	27
		2 單彩	4.25	1.118	20	3.80	1.281	20
		3 彩彩	4.41	1.064	17	4.17	1.249	18
		總數	4.23	1.125	60	4.09	1.182	65
	5	1 單單	4.11	1.132	18	3.93	0.961	15
		2 單彩	4.43	0.992	23	3.76	1.411	21
		3 彩彩	4.06	1.434	18	3.55	1.191	20
		總數	4.22	1.175	59	3.73	1.213	56
	總數	1 單單	4.10	1.158	41	4.14	1.026	42
		2 單彩	4.35	1.044	43	3.78	1.333	41
		3 彩彩	4.23	1.262	35	3.84	1.242	38
		總數	4.23	1.146	119	3.93	1.205	121
認真程度	4	1 單單	3.83	1.154	23	4.19	0.921	27
		2 單彩	4.00	1.076	20	3.85	1.137	20
		3 彩彩	3.35	1.412	17	3.83	0.857	18
		總數	3.75	1.216	60	3.98	0.976	65
	5	1 單單	4.11	0.900	18	4.13	0.640	15
		2 單彩	3.83	0.937	23	3.52	1.289	21
		3 彩彩	3.61	1.335	18	3.85	1.348	20
		總數	3.85	1.064	59	3.80	1.182	56
	總數	1 單單	3.95	1.048	41	4.17	0.824	42
		2 單彩	3.91	0.996	43	3.68	1.213	41
		3 彩彩	3.49	1.358	35	3.84	1.128	38
		總數	3.80	1.139	119	3.90	1.076	121
繼續意願	4	1 單單	3.78	1.278	23	3.70	1.171	27
		2 單彩	3.85	1.348	20	3.45	1.504	20
		3 彩彩	3.47	1.328	17	3.44	1.294	18
		總數	3.72	1.303	60	3.55	1.299	65
	5	1 單單	3.67	1.085	18	4.00	0.845	15
		2 單彩	3.87	1.325	23	3.71	1.454	21
		3 彩彩	3.89	1.278	18	4.05	1.146	20
		總數	3.81	1.224	59	3.91	1.195	56
	總數	1 單單	3.73	1.184	41	3.81	1.065	42
		2 單彩	3.86	1.320	43	3.59	1.466	41
		3 彩彩	3.69	1.301	35	3.76	1.240	38
		總數	3.76	1.260	119	3.72	1.260	121

3%；回答 3 的人，理由和 3 以下的人類似，但不同的是多數的他們同時也覺得遊戲好玩、有趣、讓空間問題變有趣，填 3 的人佔整體回饋的 25%; 填 3 以上

(即 4 或 5)的人幾乎都是喜歡過程的思考挑戰、刺激、可以應用數學和學習空間概念及人際互動的樂趣，填 3 以上的人佔整體回饋者的 72%。整體而言，參與的學生喜歡圖騰島遊戲，他們喜歡的理由主要是讓人很開心、緊張刺激、燒腦但好玩、可以動腦思考、可以學習空間概念。遊戲過程讓人很開心是很多學生共同的回饋，但也交織其它複雜情緒，包括想破解的挑戰、苦惱，被破壞時的負面情緒。值得注意的是，喜歡這款桌遊的人，認為這桌遊是具挑戰或困難的，但他們喜歡，且認為它可以學習數學的相關概念，且這是多數的參與者的回饋，顯示這是一款適合應用於空間概念學習的桌遊。

表 4 喜歡程度之次數分配

	1(非常不喜歡)	2	3	4	5(非常喜歡)	合計
單單組	0	0	11 (23.91%)	21 (45.65%)	14 (30.43%)	46
單彩組	1 (2.13%)	1 (2.13%)	11 (23.40%)	12 (25.53%)	22 (46.81%)	47
彩彩組	0	2 (4.35%)	13 (28.26%)	15 (32.61%)	16 (34.78%)	46

表 5 不同喜好程度的理由

	質性回饋
單單組	填 3 的說明幾乎全為有點難或很難，但他們回答在遊戲中的感覺都是正向的-很好玩、有趣、很開心、很好玩但有挑戰性。 填 4、5 的理由幾乎都是可以動腦、挑戰、可以動腦又增知識、有成就感、可以和朋友對決。他們在遊戲中的感覺是複雜的-很開心、很快樂、很緊張、很興奮、苦惱、刺激、腦子快壞了，填 4 和 5 的人只有一人提到填 4 是因為有點難，填 5 的人則沒有人提難這個字眼
單彩組	填 1 的人認為很無聊，遊戲感覺無聊; 填 2 的人認為很熱、每次輪到就被收走，遊戲感覺很衰; 填 3 的人的理由認為遊戲普通(但過程的感覺卻寫絞盡腦汁)，四年級覺得有點難、五年級覺得有點簡單、用腦過度、位置會被同學更換。一人提到沒有很困難，但讓空間問題變好玩。 填 4、5 的人理由幾乎都是可以動腦、思考、很好玩、可以學習空間概念、運用數學和空間概念好玩又能學數學，過程的感覺多為很開心、刺激、想破解、緊張有趣、想如何得多分、被破壞很生氣但很好玩
彩彩組	填 2 的人認為遊戲一般般，另一人認為一開始簡單後來變難很費腦力; 填 3 的人部份認為簡單，但很好玩、很有趣，部份認為有點難，cpu 燒了、頭腦打結; 填 4、5 的人幾乎都是認為可以動腦、思考、和他人合作、很好玩、很有趣、可以和同學互相學習; 因為可以動腦，也可以干擾對方、可以學到知識，過程的感覺也幾乎都是正向情緒--刺激、開心、心花怒放、興奮、開心、愉悅、暢快無比、讓人很認真、很專注、很盡力在玩; 或複雜心情-很開心又很緊張、燒腦、刺激、好玩

(二)從遊戲中得到的學習

很多學生提到學到知識或有學到東西，問他們學到什麼，他們的回答主要可以分為下列幾類:

1. 可以學到空間有關的數學概念、可以學到關於空間、體積的數學概念
2. 3D 立體空間概念、 3D 思維、立體、空間感、立體概念、立體圖形
3. 用不同方向去思考幾何圖形、空間思考、用不同角度思考問題、用不同方向去看不同的形狀、學到換種角度，換位思考
4. 空間加策略
5. 思維空間、觀察、用不同角度觀察，每個地方都不同
6. 讓大腦更清楚怎麼思考邏輯
7. 跟數學一樣需要想，需要動腦
8. 有一些圖案可以放成四面都一樣
9. 拆掉別人房子，能讓自己得到分數
10. 合作、要分工合作和互相幫助、需要團隊合作、合作是關鍵

其中 1 至 5 也是本活動設計的主要目的，且大部份的學生提到他們學習到的就是這些，提到(8)的人已發現有一些圖案可以放成四面都一樣，這通常是對稱圖形。由學生的回饋，可以確認此款遊戲確實讓學生覺得有助他們的空間思考、從不同角度換位思考及在遊戲中發展策略。第 10 點也是學生自己發展出來得分的策略，互相幫忙得分，而第 9 點的策略是有時破壞別人有利自己得分，這是二種不同的人際策略。這二種不同的人際策略有可能影響他們過程中的情緒及對表現的感受。

(三)得分方向

問他們常從哪面完成，主要的回答整理如下表 6:

表 6得分方向與策略

(1) 分數比較高的	(2) 先看哪一面比較快完成
(3) 簡單的面、看哪一面離目標比較相近、用最簡單及分數高的方式移動	(4) 正面/前面
(5) 前面和對面	(6) 對面、每個都要從對面看
(7) 左和右	(8) 大多是右邊
(9) 每一面都試試看、組合方式	(10) 跟大家配合

表 7 活動一與活動二得分方向次數

		前面	後面	前+後	總次數	
活動一	次數	538	447	148	1133	
	百分比	47.48	39.45	13.06		
		前	左	後	右	二面以上
活動二	次數	505	174	236	175	265
	百分比	37.27	12.84	17.42	12.92	19.56

為鼓勵學生從不同的角度思考，在本遊戲中，從前面完成 3 分，從側面(左、右)4 分，從對面 5 分，二面以上 6 分，分數確實影響部份學生，有人會一開始就設定在得分多的地方而不是相對容易的前面。本團隊認為圖騰島的得分設計有達到鼓勵從不同角度思考的目的。對能力較弱的學生，最簡單的方式就是前面。表 7 是從計分紙整理出來學生得分的方向。活動一時從前面得分的次數最多，佔 47%，從後面得分次數佔 39%; 活動二時，前面得分(一次三分)次數佔 37%最高，次多的是二面以上(一次得 6 分)，再次是後面(一次得 5 分)，二者合計佔 37%。從左或右相對是比較少的。有可能是活動一時，後面一次是得 2 分，而前面是一分，得分高讓學生願意多從後面思考，訓練到從後面思考。未來研究可以測試若提高側面分數，是否會提高側面得分機率。當前的資料顯示，圖騰島桌遊確實可以訓練學生從不同的角度思考。

(四)學生對色彩的想法

本研究好奇顏色在遊戲過程中的角色與作用，詢問學生對色彩的看法時，學生的回答，單色組有 45.7%同意單色就很好玩，但 50%覺得多色會增加有趣性及 52%想玩多色。單彩組 45%覺得單色很好，但 70%認為多色是增加有趣性，19%的人會利用色彩設定目標，30%認為多色對他們有幫助，但有 11%覺得多色好干擾，55%想玩多色。彩彩組有 63%同意多色會增加有趣性，46%會利用色彩設定目標，33%認為多色對他們有幫助，有 51%喜歡多色挑戰，但想玩多色降到 43%，33%認為色彩會影響他們。上述的資料顯示，多數學生認為多色會增加有趣性，單彩和彩彩皆不到二成認為色彩會干擾，有部份學生會利用色彩設定目標，特別是彩彩組。單彩組的目標是單色，積木是彩色，大部份的學生似乎都可忽略積木的色彩，因為色彩和目標沒有關係，可以直接忽略，只有 10.6%認為積木色彩會干擾。彩彩組的目標卡是有彩色的目標，因此積木的顏色很重要，需與目標卡有色的對應位置需顏色相同，其它位置的色彩則可忽略，相較之下，本研究的彩彩組參與者似乎覺得色彩的正向作用多於干擾作用，色彩增加挑戰性，有約一半的彩彩組學生喜歡色彩的挑戰，但彩彩組未來想玩多色的比例相對低於其它二組，因為它相對是比較難的。需進一步分析學生對色彩的想法是否與能力有關-如較高能力喜歡挑戰，而能力較弱者喜歡挑戰性較低、較易有成就感的單色活動。整體看來，當積木的色彩與目標無關時，色彩對少數人有干擾作用，即便如此，參與者還是偏好多色。

伍、結論

圖騰島遊戲是為一款訓練空間換位思考和策略思考的桌遊。本次研究主要是想瞭解活動材料的色彩是否影響學生的視圖表現，及遊戲過程中的認知負荷和動機。本次以四、五年級的資料進行分析，主要結果如下:

一、視圖測驗的進步：學生的視圖前後測結果顯示，在參與圖騰島遊戲後的視圖測驗成績明顯提高，不管組是四或五年級學生，在後測時的正確率都顯著提升，且達大效果量。

二、年級和組別間的差異不顯著：年級和組別間在視圖表現上的差異不顯著，交互作用也不顯著，顯示四年級和五年級在本次實驗的三種組別(單單、單彩和彩彩)的表現相當，且學生在前後測的視圖測驗都有顯著的進步。雖然視圖是國中的學習內容，本研究顯示國小四、五年級的學生透過遊戲，也能想像從不同視角所看到的視圖，且為了得到高分，學生會試著從不同的角度思考，並選擇有利的方式(如較高分、較易完成)或發展策略(如與人合作，或破壞他人以使自己得分)，甚至發現規律(如某些圖案可以排列成四面都得分)。亦即遊戲的設計方式鼓勵學生觀察、換位思考和發展策略。

三、色彩對認知負荷的影響：本研究的活動的材料中，單色組和彩色組的認知負荷感無顯著影響。雖然彩色材料可能增加趣味性，但在視圖學習效果上，並未顯示顯著的改善或干擾作用。單彩組可能很快學習到積木的顏色不重要而忽略積木的顏色，因此未造成顯著的干擾。對彩彩組而言，在判斷視圖是否吻合目標時，除了注意草皮上的積木排列組合外，還需要注意關鍵位置的顏色是否與目標相同，因此它是較具挑戰的任務，學生也會在過程中利用色彩設定目標。本研究預期彩彩組會有較高的認知負荷，特別是在活動二時，但結果顯示彩彩組感知的困難度並未顯著高於單單和單彩組，難度也屬中等，是一個具挑戰但學生也喜歡的活動，但對低成就學生彩彩的挑戰可能會超過他們的負荷。

四、遊戲的喜好度：多數學生表示喜歡圖騰島遊戲，因其具有挑戰性和趣味性，可以學習空間概念，也從遊戲中學到合作的重要。學生普遍認為彩色可更增加了遊戲的吸引力，但也有很少部分的學生也反應色彩會干擾注意力。 這些結果顯示，「圖騰島」遊戲能有效提升學生的空間概念的學習，而顏色設計對認知負荷和學習表現的影響相對有限，但對遊戲的趣味性有加分效果。

陸、研究貢獻

本研究的貢獻在於針對一款操作型的教具「圖騰島」，驗證了「體現式」的活動對國小四五年級學生的數學表現與學習態度的影響。具體貢獻包括：1 **提供創新教學模式**：研究結合體現認知理論，設計出適合小學生的數學活動，讓學生透過操作及小組互動學習數學概念，從具體經驗中發展空間概念和空間思考的策略，特別是換位思考。透過遊戲機制的設計，鼓勵學生從多元或不同角度觀察及建構目標。2.**提升數學學習成效和興趣**：研究結果顯示，體現式活動顯著提昇了學生的數學表現，尤其在空間思考能力方面，並有效激發其學習興趣。 3 **為教育課程提供實證依據**：本研究結果支持了課綱中的素養導向教學理念，並建議教師將體現式學習納入教學計劃，以促進學生在真實情境中的操作性學習，這不僅提升學習效果，也有助於持久的學習動機與習慣的養成。

參考文獻

Bishop, A. J. (1980). *Spatial abilities and mathematics education—A review*. Educational Studies in Mathematics, 11, 257–269.

Boonstra, K., Kool, M., Shvarts, A., & Drijvers, P. (2023). Theories and perspectives on fostering embodied abstraction in primary school geometry education. Frontiers in Education, 8, 1-20. DOI:10.3389/feduc.2023.1162681

Bruce, C. D., Davis, B., Sinclair, N., McGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., Francis, K., Hawes, Z., Moss, J., Mulligan, J., Okamoto, Y., Whitely, W., & Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: Using spatial reasoning as a window into the importance of networked educational research. Educational Studies in Mathematics, 95, 143–161.Canada.

Chang, B, Cu, R, & Watt, T(2018) The impact of colors on learning. Proceedings of the Adult Education Research Conference. https://newprairiepress.org/aerc/2018/.

Clements, D. H., & Sarama, J. （2007）. Early childhood mathematics learning. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1, 461-555.

Hawes, Z., & Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*, *27*(3), 465–482.

Kell, H. J., Lubinski, D., Benbow, C. P., & Steiger, J. H. (2013). Creativity and technical innovation: Spatial ability's unique role. *Psychological science*, *24*(9), 1831-1836.

Khatin-Zadeh, O., Eskandari, Z., Cervera-Torres, S., Ruiz Fernández, S., Farzi, R., & Marmolejo-Ramos, F. (2021). The strong versions of embodied cognition: Three challenges faced. *Psychology & Neuroscience*, *14*(1), 16-33

Kmetová, M., & Nagyová Lehocká, Z. (2021). Using tangram as a manipulative tool for transition between 2D and 3D perception in geometry. *Mathematics*, *9*(18), 2185.

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J., & Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Mathematics Education Research Journal, 32*(2), 285-305. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00324-z

Sweller, J., Van Merrienboer, J. J., & Paas, F. G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational psychology review*, *10*, 251-296.

Tran, C., Smith, B., & Buschkuehl, M. (2017). Support of mathematical thinking through embodied cognition: Nondigital and digital approaches. *Cognitive Research: Principles and Implications*, *2*(1), 16.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: a meta-analysis of training studies. *Psychological bulletin*, *139*(2), 352.

Exploring the Enhancement of Elementary Students' Spatial Reasoning through the "*Totem Island*" Board Game

Huei-min Wu[1]   Hui-chuan Huang[2]
[1]Department of Psychology, Fo Guang University
[1]Department of Applied Informatics, Fo Guang University

Abstract

This study employed the educational board game *Totem Island*, designed to foster spatial thinking, to investigate its effects on students' spatial visualization and perspective-taking skills. It also examined how the color design of game materials influenced learning performance, cognitive load, and motivation. A mixed-method experimental design was conducted with 130 fourth- and fifth-grade students from an elementary school in Taipei. Independent variables included color combinations of the materials (mono-mono: monochrome target + monochrome blocks; mono-color: monochrome target + colored blocks; color-color: colored target + colored blocks) and grade level. Dependent variables were visualization test scores (pre- and post-tests), cognitive load, learning motivation, and game preference. Student interviews were conducted after the activity. Results indicated significant improvement in spatial visualization across both grades, with a large effect size (η_p^2 = .503). While colored materials increased the difficulty in advanced tasks, cognitive load remained within an acceptable range. All groups reported positive motivation and enjoyment. Students generally perceived *Totem Island* as a fun and challenging game that enhanced their spatial thinking, strategic planning, and perspective-taking abilities.

Key words: spatial reasoning; visual representation and perspective-taking; board game; cognitive load; color design

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(6) 數學學習評量與補救教學

研討主題
「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系
台灣數學教育學會
國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心
國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

應用四階段評量診斷六年級學童在分數除法問題的表現

許悅蓉 [1]　林原宏 [2]

[1] 臺中市大里區大元國民小學 a092432@gmail.com
[2] 國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在發展四階段評量（four-tier assessment）診斷工具，探討小六學童在「分數除法」之解題表現及後設認知表現。主要目的分別為發展適用於國小學童在分數除法的四階段評量試題，應用建構反應題評分，分析學童在分數除法之解題類型與表現，並探討學童在分數除法解題之後設認知表現。

本研究之研究對象為國民小學六年級學童，12個班級進行施測。研究結果發現：（一）本測驗試卷結果以Cronbach's Alpha係數的信度為第一階段題目係數為.621；第三階段題目係數為.800，顯示本測驗試卷為信度良好試卷。(二)用Pearson積差相關來分析鑑別度，所有試題相關係數皆達顯著水準(<.05) 。(三)事實性知識判斷能力方面：研究結果顯示「等組型-帶分數除以帶分數」，答對率為.29，當分數除法無法約分時，學童出現計算錯誤機率較高；其次，「比例型-帶分數除以真分數」，答對率為.39，顯示學童未能將餘數進行單位換算。（四）詮釋性知識的解釋能力方面：第三階段研究結果顯示「等組型-帶分數除以帶分數」平均得分最低，只有.67分，學童對於數字複雜的分數除法信心較低。其次，「等組型-真分數除以帶分數」與「比例型-真分數除以帶分數」，得分是.73，兩題類型皆是真分數除以帶分數，學童混淆單位量與單位數導致計算錯誤。

關鍵字：分數除法、建構反應題、四階段評量、後設認知

壹、緒論

一、研究動機與背景

研究者在教學經驗中，發現國小六年級學童對於分數除法的理解，常有被除數、除數混淆計算或只知計算而不知題意的情形。在日常生活中能接觸分數的生活經驗較少，對國小學童而言分數除法屬於抽象的概念，在學習分數概念的過程，應該和他們的日常生活經驗、策略進行連結。侯慧淳、楊瑞智(2011)分析出現有六、七年級的數學教材，教材中共同包含分數四則運算，如果學童在六年級分數基礎運算有困難，七年級數學學習也會連帶影響。此外，現今推行十二年國民基本教育，著重培養學童解決問題之能力。因此，研究者欲了解國小六年級學童對分數除法的概念理解與解題情形，是以發展國小學童在分數除法的四階段評量（four-tier assessment）試題，**此為動機之一。**

我國於 2019 年正式推出十二年國民教育課程綱要，其核心素養之一「系統思考與解決問題」乃是希望學童在生活中面對問題時，可以整合思考並具有批判

能力，進而有效的解決問題(教育部，2014)。研究者為了能夠了解學童多元的解題思維，發現開放性評量具有檢驗數學概念之功用。而開放性評量(open-ended assessment)有多種類型，其中建構反應題(constructed-response item)與兩階段評量(two-tier assessment)符合開放性評量的精神(廖倩廷、林原宏，2022)。此外，胡詩菁、鍾靜(2015)認為建構反應題可以針對一個數學概念進行設計與測驗，是一種目標明確的數學任務，評量時間短，有效檢驗單一學習概念。本研究使用四階段評量及建構反應試題分析學童於分數除法問題中的解題表現與類型，**此為動機之二。**

四階段評量是以二階段評量(two-tier assessment)及三階段評量(three-tier assessment)為基礎作為延伸。Treagust (1988)發表了二階段評量，此評量分為兩層次問題。第一層為內容層(content tier)，學童根據題幹敘述勾選是或否；第二層為理由層(reason tier)，依據第一層答案給予理由，評估學童的敘述性知識。不過二階段評量無法判斷學童是否透過猜測得分，因此可以在評量中加入第三層信心層(confidence tier)，加入第三層信心層即稱為三階段評量(Caleon & Subramaniam, 2010a)，信心層是讓學童評估第一層回答是否具有信心，若學童在選擇正確答案時信心較高，可以確定學童對自己的回答具有後設認知，反之，若是學童答案選擇錯誤，卻有較高的信心時，可以判斷學童具有迷思概念(Cetin-Dindar & Geban, 2011)。然而，三階段評量的信心層僅有回答第一層的勾選題，而沒有根據第二層理由層給予信心評估，可能會使學童的分數被高估。因此，加入第四層信心層(confidence tier)，讓學童評估理由層回答是否具有信心，即是本研究進行的四階段評量，從中探討學童於分數除法問題中後設認知表現(meta-cognition)，**此為動機之三。**

二、研究目的

本研究係依據四階段評量方法，發展評量工具與檢測學童於國小六年級「分數除法」解題思維邏輯，並從該單元中找出學童具有之迷思概念類型。此外，亦包含學童對自己信心評估，方能了解學童之後設認知，本研究目的如下：

(一) 發展適用於國小學童在分數除法的四階段評量試題。

(二) 應用建構反應題評分，分析學童在分數除法之解題思維與表現。

(三) 探討學童在分數除法解題之後設認知表現。

貳、文獻探討

一、分數除法類型與常見解題迷思

(一)分數除法類型

分數除法可分為多種類型，李源順(2022)指出分數除法可分為包含除和等分除兩種類型，在分數除法布題時，等分除的問題啟蒙範例是分數除以整數，而包含除的問題啟蒙範例則為分數除以分數。此外，Sinicrope、Mick 與 Kolb（2002）將分數除法分為五種類型：等分除（partitive division）、包含除（measurement division）、當量除（determination of a unit rate）、笛卡爾乘積的逆運算（inverse of a Cartesian product, ICP）以及乘法的逆運算（inverse of multiplication）。

(二)常見解題迷思

學童解題過程中，容易背誦算則而導致多種解題錯誤，致使測驗結果表現不佳(呂玉琴、薛千葳、莊秉軒，2013)。可見分數除法對於學童而言，是抽象不意理解的概念。黃寶葵、劉曼麗(2012)指出分數除法主要錯誤類型有「未將除數顛倒就相乘」、「整數除以分子」、「分母相同時，分母不變，分子相除」、「大的分子（母）除以小的分子（母）」等四種類型，以下將分別說明之。

二、多階段評量的意涵

二階段評量是一種能有效診斷學童在某些領域具有迷思概念的評量，最早由 Treagust 提出。Treagust 開發出二階段診斷評量，評量中每個題組的第一題是一個多項選擇的問題；第二題包含四個可能的理由，用於解釋第一部分答案的原因，學生必須在開放性回答問題中給出的理由。

三階段評量（three-tier assessment）是以二階段評量（two-tier assessment）為基礎，進一步發展更為可靠及有效之工具。Caleon 和 Subramaniam(2010b)提出在二階段評量中加入信心層，藉此評估學童自身信心程度，區分範圍從「完全不自信」到「完全自信」進行量化評估。此方式不僅能評估學童對其概念理解的信心程度，還能避免教師對評量結果的過度解讀。結合信心層級的評量能更準確地識別學童的迷思概念，並降低學童透過猜測答對的可能性。(Arslan et al.,2012；Cetin-Dinda & Geban, 2011)

四階段評量是以三階段評量為基礎。由於三階段評量無法確定學生對內容層和理由層的回答是否具有不同的後設認知，而內容層和理由層屬於不同的知識層次，儘管它們相關，但學童可能將這兩層次問題視為獨立題目，因此增加了信心層，發展為四階段評量。信心層能夠用來評估和檢測學生的敘述性知識、詮釋性知識(Putica, 2023；Laliyo et al., 2021；Caleon & Subramaniam , 2010b)。

三、建構反應題

建構反應題是一種開放性試題，使學生運用知識、技能和批判性思維進行解題，通常不只有一種解題類型，學童在沒有任何提示或選項的情況下，構建自己的答案。建構反應題的好處是使學童能夠實際將所學所知，運用在真實世界中，使學生具有綜合、分析、詮釋等高階思維能力（Tankersley, 2007）。建構反應題能夠幫助學童在生活中面對問題時，具有整合思考、批判能力，進行有效的解決問題，適應當今社會。此外，建構反應題能作為教師蒐集學生迷思概念，調整教學的參考依據 (胡詩菁、鍾靜，2015)。建構反應題能夠了解學童思考脈絡，並且從中發現迷思概念，解題方式不再只拘泥一種形式，使學童能夠使用多元方式解題，更加活化學童思維能力。

四、後設認知

Flavell 在 1979 年將後設認知之概念引入心理學領域(Ochilova, 2021) 。後設認知是指個人對自己認知歷程的認知(張春興，1996)。Flavell 將後設認知分為後設認知知識(metacognitive knowledge)和後設認知技(metacognitive skill)。後設認

知知識是指個人理解自己所學之知識，以及知識蘊含的意義及原理原則；後設認知技能則是個人求知時的實際行動及監控歷程(張春興，1996)。本研究為探討學童在分數除法概念之後設認知，因此採用信心評量法(confidence rating method)。

參、研究架構與設計

一、研究架構

本測驗題目共四階段，第一階段包含語意結構，例如：等組型、倍數型、面積型、比例型，並且以真分數、帶分數除法進行排列，共有 12 題；第二階段則是第一階段之信心評估；第三階段為理由層，依據第一題用文字、算式簡述自己的理由；第四階段是第三階段之信心評量。以下為本研究架構如圖1所示。

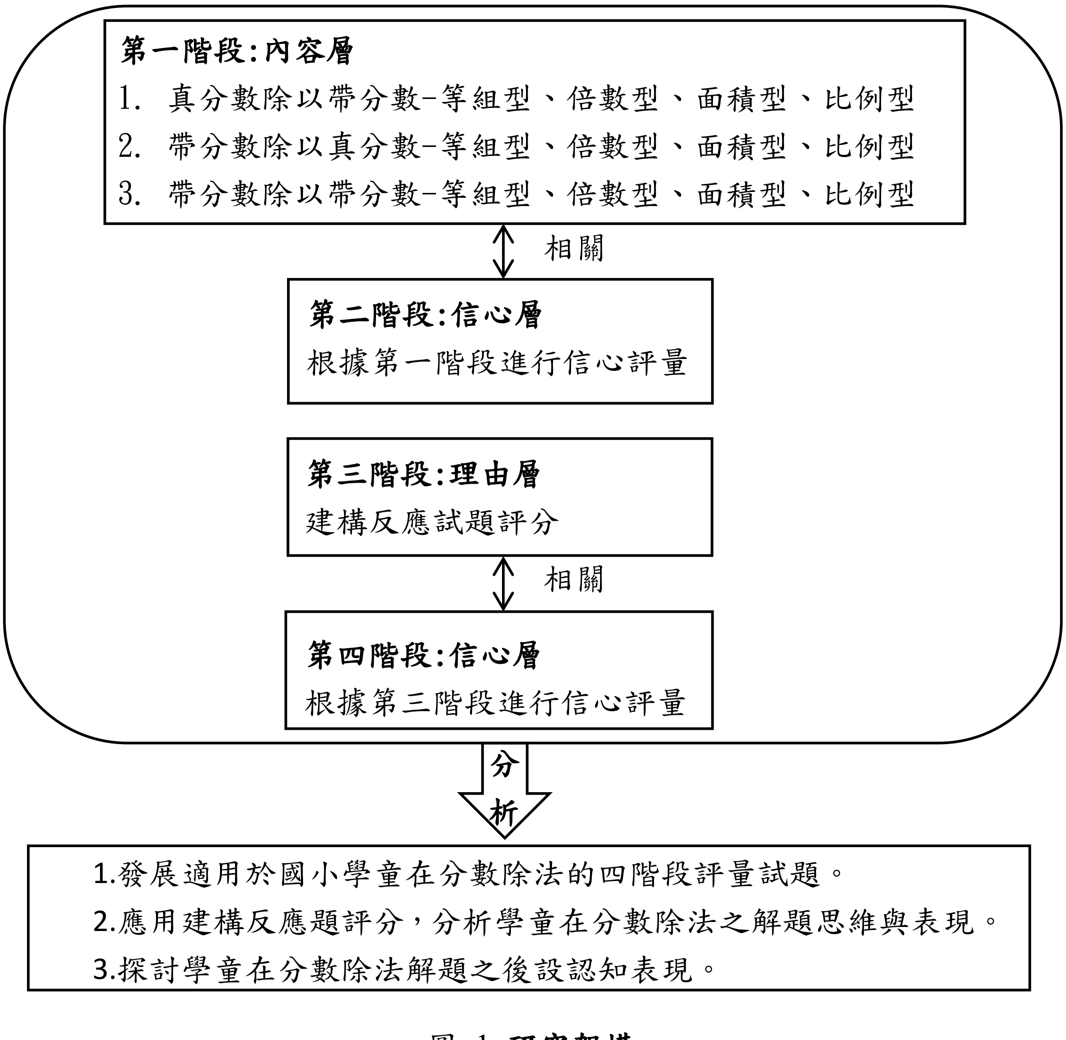


圖 1 **研究架構**

二、研究對象

本研究以國民小學六年級學童為施測對象，且為了提高研究樣本的異質性，選擇 12 所不同地區的學校進行正式施測。分別為新北市 F 國民小學 2 個班級、桃園市 G 國民小學 1 個班級、新竹縣 H 國民小學 1 個班級、臺中市 I 國民小學 2 個班級、臺中市 J 國民小學 1 個班級、臺中市 K 國民小學 2 個班級、南投縣 L

國民小學 1 個班級、彰化縣 M 國民小學 1 個班級、高雄市 N 國民小學 1 個班級，共計 12 個班級，施測人數為 211 人。

三、研究工具

研究者參考十二年國民基本教育課程綱要數學領域以及現今國小六年級翰林版、康軒版及南一版教科書教材內容，編製本測驗內容共 12 題，每題皆有四個階段。第一階段為勾選題，學童根據題幹勾選題目敘述之答案是否正確；第二階段為信心評量，學童依據第一階段勾選題的回答是否具有信心；第三階段為學童依據自己前面回答的題目說出理由，可以以計算、文字、畫圖敘述理由，並以建構反應題的方式進行計分；第四階段為信心評量，學童依據第三階段理由回答

是否具有信心。四階段評量編製原則與範例對照表，如下表 1 所示。

表 1 **四階段評量編製原則與舉例對照表**

試題舉例 等組型-真分數除以帶分數	階段評量目標	說明
1.一桶油漆有$10\frac{1}{2}$公升，爸爸用了$\frac{7}{10}$公升，是用了幾桶油漆? 小泉認為：「爸爸用了$\frac{1}{15}$桶油漆。」 (1) 你認為小泉的說法是否正確?(請勾選) □正確 □不正確	第一階段 評量學童對題目內容的敘述性知識概念的理解程度。	學童根據題目所敘述的內容，使用以習得的分數除法概念，對題目敘述做出判斷，以此檢測學童於分數除法概念的理解程度。
(2) 你對你回答題目(1)答案的正確性有信心嗎?(請勾選) □非常有信心 □有信心 □沒有信心 □非常沒有信心	第二階段 評量學童的後設認知能力。	學童依據第一階段對題目所做的判斷正確性與否，回答是否具有信心。以信心評量法來檢測學童的後設認知。
(3) 請針對你在題目(1)的答案，寫出你的理由：	第三階段 以建構反應題評分概念評量學童的詮釋性知識的能力。	學童依據自己在第一階段的回答，以文字、算式或圖示等提出理由說明，以此找出學童的解題類型、迷思概念。
(4) 你對你回答題目(3)答案的正確性有信心嗎?(請勾選) □非常有信心 □有信心 □沒有信心 □非常沒有信心	第四階段 評量學童的後設認知能力	學童針對在第三階段的詮釋性說明，是否具有信心。以信心評量法來檢測學童的後設認知。

肆、研究結果與討論

一、研究工具信度與鑑別度分析

(一)信度分析

本研究採用內部一致性分析(internal consistency reliability)評估預測試卷的信度，其中又以 Cronbach's Alpha 信度為主，而 Cronbach α值越高，代表工具的穩定性越高。經 SPSS 統計軟體分析後，本研究的試卷信度第一階段題目係數為.621；第三階段題目係數為.800。

(二)鑑別度分析

鑑別度代表試題是否能夠有效區分高低不同程度之受試者，其中鑑別度值域介於-1 至 1 之間，若指數越高，代表鑑別度越高。本研究採用 Pearson 積差相關進行鑑別度分析，當相關係數達顯著水準($p＜.05$)，表示該試題分數與總分的相關性高，具有鑑別度。

二、描述性統計分析

(一)事實性知識的判斷能力

依研究結果所得的統計如表 2 分析可知，第一階段答對率較低的錯誤類型是題號 9「等組型-帶分數除以帶分數」，答對率為.29，當分數除法無法約分時，學童出現計算錯誤機率較高；其次，題號 8「比例型-帶分數除以真分數」，答對率為.39，學童在計算過程中看見題目敘述與自己的答案相同卻因為餘數未轉換單位而答錯。答對率較高為題號 11「面積型-帶分數除以帶分數」，答對率為.93，長方形面積對多數學童而言較為簡易且有正確概念。

(二)詮釋性知識的解釋能力

評量的第三階段是屬於詮釋性知識的測驗內容，給分是依建構反應題的計分方式，每題最高 2 分。若能正確且完整的說明理由，得 2 分；若只能說明部分正確理由，得 1 分；回答錯誤或空白，得 0 分，平均得分分析如表 2 所示。第三階段題號 9「等組型-帶分數除以帶分數」平均得分最低，只有.67 分，顯示學童對於較複雜的數字進行分數除法時信心較低。其次，題號 1「等組型-真分數除以帶分數」與題號 4「比例型-真分數除以帶分數」，得分是.73，兩題類型皆是真分數除以帶分數，學童混淆單位量與單位數導致計算錯誤。

表 2 **第一階段答對率與第三階段得分統計表**

語意結構	分數除法類型	題號	第一階段 答對率	第三階段 平均得分
等組型	$\frac{\text{真分數}}{\text{帶分數}}$	1	.47	.73
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{真分數}}$	5	.82	1.58

	$\frac{\text{帶分數}}{\text{帶分數}}$	9	.29	.67
倍數型	$\frac{\text{真分數}}{\text{帶分數}}$	2	.72	1.14
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{真分數}}$	6	.76	1.38
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{帶分數}}$	10	.87	1.61
面積型	$\frac{\text{真分數}}{\text{帶分數}}$	3	.89	1.53
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{真分數}}$	7	.91	1.83
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{帶分數}}$	11	.93	1.57
比例型	$\frac{\text{真分數}}{\text{帶分數}}$	4	.52	.73
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{真分數}}$	8	.39	1.02
	$\frac{\text{帶分數}}{\text{帶分數}}$	12	.72	1.21

三、第一階段與第二階段評量的 Pearson 積差相關分析

第一階段為評量學童判斷事實性知識是否正確的能力，第二階段是依據第一階段回答，勾選信心程度，亦代表後設認知能力。採用 Pearson 積差相關的分析方式，由表 3 可知，共有 11 題達顯著正相關，亦即學童判斷事實性知識與後設認知能力為正相關，事實性知識判斷能力較佳者，後設認知能力也較好。然而第 11 題為達顯著正相關，顯示學童回答正確，卻信心較低；或者學童回答錯誤，卻信心較高，此種錯誤的信心評估可能導致第一階段與第二階段的相關性降低。

表 3 **第一階段與第二階段相關係數檢定之摘要表**

題號	第一階段與第三階段之相關	題號	第一階段與第三階段之相關
1	.238**	7	.256**
2	.476**	8	.472**
3	.229**	9	.327**
4	.476**	10	.277**
5	.336**	11	.099
6	.318**	12	.254**

**p＜ .01

伍、結論與建議

分數除法是分數四則運算的基礎，然而分數除法對於學童而言，是抽象難懂的概念，因此有很多迷思概念需要釐清。未來教師就相關單元進行授課時，可以先從學童容易發生的錯誤概念進行加強。最後，根據研究發現，未來可探討設計教學過程中形成性評量。此外，本研究所整理學童常見分數除法解題表現與後設認知，期許對教師理解學童的分數除法思維有所幫助。

陸、參考文獻

一、中文部分

呂玉琴、薛千薇、莊秉軒（2013）。國小六年級學童在分數除法文字題的解題表現。**國民教育，54**(1)，87-95。

李源順(2022)。**數學這樣教：國小數學感教育**。臺中市：五南。

胡詩菁、鍾靜（2015）。數學課室中應用建構反應題進行形成性評量之研究。**臺灣數學教師，36**（2），26-48。

張春興(1996)。**教育心理學：三化取向的理論與實踐**。臺北市：東華。

侯慧淳、楊瑞智(2011)。探討國小學童分數起始概念。**國教新知，58**(3)，2-12。

教育部（2014）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。臺北市：教育部。

黃寶葵、劉曼麗(2012)。對國小六年級數學低成就學童在分數乘除法錯誤類型的探討。**科學教育月刊，**(355)，39-52。

廖倩廷、林原宏(2020)。五年級因數與倍數教學融入開放性評量之研究。**臺灣數學教師，43**(2)，29-56。

二、外文部分

Arslan, H. O., Cigdemoglu, C., & Moseley, C. (2012). A three-tier diagnostic test to assess pre-service teachers' misconceptions about global warming, greenhouse effect, ozone layer depletion, and acid rain. *International Journal of Science Education*, *34*(11), 1667-1686.

Cetin-Dindar, A., & Geban, O. (2011). Development of a three-tier test to assess high school students' understanding of acids and bases. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15*, 600-604.

Caleon, I., & Subramaniam, R. (2010a). Development and application of a three-tier diagnostic test to assess secondary students' understanding of waves. *International Journal of Science Education, 32*(7), 939-961.

Caleon, I. S., & Subramaniam, R. (2010b). Do students know what they know and what they don't know? Using a four-tier diagnostic test to assess the nature of students' alternative conceptions. *Research in Science Education, 40*(3), 313-337.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring： A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, 34(10), 906.

Laliyo, L. A. R., Hamdi, S., Pikoli, M., Abdullah, R., & Panigoro, C. (2021). Implementation of Four-Tier Multiple-Choice Instruments Based on the Partial Credit Model in Evaluating Students' Learning Progress. *European Journal of Educational Research*, *10*(2), 825-840.

Ochilova, V. R. (2021). Metacognition and its history. Frontline Social Sciences and History Journal, 1(03), 18-44.

Putica, K. B. (2023). Development and Validation of a Four-Tier Test for the Assessment of Secondary School Students’ Conceptual Understanding of Amino Acids, Proteins, and Enzymes. Research in Science Education, 53(3), 651-668.

Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division.In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, ratios, andproportions (pp. 153–161). Reston, VA： NCTM.

Treagust, D. F. (1988). Development and use of diagnostic tests to evaluate students’ misconceptions in science. *International Journal of Science Education, 10*(2), 159-169.

Tankersley, K. (2007). *Tests That Teach： Using Standardized Tests to Improve Instruction.* Alexandria, VA： Association for Supervision and Curriculum Development.

Applying of four-tier assessment to diagnose sixth-grade students' performance in fraction division problems

Abstract

Yueh-Jung Hsu1 Yuan-Horng Lin2
1Taichung Municipal Da Yuan Elementary School
2Department of Mathematics Education, National Taichung University

This study aims to develop a four-tier assessment diagnostic tool to investigate the problem-solving performance and metacognitive performance of sixth-grade students in fraction division.The main objectives are to develop four-tier assessment items suitable for elementary school students in fraction division, apply constructed-response item scoring to analyze students' problem-solving thinking and performance in fraction division, and explore students' metacognitive performance in fraction division problem-solving.

The study participants were sixth-grade elementary school students, with testing conducted in 12 classes. The study results revealed the following:(1) The test reliability, measured using Cronbach’s Alpha coefficient, showed that the first-tier items had a coefficient of .621, while the third-tier items had a coefficient of .800, indicating good test reliability.(2) Pearson’s product-moment correlation was used to analyze item discrimination, and all item correlation coefficients reached a significant level (<.05).(3) Regarding factual knowledge judgment ability: The results showed that in the "Equal-Group Type – Mixed Number ÷ Mixed Number" category, the accuracy rate was .29. When fraction division could not be simplified, students had a higher probability of making calculation errors. Additionally, in the "Proportional Type – Mixed Number ÷ Proper Fraction" category, the accuracy rate was .39, indicating that students failed to convert remainders into appropriate units.(4) Regarding explanatory ability in interpretive knowledge: The third-tier results showed that the "Equal-Group Type – Mixed Number ÷ Mixed Number" category had the lowest average score of only .67 points, suggesting that students had lower confidence when dealing with complex fractional division problems. Additionally, the "Equal-Group Type – Proper Fraction ÷ Mixed Number" and "Proportional Type – Proper Fraction ÷ Mixed Number" categories had scores of .73. Both problem types involved dividing a proper fraction by a mixed number, and students tended to confuse unit quantities with unit numbers, leading to calculation errors.

Keywords: fraction division, constructed-response items, four-tier assessment, metacognition

國小六年級學生錯誤類型之研究
—縮圖、放大圖與比例尺為例

吳宜家[1]　謝闓如教授[2]

[1]臺中教育大學數學教育系 ikea1067@gmail.com

[2]臺中教育大學數學教育系 khsieh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在分析國小六年級學生，在縮圖、放大圖與比例尺單元中的錯誤類型。研究對象為臺中市兩所國小的 70 名六年級學生，於教學後進行本單元之紙筆測驗，研究者透過試卷結果分析學生答題情形，篩選答對率低於 0.40 之試題，並歸納錯誤類型。研究結果指出，學生的錯誤類型可分為：「概念錯誤」、「表達方式錯誤」與「計算錯誤」。

根據本研究結果，分析學生易混淆的概念有：1.縮圖與原圖之間的邊長關係；2.誤解比例尺的意義。因此，未來教學應提供多樣化的範例與實作活動，例如：可透過數位工具或動畫模擬不同縮放比例的變化，使學生更直觀感受縮圖與原圖的對應關係，輔以測量邊長的練習，以強化學生對縮放與比例尺概念的理解與應用。

關鍵字：比例尺、放大圖、錯誤類型、縮圖

壹、緒論

一、研究動機與背景

在國小數學課程中，「縮圖、放大圖與比例尺」是幫助學生理解比例關係的重要內容，亦是比與比值在幾何領域上的核心應用。然而，實務教學中發現，許多學生在學習此單元時，容易產生錯誤概念，例如：誤解比例尺的意義、錯誤運用縮放比例，或無法正確計算圖上長度與實際長度的對應關係等，影響其數學理解與答題表現。Mayer (1985) 提出學生常見的錯誤類型有三類：(一)遺漏的錯誤：指學生在解題中，遺漏必要的步驟或資訊；(二)細節的錯誤：指在細節部分理解不正確，例如抄寫數字時出現筆誤；(三)轉換的錯誤：指學生在轉換另一種表達方式時出錯，例如無法將數學文字題正確轉換為算式。這些錯誤皆可能影響學生的答題表現，及數學概念的建立。

張景媛 (1994) 提出教師需從學生的思考模式著手，瞭解學生的邏輯關係，才能有效幫助學生建構正確的數學知識。因此，本研究透過學生試卷的答題情形，歸納此單元的錯誤類型，以探討其學習困難，期能提升學生對縮放比例與比例尺的理解，並提供適切的教學建議，強化教師的數學教學方法，提升學生比例關係的應用能力。

二、研究目的

本研究旨在分析國小六年級學生於「縮圖、放大圖與比例尺」單元學習後的錯誤類型。

貳、文獻探討

一、錯誤類型

在數學學習過程中，學生可能因多種因素而產生錯誤，而這些錯誤可能影響他們對數學概念的理解與應用，進而降低解題的正確性。Ashlock (2005) 指出，學生在解題時，由於學習方式的不同、經驗的有限，以及對數學意義解讀，可能產生錯誤的概括或特殊化。例如：部分學生可能誤認為等號右側的數字是總和，或認為只有特定方向的圖形才是三角形，甚至自行發明錯誤的解題規則。由於學生在學習過程中容易產生錯誤，了解學生解題時常見的錯誤類型，對於釐清學習問題至關重要 (吳正新等人，2022) 。 錯誤分析在數學教育中占據核心位置，不僅能幫助教師辨識學生的學習困難，還能為調整教學策略提供可靠的依據。

二、縮圖、放大圖與比例尺之學習表現與學習內容

本研究的教學單元選自縮圖、放大圖與比例尺，屬於十二年國民基本教育課程綱要數學領域第三學習階段之學習重點。本單元是比與比值在幾何學習上的重要應用，也是日後學習平面幾何相似形的基礎(教育部，2018) 。縮放圖形與原圖形在形狀與角度上保持一致，僅大小不同。縮放比例決定對應邊長的比例關係，使對應邊成比例、對應角相等。比例尺則描述縮圖與實際尺寸之對應關係，不僅作為測量工具，其概念能培養學生的比例思維與縮放概念。

依據數學領域課程綱要，學生在學習比與比值後，應具備 n-III-9 與 s-III-7 之能力，即能理解平面圖形經縮放後的特性，並應用於日常生活中，如地圖比例尺的使用，熟練比例關係的概念。為達此目標，現行教材依據 S-6-1 與 S-6-2 規劃課程，著重於縮放圖形時，對應邊成比例，對應角不變的概念，以及從縮放圖認識地圖比例尺的意義、記號與應用。

本單元涵蓋角度、邊長與面積的縮放概念，學生易將邊長比例誤用於面積縮放倍率，認為縮放圖無論長度或面積皆為線性改變(吳宜靜，2005)。若同時探討兩者，可能影響錯誤類型界定不清，故本研究聚焦於縮放圖邊長的對應關係，並分析學生在本單元中的錯誤類型。

三、縮圖、放大圖與比例尺中錯誤類型之相關研究

林美秀 (2009) 研究整理出 18 項錯誤類型，其中 8 項與本研究相關，包括：不了解對應角的概念、認為對應角會隨縮放比例改變、不了解對應邊的概念、誤將原圖邊長當作對應邊長度、誤將縮放倍率當作對應邊長度、不理解題意，
任意使用題幹數字、誤解比例尺圖例概念與單位換算錯誤。張靜惠 (2011) 透過二階段電腦化診斷測驗，發現學生易混淆比例的前項與後項及單位換算。尤怡
雯 (2011) 在結合二階段測驗進行補救教學成效的研究中指出，學生對縮小圖為原圖之長和寬等比例縮小及放大倍數的對應關係理解困難。

根據相關研究，研究者將本單元中常見錯誤類型歸納為三類：概念錯誤、誤解題意及單位換算錯誤。

參、研究方法

本研究採用準實驗研究法，共 70 名。所有研究對象於教學後進行縮圖、放大圖與比例尺之數學成就評量，研究者蒐集試卷並分析其答題情形，歸納錯誤類型，進而提供未來教學改進建議。

一、研究對象

本研究之研究對象為臺中市兩所國民小學六年級學生，其中西區學校 2 班

(男生 19 人，女生 27 人)與大里區學校 1 班(男生 13 人，女生 11 人)。

第一所學校擁有豐富的教育資源，多數學生課後補習。學習情形呈 M 型分布。A 班學生數學程度兩極化，課堂反應亦顯分歧；B 班級學生整體學習專注，師生互動良好，但部分學生需反覆聽講以理解概念。

第二所學校學區生活機能便利。學生整體學習態度積極，數學程度中等，大部分能主動參與課堂活動，惟少數學生學習較為被動。

二、研究工具

本研究由研究者自行編製數學成就評量試卷，共 37 個小題。試卷題型為填空題與計算題，內容涵蓋找出圖形之縮圖或放大圖、計算縮放倍率、找出縮圖或放大圖中的對應點、對應邊和對應角與比例尺的意義與表示。

預試試卷針對 66 名公立學校的六年級升國一生進行預試，預試分析難度介於 0.42 至 1.00，鑑別度介於 0.00 至 0.95。根據預試結果，研究者修訂題目敘述，刪除重複題型，增加題目的變化並細分原定學習目標，例如：原學習目標「從原圖找出縮圖的對應點」被細分為「從原圖找縮圖的對應點」及「從縮圖找原圖的對應點」，提升試卷的適切性與效度。

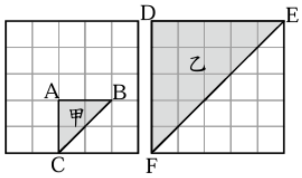
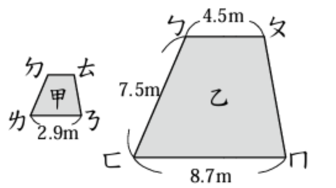
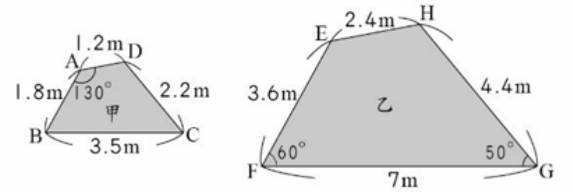
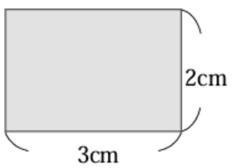
正式試題題數共 29 個小題，試卷之雙向細目表如表 1，經過與教授討論後，確立本研究之試卷內容如表 2。

表 1 正式試卷之雙向細目表

題型		題數	
		縮圖	放大圖
縮圖與放大圖	找出圖形	1	1
縮放倍率	求出倍率	1	1
對應點	從原圖找縮放圖的對應點	1	1
	從縮放圖找原圖的對應點	1	1
對應邊	從原圖中找縮放圖	1	1
	從縮放圖找原圖	1	1
	從原圖中找縮放圖之對應邊長度	1	1
	從縮放圖中找原圖之對應邊長度	1	1
對應角	從原圖中找縮放圖	1	1
	從縮放圖中找原圖	1	1
對應角	找出縮圖或原圖之對應角大小	1	1
	找出放大圖對應角大小	0	1
比例尺	放大圖中兩邊長的比和實際兩邊長的比相等	0	2
	以比和比值表示比例尺	2	0
	從比例尺的圖例中，找出實際的長度	2	0

表 2 正式試卷之題目範例

學習目標	題目
找出圖形的縮圖	1. 下圖中哪一個是ㄅ圖的縮圖？(　　　)圖 

找出圖形之縮小倍率與對應點	2. 下圖中一格表示 1 公分的長度，已知甲圖是乙圖的縮圖。  (1) 甲圖是乙圖的幾倍縮圖？ 算式： (2) 點 D 的對應點是點(　　)。
從原圖中找縮圖的對應邊	3. 已知甲圖是乙圖的縮圖。  (1) 乙圖的$\overline{\text{ㄅㄈ}}$和甲圖的 (　　) 是對應邊。
從縮圖中找出原圖的對應角	4. 已知甲圖是乙圖的縮圖。  (1) ∠H 的對應角是(　　)。
比例尺的意義與表示	9. 下面是長方形土地的縮圖，實際的長是 180 公尺、寬是 120 公尺。  (1) 用比的方式表示這個縮圖的比例尺。 11.下圖比例尺的 1 公分代表實際長度是多少公里？ 

四、資料蒐集與分析

本研究蒐集學生在「縮圖、放大圖與比例尺」單元試卷的答題情形，並整理其錯誤類型。為降低研究對象因提前學習對實驗結果產生影響，研究於 113 年 11 月中旬進行，期程約一週，連續三天進行 3 節課(共 120 分鐘)之教學，教學後立即進行測驗(共 40 分鐘)。測驗後之試卷，由研究者親自批改並登錄成績。試卷評分標準為每題 2 分，其中填空題每答 2 分，計算題則為列式 1 分、答案 1 分，共 29 個小題，合計總分為 58 分。

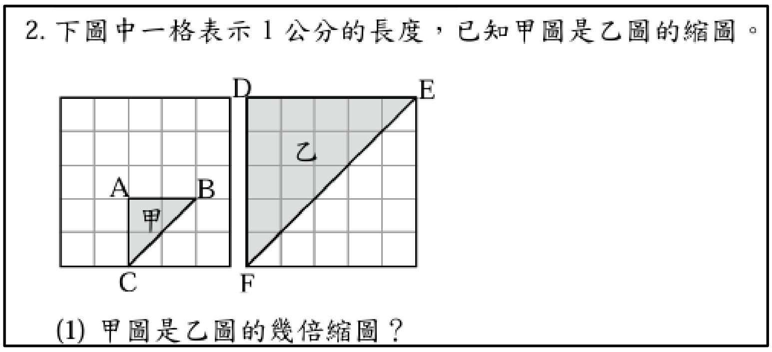
研究者依據試卷的答題情形，整理並分類解題過程中出現的相似錯誤，藉以了解研究對象對本單元學習目標的掌握程度，以調整後續教學模式，並據此提出研究建議。

肆、研究結果與分析

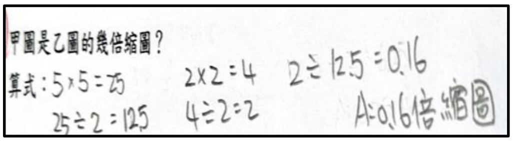
本研究旨在分析研究對象於「縮圖、放大圖與比例尺」單元試卷的錯誤類型。本試卷之答對率介於 0.06 至 1.00，研究者選擇答對率低於 0.40 的 5 個試題，分別是 2(1)(答對率 0.10)、9(1)(答對率 0.06)、9(2)(答對率 0.07)、10(答對率 0.30)與 11(答對率 0.31)，針對學生普遍感到困難的題目，整理出三類「概念錯誤」、「表達方式錯誤」及「計算錯誤」常見的錯誤類型，以下分別說明。

一、概念錯誤

研究對象對於本單元的概念理解存在錯誤，導致答題時未能正確解題，其錯誤概念涵蓋：不清楚縮放圖的對應邊應成比例、比例尺概念錯誤，或無法正確解讀比例尺圖例的意義。以下分別針對概念錯誤之答題情形進行說明。



(a)



(b)

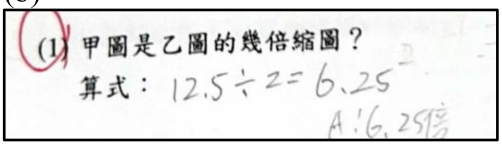
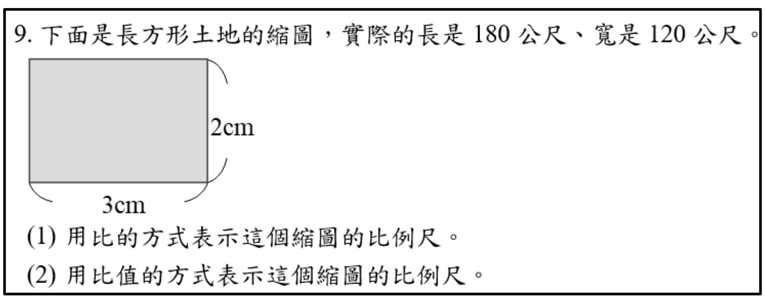


圖 1 縮圖倍率概念錯誤

第二題第 1 小題的重點為計算圖形的縮圖倍率，學生需理解縮放圖的邊長與原圖對應邊邊長成比例的概念。因此應先找出圖形的邊長，並以縮圖邊長除以原圖邊長求得正確的縮圖倍率。例如：圖 1 中，甲圖邊長 2 公分，乙圖邊長 5 公分，正確縮圖倍率應為$2 \div 5$。

從圖 1(a)和(b)的答題結果顯示，學生不理解縮放比例應以邊長計算，而非面積，如：算出甲面積為 $2cm^2$和乙面積 $12.5cm^2$後再相除，此錯誤反映出學生缺乏縮圖與原圖之間的邊長比例關係的概念。另外圖 1(b)中，以$12.5 \div 2$表示學生不理解「甲是乙的幾倍縮圖」的意義，應以甲圖除以乙圖算出縮圖倍率。



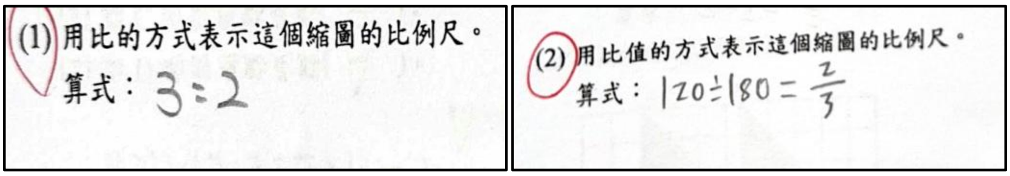


圖 2 比例尺概念錯誤

第九題的重點是以比和比值表示縮圖長度與實際長度間的關係，學生應先找出縮圖與實際物品的比例關係，再化為縮圖 1 公分對應的實際長度，以求得正確的比例尺。

從圖 2 的答題結果顯示，學生不理解比例尺是縮圖與實際長度的概念，應以$3:18000=1:6000$或$\frac{1}{6000}$表示，但學生卻以縮圖的邊長比，例如：$3:2$，或以實際長方形的邊長相除，例如：$120 \div 180$表示比例尺，其表示方式皆未表達縮圖與實際長方形土地的對應關係，表示其對比例尺的概念理解錯誤。

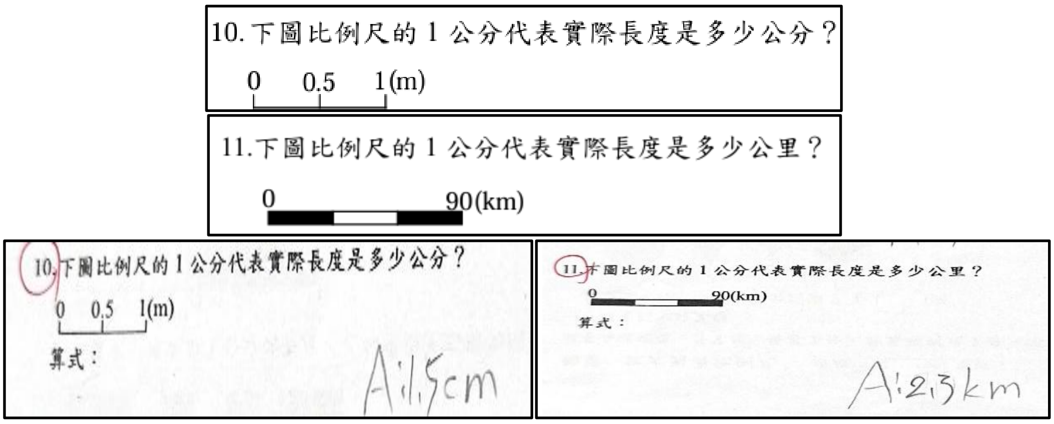


圖 3 比例尺概念錯誤

第十題與第十一題重點為求出比例尺 1 公分所代表的實際長度，學生應理解比例尺圖例每一格代表圖上的 1 公分，其上方的數字則表示對應實際長度。因此答題時需從圖例中找出 1 格對應的實際長度，並轉換為題目指定的單位。例如：第十題圖例中 1 格代表圖上 1 公分，對應的實際長度為 0.5 公尺，且題目要求的單位為公分，因此應換算為 50 公分。第十一題圖例中 3 格對應的實際長度為 90 公里，1 格對應的長度應為 30 公里。

從圖 3 的答題結果顯示，部分學生不理解比例尺圖例之意義，直接測量紙本上的比例尺圖例長度，如：1.5 公分或 2.3 公分，並誤認為其代表縮圖上 1 公分對應的實際長度，忽略比例尺圖例僅為示意工具，應依標示數據進行換算。這顯示學生對比例尺圖例的概念理解錯誤。

根據上述答題錯誤類型，學生皆未具備該題目的相關概念，導致答題錯誤。因此，此類答題情形可歸類為概念錯誤。

二、表達方式錯誤

表達方式錯誤指學生具備答題所需之概念，但因表達方式有誤，以致無法正確答題。本單元中學生易在縮圖倍率、比例尺與比例尺圖例中表達錯誤，以下分別進行說明。

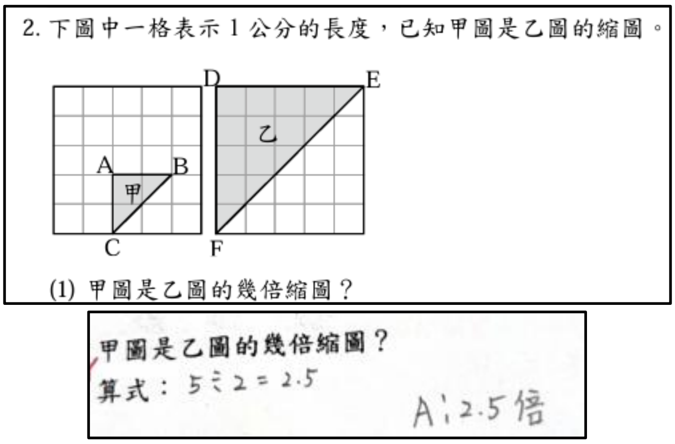


圖 4 縮圖表達方式錯誤

從圖 4 的答題結果顯示，學生具備縮圖與原圖邊長成比例的概念，能正確點數甲圖邊長為 2 公分，乙圖的邊長為 5 公分，然而學生在「$5 \div 2$」的計算中，將乙圖邊長除以甲圖邊長當作縮圖倍率，表示其誤解縮圖倍率的表達方式，未注意應以縮圖邊長除以原圖邊長，即「$2 \div 5$」求得正確的縮放倍率。

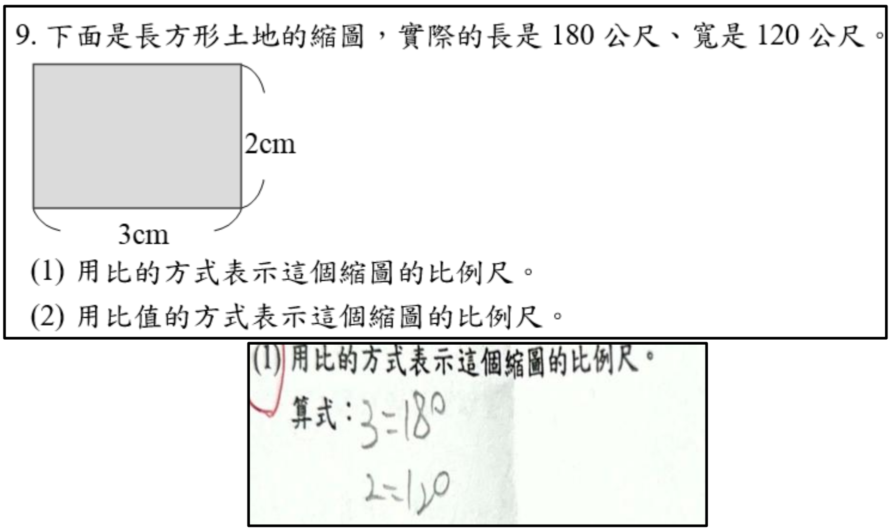


圖 5 比例尺表達方式錯誤

從圖 5 的答題情形中可知，學生以 3：180 表示比例尺，代表其理解比例尺為表示縮圖長度與實際長度的比例關係，但未注意到比例尺的表示方式應為 1：實際的長度，且實際長度單位應以公分表示，即$3：18000 = 1：6000$為正確表示比例尺的方式。

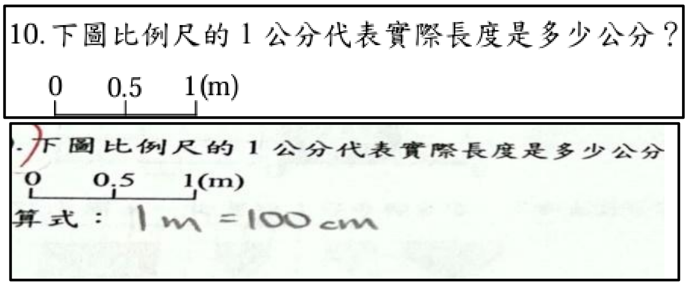


圖 6 比例尺圖例的表達方式錯誤

從圖 6 的答題情形中可知，學生知道圖例上的數字代表實際的長度，並化為題目要求的單位長度，但學生未注意到 100cm 所對應到的是縮圖上的 2 公分，而非 1 公分，所以正確答案應為 50 公分，表示學生誤將整個圖例當作縮圖上的 1 公分，即比例尺圖例的表達方式錯誤。

根據上述答題錯誤類型，學生在作答時雖具備相關概念，但因不熟悉縮圖倍率、比例尺與比例尺圖例的表達方式，導致答題錯誤，這與 Mayer 提到的「轉換錯誤」類似。

三、計算錯誤

計算錯誤指學生具備答題所需之概念，但因計算數值錯誤，以致無法正確答題。以下說明計算錯誤之答題情形。

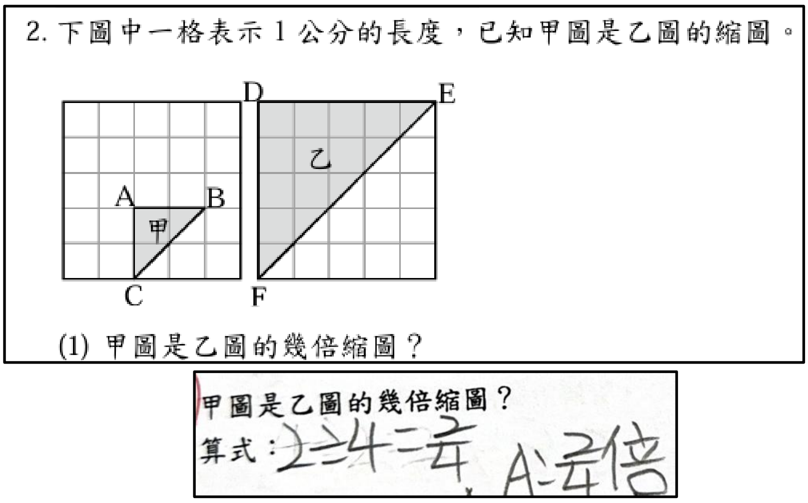


圖 7 邊長點數錯誤

從圖 7 的答題結果顯示，學生理解計算縮圖倍率是由甲圖邊長除以乙圖邊長，然而，由「2 ÷ 4」中顯示，學生正確點數甲圖邊長為 2 公分，而點數乙圖邊長時點數格子錯誤，乙圖邊長應為 5 公分，但其點數為 4 公分。因此，屬於計算錯誤。

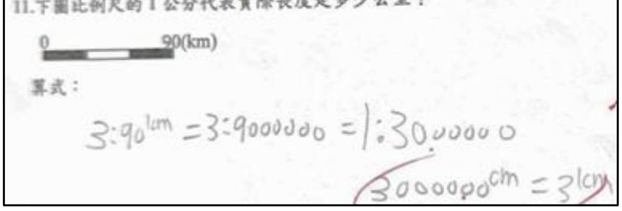


圖 8 單位換算錯誤

從圖 8 的答題結果顯示，學生理解 1 公里=100000 公分，但在最後算式，公分轉換為公里時，將 1 公里＝1000000 公分，造成答案錯誤，因此為計算錯誤。

根據上述答題錯誤類型，學生在作答時雖具備該題的概念，但未注意到計算過程中的細節，導致無法正確答題，與 Mayer 提到的細節錯誤類似。

依據上述答對率低於 0.40 的試題答題情形，於本單元中的錯誤類型可分為「概念錯誤」、「表達方式錯誤」與「計算錯誤」三類。

伍、結論與建議

本研究結果發現，學生在縮圖倍率與比例尺題型中的答對率偏低(低於 0.40)，反映出此類題目具有較高的學習難度。分析研究對象之答題情形與錯誤類型，可將錯誤類型歸納為：「概念錯誤」、「表達方式錯誤」與「計算錯誤」，類似 Mayer 提出的轉換錯誤與細節的錯誤。其中，概念錯誤指學生未正確理解題目概念，例如：不清楚縮放圖的對應邊應成比例、比例尺概念錯誤，或無法正確解讀比例尺圖例的意義；表達方式錯誤，則指學生雖具備答題概念，但在解題時因概念轉換為數學公式時出錯，與 Mayer 提出轉換的錯誤類似；計算錯誤則指計算過程中出現錯誤，與 Mayer 提出細節的錯誤類似。上述的錯誤類型，皆會影響學生答題能力。

根據本研究結果，分析學生易混淆的概念有：1.縮圖與原圖之間的邊長關係，計算縮放倍率相關題目時，常忽略對應邊長成比例的變化。2.誤解比例尺的意義，不理解比例尺是表示縮圖與實際邊長的比例關係，導致解題錯誤。因此，未來教學應提供多樣化的範例與實作活動，例如：可透過數位工具或動畫模擬不同縮放比例的變化，使學生更直觀感受縮圖與原圖的對應關係，輔以測量邊長的練習，以強化學生對縮放與比例尺概念的理解與應用。

參考文獻

尤怡雯 (2011)。**結合二階段測驗之電腦適性補救教學設計與應用成效—以縮圖、放大圖與比例尺為例** [未出版碩士論文]。國立臺中教育大學。

吳正新、謝佳叡、黃宇康 (2022)。**國小六年級生對數學素養導向試題之作答表現探究**。臺灣數學教育期刊，9(2)，87-111。

吳宜靜 (2005)。**八二年版國一學生縮圖與放大圖繪製之概念與表現** [未出版碩士論文]。國立臺南大學。

林美秀 (2009)。**數位教材與電腦適性診斷測驗融入教學之探討—以國小六年級數學「放大縮小比例尺」單元為例** [未出版碩士論文]。亞洲大學。

張景媛（1994）。**數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究**。教育心理學刊，27，175-200。https://doi.org/10.6251/BEP.19940601.7

張靜惠 (2011)。**國小六年級縮圖、放大圖與比例尺單元之二階段電腦化診斷測驗之研發** [未出版碩士論文]。國立臺中教育大學。

教育部 (2018)。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域**。教育部。

Ashlock, R. B. (2005). *Error Patterns in Computation: Using error patterns to improve instruction* (9^{th} ed.). Prentice Hall.

Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123–138). Lawrence Erlbaum.

A Study on Sixth Graders' the Types of Mistakes in Answering Questions: Focusing on Thumbnails, Enlargements, and Scale

Yi-Jia Wu[1] Kai-ju Hsieh[2]

[1]Department of Mathematics Education, National Taichung University

[2]Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

The purpose of this study was to investigate the types of mistakes of sixth graders in answering mathematics questions. The participants were 70 sixth-grade students from two elementary schools in Taichung City. A paper-and-pencil test was administered after the instruction. The researchers analyzed the students' performance based on the test results, selected the questions with a correct answer rate below 0.40, and categorized the types of errors made by students in this unit.

The results indicated that students' the types of mistakes included "concept errors", "expression errors" and "calculation errors". The findings of this study are as follows:1. students tend to confuse the side length relationship between the miniature and the original image. 2.Misunderstanding the meaning of the scale, which leads to errors in solving problems.

Therefore, future teaching should provide a variety of examples and practical activities. For example, digital tools or animations can be used to simulate changes in different scaling ratios, so that students can more intuitively feel the correspondence between the thumbnail and the original image, supplemented by exercises to measure side lengths to strengthen students' understanding and application of the concepts of scaling and scale.

Key words: enlargements, error type, scale, thumbnail

異分母分數加減的迷思概念探究與教學設計

魏愷呈[1]　姚如芬[2]

[1] 雲林縣東勢鄉同安國民小學 ama105123@tmail.ylc.edu.tw

[2] 嘉義大學教育學系 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究旨在探討二位國小數學低成就學童在異分母分數加減之迷思概念，並據以設計學習扶助的教學活動。本研究採個案研究，以雲林縣某偏遠地區小學六年級學習扶助班 2 名學童為研究對象，藉由學習扶助前的測驗與晤談，研究發現二位低成就學童在異分母分數加減的迷思概念為：缺乏部分與整體的概念、常誤判單位量、多重表徵轉換困難，難以在文字、圖形與數字間靈活切換等；此外，個案學童在通分時，會習慣性地直接將分母相乘，而非尋找最小公倍數，導致計算負擔增加。為改善上述問題，本研究嘗試設計了結合多元表徵與故事情境的教學活動，希望能提升學童對異分母分數加減的理解。未來將進一步實施教學，同時評估學習成效並提出具體的教學建議。

關鍵字：低成就學童、異分母分數的加減與比較、迷思概念、教學設計

壹、緒論

一、前言

本研究主要分兩個階段：階段一是探究迷思概念並設計教學活動、階段二是實踐教學活動；因為配合學童的學習進度，本文目前先呈現第一階段的結果，後續如果完成教學實踐，會再做進一步的報導。

二、研究動機與背景

分數是比例推理的基礎概念，而分數是學生在小學階段首次接觸有理數的經驗，部分學生難以將分數概念化成 a/b 的形式（其中 b 不為零），因此，深入研究學生在小學階段對分數思維的發展是非常重要的（Dittika Gupta & Trena L. Wilkerson,2015）。而學童受到熟悉的整數運算系統的干擾以及分數的多重意義的影響下，容易造成分數學習上的困難（侯慧淳、楊瑞智，2011），其中五年級的分數課程是學生從基礎概念進展至計算規則的重要階段，如果在這個階段，學生未了解分數真正的意涵，將在學習分數的過程中產生迷思概念（李國家、劉曼麗，2012）。且從五年級開始，有關分數概念的課程內容中，會遇到同時出現分數的不同意義與其子概念（如：等分、單位量、等值分數等等）之問題，使學生在學習分數上產生問題（溫世展，2011）。由上述能看出分數在五年級這個階段的重要性，而異分母分數的加減又作為五年級最先接觸的概念，若未釐清這部分的內容，在學習分數的乘、除法上可能會出現學習困難，因此本研究想探究國小低成就學童在異分母分數加減之迷思概念，並依據迷思概念設計教學活動。

三、研究目的

本研究旨在探討二位國小數學低成就學童在異分母分數加減之迷思概念，並根據這些迷思概念設計學習扶助的教學活動，以促進學童對異分母分數加減概念的理解。

貳、文獻探討

一、異分母分數加減的數學概念

在十二年國教數學領域課程綱的學習內容 N-5-4(異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。)中，除了提及學童在用通分做異分母加減與比較前，需先理解用擴分、約分求等值分數的意義，而不是只是流於計算規則。另外，也不鼓勵學童在做通分時，直接將分母相乘，而是希望學童使用因倍數的概念去理解通分的做法。

二、國小分數之相關研究

李國家、劉曼麗（2012）分析低成就國小五年級低成就學童在分數上的迷思概念，發現學童因未掌握分數部分與整體的關係，所以僅依分子或分母做兩異分母分數大小的比較與加減。另外學童無法在分數的圖形、文字描述、數字之間做轉換，當題目敘述未有任何分數時，如：10 塊披薩，平分成 5 份，學童會直接以題目的整數值尋找答案。研究者也發現學童在做異分母的加減問題時，會受新的經驗影響，導致解題錯誤。

根據廖岳祥等人（2015）將試題分為三個概念探討學生答題之表現，在「單位分數」概念中，發現學生可能因為過去學習分數時，習慣將單位內容物視為「1 個物件」，導致在解題時，無意識地預設題目中的單位內容物為單一個體。此外，他們在閱讀文字題時可能忽略了題目中的關鍵資訊或未能正確理解題意，進一步造成解題錯誤。在「分數的比較」概念中，在比較單位分數大小時，學生僅依分子或分母的數值進行比較，導致解題錯誤。

方文邦、劉曼麗（2013）探討四年級低成就學童迷思概念及其成因，在分數的意義方面，學童常因對分數的「部分與整體關係」認識不足，而導致答題錯誤。另一個常見問題是，學童傾向於將圖形的分割數直接視為分母，而忽略分母表示的實際意涵。此外，在等值分數的理解上，學童對於分數名稱與實際數量的等值性認知不足，無法在題目給出的圖形與符號間進行正確的轉換，進而產生錯誤。而在同分母分數計算方面，學童僅依靠記憶口訣「分母不變，分子相加或相減」，導致直接將減數的分子減去被減數的分子的解題錯誤。

表 1 學童在學習分數上的迷思概念

受整數經驗影響	受新經驗影響
(1)無部份與整體的概念 (2)忽視或認錯單位量 (3)僅依分子或分母的數值進行比較，視兩者為分開的兩數 (4)在大於 1 的情況下，將圖形分割的總數量當成分母 (5)計算時，不管其為被減數或減數，全部以分子大的數減去分子小的數	使用分數乘法的算則解決異分母分數的加減問題。
無法在多種表徵(符號、圖形、文字)上做轉換	

由不同的學者的研究可以看出，學童產生的錯誤概念多受到過去整數的規則經驗，以及在同分母分數的加減經驗影響下，直接套用在異分數的加減與比較之中。另外在學完異分母分數的加減後，會學習分數的乘除，學童也可能受到新經驗的影響，未理解背後的意義，直接用分數乘法的計算規則套用在異分母分數的加減問題上。最後也有學者發現學生對於分數的意義的不理解，導致學童無法在不同的表徵上做轉換。本研究會以上述迷思概念作為試卷題型的設計依據，並分析個案學童的解題情形，將學童的迷思概念做分類，並觀察是否有不同的迷思概念與計算方式。

參、研究設計

一、研究方法

本研究採取「個案研究法」，藉由研究者自編的測驗，探討個案學童在異分母加減之迷思概念，並蒐集相關資料進行分析，以據此設計學習扶助的教學活動。

二、研究對象

本研究對象為雲林縣沿海地區某國小六年級學生，並且為研究者任教之學習扶助班個案學童。依據「教育部國民及學前教育署」112 學年度國小學習扶助五年級篩選測驗之測驗結果，班上共有三位學童未通過測驗，研究者再測驗報告中，挑選出在分數題型錯誤率較高的兩位學童做為研究對象。

三、試卷題型

本研究依學習內容 N-5-4，測驗內容主要包含四個子概念，因同時想探究學童對於文字、圖像、符號表徵的轉換，將題型分成文字題、圖形題、純計算題三種，共 14 題。有經由二位數學教育專家以及一位資深教師針對試卷內容進行檢視，具備專家效度；試卷的內容分析與相對應的分數概念，如表 2。

表 2 試卷內容分析

概念	大題	小題	題型
利用擴分找等值分數	一	1	文字概念題
		2	文字題(真分數擴分找等值分數)
	三	1	圖形題
利用約分找等值分數	二	1-(1)	純數字題型(真分數約分找等值分數)
		1-(2)	純數字題型(帶分數約分找等值分數)
	三	2	圖形題
通分做異分母大小比較	四	1	純數字題型(真分數比大小)
		2	純數字題型(假分數與帶分數比大小)
	五	4	圖形題
通分做異分母加減法	二	2	純數字題型(真分數+真分數)
	三	3	圖形題
	五	1	文字題(題目敘述有不需用到的資訊)

2	文字題(題目不會直接給分數)
3	文字題(帶分數減真分數，需退位)

肆、研究結果

一、個案學童的迷思概念

以下是根據「利用擴分找等值分數、利用約分找等值分數、通分做異分母大小比較、通分做異分母加減」等四個子概念，針對個案學童所呈現的迷思概念進行說明。

(一)利用擴分找等值分數

1. S1 學童對於文字敘述中，擴分與等值分數的意義不理解。

T:請問妳怎麼會選擇變大兩倍這個選項?

S1:嗯……因為題目說乘以 2，所以答案會變大 2 倍。

T:但題目是說分子和分母同乘以 2 耶!再選一次，妳會改變你的答案嗎?

S1:那應該是 4 倍，因為分子乘以 2，分母也乘以 2，所以 2×2=4。

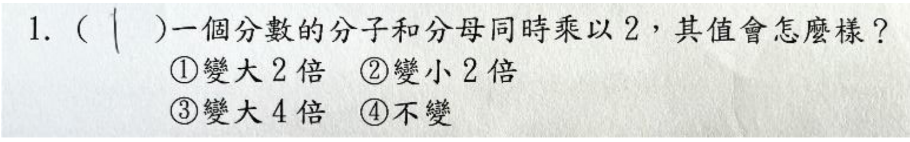

1. (|)一個分數的分子和分母同時乘以 2，其值會怎麼樣?
①變大 2 倍 ②變小 2 倍
③變大 4 倍 ④不變

圖 1 S1 在利用擴分找等值分數的錯誤類型

(二)利用約分找等值分數

1. S1 學童無部分和整體概念，將「每 2 段當成一份」的意思，轉換成圖形時，忽略未塗色部分，僅將塗色部分做結合，並依據題目的「每 2 段當成一份」視「2」為分母。

T:題目要我們做什麼知道嗎?

S1:就 2 段變成一份，然後看圖色部分啊!

T:那妳能在圖上畫出什麼是每 2 段分成一份嗎?因為題目有說要畫畫看，妳沒有畫。

S1:(將塗色部分每兩段畫起來，未圖色的沒有畫)

T:那請問妳，妳的答案怎麼來的?

S1:就圖色部分畫起來後被分成 5 份，然後題目說每兩段分一份，所以答案就$\frac{5}{2}$

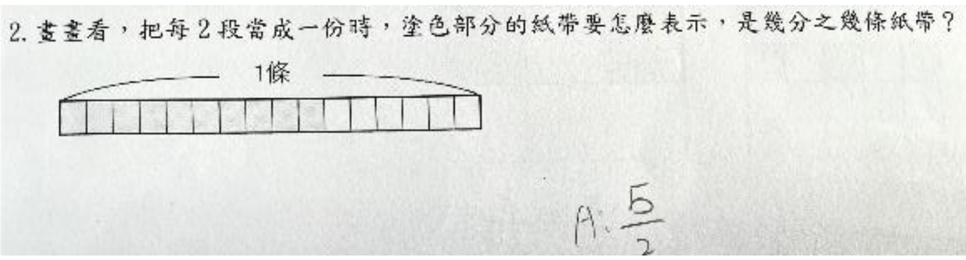


圖 2 S1 在利用約分找等值分數的錯誤類型

2. S2 學童未理解題意，認為「每 2 段當成一份」就是再多一條一樣的圖形，接著不知下一步應怎麼做，因此此題未作答。

T:這題妳沒有作答，妳有哪邊不懂嗎?

S2:我看不懂那個圖。

T:那妳了解題目的每兩段當成一份的意思嗎?妳試著畫畫看。

S2:(又畫出一條一樣長的線段)這樣兩段一份。

T:那再來圖色部分是幾分之幾?

S2:阿……我不知道。

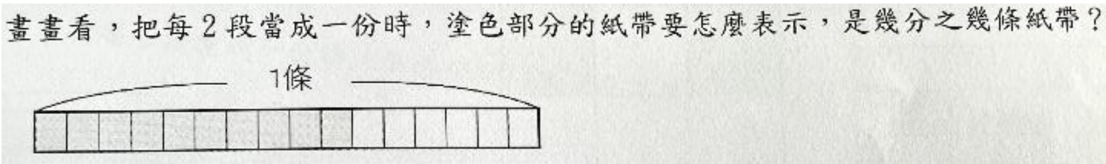


圖 3 S2 在利用約分找等值分數的錯誤類型

(三)通分做異分母大小比較

1. S2 學童認為分母較大的分數就可能比較大。

T:這題是怎麼做的？

S2:因為分母比前一個大，所以後面的比較大。

T:那如果請妳紀錄做法，妳會怎麼做？

S2:換成同分母啊!

T:但妳沒有做紀錄耶。

S2:因為分母乘在一起數字會很大，我就直接判斷了。

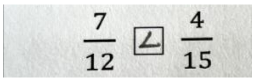


圖 4 S2 在通分做異分母大小比較的錯誤類型

2. S2 學童習慣將帶分數變為假分數再進行通分比大小而容易看錯數字或計算錯誤。

T:像這題妳就有變成同分母來比大小，但妳檢查一下算式跟答案。

S2:(看了一下)啊…我答案寫反了。

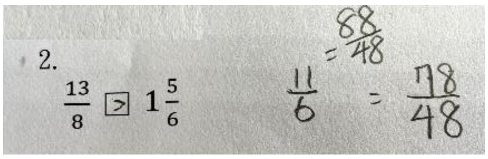


圖 5 S2 在通分做異分母大小比較的錯誤類型

3. S2 學童因看到題目的圖形切割的方塊不一樣大，未理解能用分數來表示塗色部分大小並進行比較，因此不知道如何做比較。

T: 這題的題目看得懂嗎？

S2:題目問塗色部分誰比較多？

T:那應該怎麼做呢？

S2:從圖上看不出來啊。

T:那如果請妳分別用分數表示這兩個圖的塗色區塊，妳知道分別是多少嗎？

S2:(數格子) $\frac{6}{24}$和$\frac{2}{6}$。

T:那你知道哪個圖色部分佔比較多嗎？

S2:變同分母比啊。

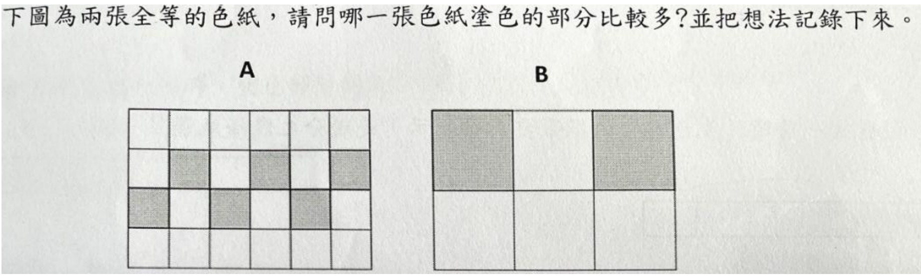


圖 6 S2 在通分做異分母大小比較的錯誤類型

(四)通分做異分母加減法

1.S1 學童無法順利將文字敘述轉換成分數的形式。

T:妳可以解釋一下妳的算式嗎?

S1:就是 4 除以 8 變$\frac{4}{8}$，8 除以 15 變$\frac{8}{15}$，然後是問相差多少公斤，所以把兩個數相減。

T:那為什麼一袋燕麥的重量是用 4 除以 8?

S1:嗯……我也不知道，我就覺得是 4 除以 8。

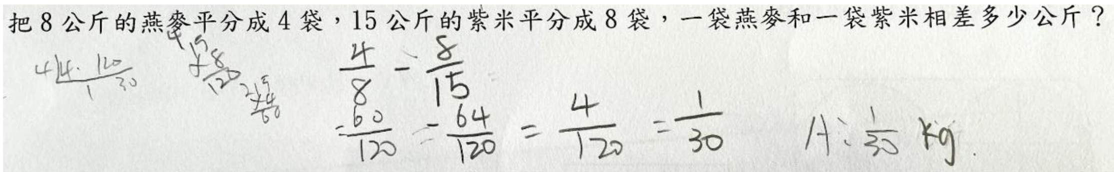


圖 7 在通分做異分母加減法的錯誤類型

2.S2 學童未清楚理解題意，對於題幹中看到的資訊都列於算式中，且無法正確計算整數與分數的加減。

T:請妳解釋一下妳的算式。

S2:因為一包巧克力 15 塊，有 4 包所以可以算出四包有幾個?(前面 4×15 的部分)

T: 那後半部的算式是什麼意思？

S2:把他們兩個拿走的包數加起來。

T:所以妳把四包有幾顆和兩個人拿走的包數加起來要算什麼呢？
S2:這樣就能算出兩人共拿幾包巧克力。

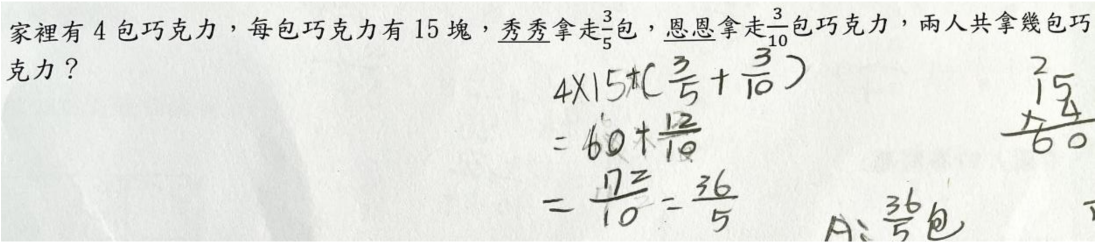


圖 8 在通分做異分母加減法的錯誤類型

3. S2 學童無部份與全體概念，將塗色部分和未塗色部分分別看成分子和分母
T:這題請妳解釋一下算式。
S2: 一個圓六等分(指黑色的部分)，然後兩個(白色部分)沒有分到，所以是$\frac{2}{6}$(第一個圖)，然後第二個圖有 5 個黑色，1 個白色，所以是$\frac{1}{5}$，再通分變成$\frac{8}{15}$。

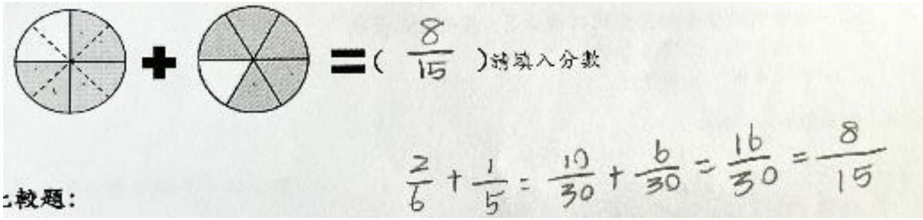


圖 9 在通分做異分母加減法的錯誤類型

二、個案學童在異分母分數加減的計算方式

1. S1 學童在做異分母分數的加減與比較時，皆會使用短除法找最小公倍數進行通分

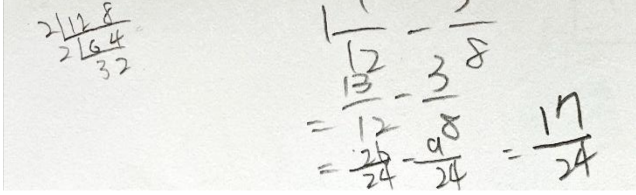


圖 10 S1 學童在異分母分數加減的計算方式

2. S2 學童在做異分母分數加減的通分時，將不同的分母相乘來做通分。

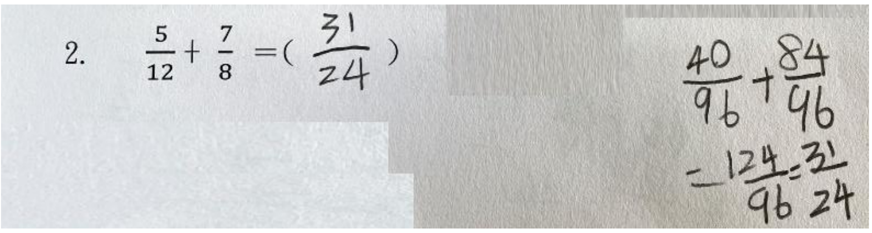


圖 11 S2 學童在異分母分數加減的計算方式

3. S2 學童認為一定要先將帶分數換成假分數才能做約分。

T:這題妳是怎麼做的?

S2:就先變成假分數，然後再約分。

T:那這個帶分數不能直接約分嗎?

S2:不行啊，要變假分數才能約。

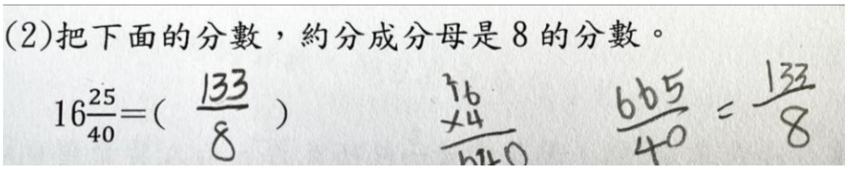


圖 12 S2 學童在異分母分數加減的計算方式

三、教學活動的設計

1. 活動設計發想

根據訪談後學童所呈現的迷思概念可以發現，兩位學童因對於異分母分數的意義不了解，所以在文字與圖形題轉換成分數符號表徵上出現許多不一樣的想法，導致解題困難。研究者認為在教學上可以藉由多元的表徵讓學童去了解異分母分數加減的意義，其中讓學童說出自己的想法非常重要，可以利用孩童喜歡聽故事的天性，佈置他們感興趣的情境，結合數學概念，讓學童能自然的產生溝通、討論，將數學說出來(鍾靜，2012)，以此了解學童的概念理解。

因此研究者以數學漫畫「數學除妖咒術師:千年松數的洗腦」的故事內容作為教學活動情境，並結合多元表徵的轉換，設計出故事融入異分母分數加減的學習扶助教學活動。

2. 活動概述

故事內容為學童需要幫助主角們將對抗控制數學妖怪的神仙，並解開謎底。教學活動會依學習內容分為四個子概念，因篇幅的緣故，以下僅依概念說明:

(1) 擴分與等值分數: 幫助主角們解開離散量與連續量的數學問題，並藉由具體表徵引導學童做圖像、文字、數字間的轉換，了解擴分的意義。

(2) 約分與等值分數: 幫助主角們藉由圖像了解約分的意義，並找出分數的多個等值分數，接著解決帶分數的約分。

(3) 通分做異分母大小比較:藉由連續量的物品比較，將文字轉換成圖形和數字，了解通分的意義。
(4) 通分做異分母加減法:協助主角們打敗最後的敵人，根據不同的情境，將文字轉換成分數，並做異分母加減的算則。

伍、結論

本研究旨在探討二位國小數學低成就學童在異分母分數加減之迷思概念，並據以設計學習扶助的教學活動。結果顯示學童主要存在二大類迷思：1.無部分與整體的概念，不了解分數的意義，誤判單位量 2.多重表徵轉換困難，難以在文字、圖形與數字間靈活切換，影響解題表現;此外，學童在計算異分母分數通分時，習慣直接將分母相乘，而非尋找最小公倍數，導致計算負擔增加。

為改善上述問題，本研究嘗試設計了結合多元表徵與故事情境的教學活動，希望能提升學童對異分母分數加減的理解。未來將進一步實施教學，同時評估學習成效並提出具體的教學建議。

主要參考文獻

方文邦、劉曼麗 (2013)。對國小四年級數學低成就學童在分數學習的迷思概念／錯誤類型與其成因之探討。**科學教育月刊，358**，20-35。

李國家、劉曼麗（2012）。探討國小五年級數學低成就學生在分數部分的迷思概念一以異分母分數的比較與加減為例。**科學教育月刊，354**，30-43。

侯慧淳、楊瑞智 (2011)。探討國小學童分數起始概念。**國教新知，58**(3)，2-12。

教育部(2018)。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域課程手冊(定稿版)。** 臺北:教育部。

溫世展 (2011)。融入式診斷教學法對國小五年級學生分數學習成效之探究。**科學教育學刊，19**(5)，383-408。

廖岳祥、吳佩芳、黃順彬、廖晉宏 (2015)。應用診斷數位教學於國小分數學習成效之改善。**國立臺灣科技大學人文社會學報，11**(2)，105-131。

鍾靜（2012）。數學繪本的閱讀與教學。**國民教育雙月刊，52**（3），39-48。

Gupta, D., & Wilkerson, T. L. (2015). Teaching and learning of fractions in elementary grades. *Curriculum & Teaching Dialogue, 17*(1/2), 27-44.

Exploring Misconceptions and Teaching Design in Addition and Subtraction of Fractions with Unlike Denominators

Kai-Cheng Wei[1] Ru-Fen Yao[2]
[1]Tong An Elementary School, Yunlin County
[2]Department of Education, National Chiayi University

Abstract

This study aims to investigate the misconceptions of two low-achieving elementary school students in the addition and subtraction of fractions with unlike denominators and to design remedial instructional activities accordingly. A case study approach was adopted, focusing on two sixth-grade students in a remedial class at a remote elementary school in Yunlin County. Through pre-remedial assessments and interviews, the study identified several misconceptions, including a lack of understanding of the part-whole relationship, frequent misjudgment of unit quantities, and difficulties in transitioning between multiple representations, such as textual, graphical, and numerical forms. Additionally, the students habitually multiplied denominators directly to find a common denominator instead of identifying the least common multiple, thereby increasing their computational burden. To address these issues, this study designed instructional activities incorporating multiple representations and story-based contexts, aiming to enhance students' understanding of fraction operations with unlike denominators. Future research will further implement these instructional activities, evaluate their effectiveness, and provide concrete pedagogical recommendations.

Key words: low-achieving students, addition and subtraction of fractions with unlike denominators, misconceptions, instructional design

運用數學寫作於國小五年級整數四則計算之行動研究

曾品瑄[1]　蘇柏鑫[2]
[1]臺中市烏日區九德國民小學 amy8704090@gmail.com
[2]臺中教育大學數學教育學系 cliffgby@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究以臺中市烏日區某公立國小五年級一個班級為研究對象，採行動研究法，探討實施數學寫作時所遭遇的困境與解決策略，以及學生在解釋型、偵錯型與擬題型數學寫作題之答題表現。研究過程中，透過蒐集學生的數學寫作學習單，分析與歸納研究資料，獲得以下研究結果。

在數學寫作活動的實施過程中，教師面臨多項挑戰。首先，低成就學生常不知如何下筆，為解決此問題，教師在日常課堂中融入數學寫作教學，並於寫作過程中鼓勵學生。其次，寫作活動占用較多課堂時間，因此，教師透過綜合課與彈性課來進行數學寫作，以減少對正課的影響。此外，學生對寫作活動的興趣可能隨時間下降，為提升學習動機，教師需調整自身與學生的心態，使數學寫作活動更具吸引力。最後，學生的書寫內容過於簡略，為改善此現象，教師於寫作前展示優秀範例，並提醒學生寫作時應再次閱讀自己的內容，以確保表達完整。

在解釋型、偵錯型與擬題型三種類型的數學寫作題中，學生普遍認為偵錯型題目最為簡單，因其可直接判斷對錯；解釋型題目則因與課堂學習內容相近，學生多能列出正確算式並加以說明，惟部分學生在闡述算式意義時不夠清晰；相較之下，擬題型數學寫作題對學生而言最具挑戰性，高、中成就學生常出現題目情境不適當或表達不完整的問題，而低成就學生則普遍面臨表達不完整、與題意不符或無法作答的情形。

本研究結果顯示，數學寫作雖能提升學生對數學概念的理解與表達能力，然而仍需教師適時調整教學策略，以克服學生在數學寫作活動中可能面臨的困難。

關鍵字：數學寫作、行動研究、解釋型數學寫作、偵錯型數學寫作、擬題型數學寫作

壹、緒論

一、研究動機與背景

PISA 2022 結果指出台灣學生數學表現平均 547 分，排名第 3 名，相較 2018 年的第五名又更進步了(OECD,2023)。即使成績優異，但數學焦慮卻也高居排名第三。數學焦慮可能來自學生聽不懂課堂內容、先前有考不好的經驗等諸多原因，有研究指出數學寫作可以有效提升數學成績(Bangert-Drowns 等，2004；楊德清、姜淑珍，2008)，加上在讀數學教育研究所的過程中，了解到透過數學寫作，不僅可以幫助學生組織數學概念，也能讓老師一次瞭解二十多位小孩的想法，讓破除迷思可以變得更立即，也讓學生能在作答前多思考，幫助學生提升數學成就，也能減少學生粗心的情況。

因此研究者希望透過運用數學寫作，讓學生能在學習高年級數學時，即使內容較為抽象，但藉由寫作能讓抽象思維在腦中進行組織，並用寫作再次反思

學習內容，希望藉此方法可以有效提升學生成績，並減輕學生的數學焦慮。

數學寫作的研究上，多是研究數學寫作對學生的影響為何(張佾穎，2019；任育萱，2022)，採用的數學寫作形式也有多種（Kenyon, 1989；McIntosh ,1991；Neil ,1996；劉祥通、黃國勳，2005）。若是現場教師希望落實數學寫作於班上，會發現形式、進行時間、寫作方式有許多種，初次使用數學寫作的教師往往會覺得無所適從。因此研究者透過在班上進行數學寫作、讓學生互相學習優良作品、觀察教師解答，並分析班上學生數學寫作答題表現，期許能讓未來教師教學有所參考、後續研究者有所啟發。

二、研究目的

本研究的目的為，了解教師實施數學寫作會遇到的問題及解決策略，及運用數學寫作於整數四則計算單元，學生的學習表現如何，以及運用數學寫作對於學生數學焦慮的影響，並從中省思應用數學寫作於課堂中，教師的教學方式應如何調整。本研究之研究目的整理如下：

(一) 探討數學寫作應用於五年級數學教學的行動歷程

(二) 探討國小五年級 學生在解釋型、擬題型與偵錯型數學寫作題之答題表現

貳、文獻探討

本章文獻探討分為三個部分，第一部分為數學寫作的意義，第二部分為數學寫作的理論基礎，第三部分為數學寫作的類型。

一、數學寫作的意義

2000 年時，美國全國數學教師學會在《學校數學的原則與標準》中再次強調了寫作是溝通中很重要的一環，數學寫作使學生反思自己的解題歷程，協助學生釐清自身的想法並發展更深一層的理解，可以幫助學生鞏固他們的思維（NCTM，2000）。十二年國民基本教育課程綱要在數學領域中所提到：數學是一種語言，因為它連結文字及符號語言，讓我們可以更精確、簡潔地理解生活世界，無論是自然奧秘、社會現象、財經問題，或是科技方面，只要透過數學協助分析，總能找出其中規律。因此，數學課程應達成培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力（教育部，2018）。學生需要在數學課程中藉由溝通、表述傳達自己的想法，而寫作就是一種方式，除了讓學生釐清想法外也能讓學生組織出數學概念，並鞏固數學知識。

一些研究者認為（周立勳、劉祥通，1998；Bangert-Drowns 等，2004；楊德清、姜淑珍，2008），數學寫作活動能夠提高學生數學表現，因此建議在教學活動中加入數學寫作。也有多項研究顯示（Liedtke & Sales, 2001;Baxter, Woodward, Olson, & Robyns, 2002），數學寫作可以幫助學生學習，因為寫作提供學生嘗試的機會，讓學生可以清楚的描述自身的想法與概念，而教師也可以藉由看學生的數學寫作作品可以知道學生的想法。

使用數學寫作有諸多好處，例如：提升學生對數學的理解、讓教師了解學生的學習狀況（Rose，1989）。但在台灣，在課堂中使用數學寫作並不常見，學生對數學寫作的進行方式很陌生，教師不夠了解數學寫作的題目編撰，教科書對於教數學寫作也沒有詳細的指導方針。Elizabeth（2020）的研究表示，學生需要的不僅是數學寫作的機會，當學生被明確教導如何書寫數學寫作時，他們的表現會有所提升。Colonnese（2020）的研究表示數學寫作應該自然融入數學

教學中，以支持數學學習。無論學生的年級高低，如果學生尚未進行數學寫作，教師需要更有意識地示範如何進行數學寫作或是提供學生範例。

二、數學寫作的理論基礎

劉祥通(1997)針對數學與寫作的結合提出以下四個理論基礎說明數學寫作與數學學習的關係，國內外學者亦有相關研究，說明如下：

1.寫作的歷程與解題的歷程相呼應

Hayes & Flower (1980)分析放聲思考原案(thinking aloud protocol)後得出寫作有三種歷程：(1）計劃(planning)：從現有的資料和長期記憶中搜索訊息，並組織出內容。(2）轉譯(translating)：將寫作藍圖變成寫作正文的過程。(3）回顧(reviewing)：透過閱讀、思考與編輯，將正文加以修正。

Polya (1957)在「如何解題」(How to solve it)探討了解題四階段:（1）了解題意：了解已知、未知、與待答的問題。(2）擬訂解題計畫：為解題者探求問題後所擬訂的初步解題策略。(3）執行解題計畫：為解題者經由解題計畫尋找答案的過程。(4）驗算或回顧：解題者檢驗答案合理性與正確性的過程。

由 Hayes & Flower (1980)的寫作三歷程和 Polya(1957)的解題四階段，可以看出寫作和解題思考的心理歷程幾乎是相互對應的。

2.寫作是聯絡不同表徵的活動

Emig (1977)認為以圖形來表徵言語是第一階(first order)思考過程的語言，以寫作來表徵言語是第二階(second order)的思考過程的語言。在學習數學上溝通技巧是相當重要的，寫作可以幫助學生自行連結圖像、符號、文字、物體或心理的不同表徵。學童若能將數學概念放入各種不同的表徵系統之中，並將此概念正確地從一個表徵系統轉換到另一個表徵系統，即表示充分瞭解概念意義。 3. 寫作是建構知識的活動

Borasi、Raffaella 與 Barbara (1989)倡導以寫作帶動學習(writing to learn)的數學學習法，因為學習不是將內心的觀念做簡單的轉譯，看書或是聽講所獲得的知識必須透過討論、重新組織、用自己的語言表述，才能建造出意義，寫作可以讓學生連結已知的知識與正在學習的知識。

三、數學寫作的類型

1. 解釋型寫作：

為了讓學生回顧數學概念，組織已學過的數學知識，而請學生解釋或說明的活動，像是「為什麼除法運算的除數不能是 0？」（劉祥通、黃國勳，2005）。學生透過書寫來解釋數學概念和操作步驟，能讓老師或同學了解學生的思考過程和理解程度（Casa 等人，2016）。

2.偵錯型寫作：

給學生一個有錯誤答案的題目，請學生判斷解答方式是否正確，學生偵錯後將錯誤的理由寫出。這種數學寫作方式目的在增進學生判斷答案合理性的能力，學生由錯誤的解題結果，找出錯誤的理由，並校正錯誤或提出另外的解法（劉祥通、黃國勳，2005）。

3.擬題型寫作：

讓學生將數學概念去編成問題，適用於當教師覺得課程中的數學概念不夠具體、有些抽象，導致學生不能理解，教師就可以透過讓學生擬題來檢驗學生是否習得概念。這種數學寫作方式可以增進學生主動構思數學問題的能力，也能幫助學生理解數學符號所代表的意義（劉祥通、黃國勳，2005）。

4.總結式寫作：

在完成單元教學或數學活動後，請學生寫下他們學會什麼、不懂什麼，目的是透過回顧教學活動，促使學生產生陳述、分析與組織，使學生形成數學概念，也能幫助他們在後設認知能力上的發展（劉祥通、黃國勳，2005）。

參、研究方法與流程

一、研究設計

本研究為實徵性研究，採用 Lewin 的行動研究法（Lewin,1948）。行動研究是將「行動」與「研究」合而為一的研究方法。由實務工作者在實際工作情境中，依據自身所遭遇的實際問題進行研究，過程包括計畫、行動、觀察、反省，透過有系統的方式，解決研究者的實務問題（蔡清田，2000）。

本次數學寫作活動於五年級上學期「整數四則計算」單元進行，本研究在計畫階段設計課程內容、數學寫作題目與選擇數學量表。並在五年級上學期「整數四則計算」單元進行研究。具體實施方式如下：每堂數學課後的彈性課時間，教師讓學生觀摩不同層次的數學寫作範例（包括回答清楚完整的範例與回答較不完整的範例），並引導學生透過適當增補詞句來提升答案的完整性，以培養其數學寫作能力。觀摩後，學生進行個人數學寫作活動。活動總計進行五次數學寫作練習。而教師會在此過程中透過觀察學生上課表現、作答表現，進行反思與調整。

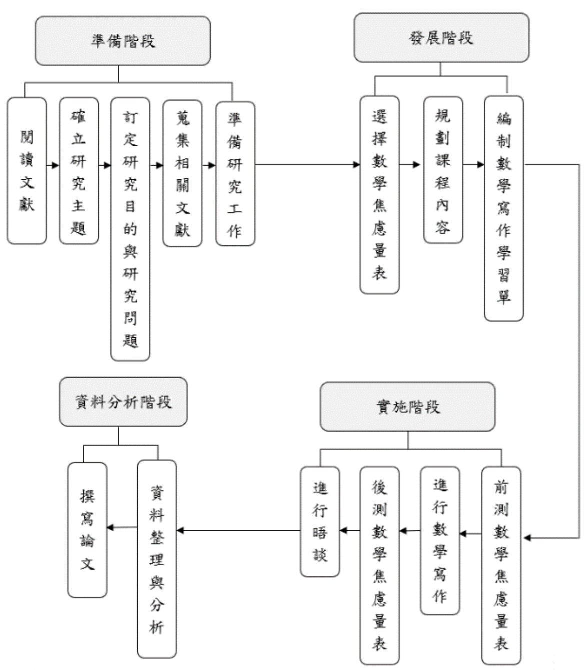
二、研究對象

本研究採方便取樣，以臺中市烏日區某國小五年級的其中一個班級為研究對象，排除一位潛能班學生後，共計 22 位學生，男生 11 人，女生 11 人。該校為一平地市區學校，升上五年級時學校會根據學生的學業成績採 S 型編班，因此各班的程度較平均。

三、研究工具與資料收集

本研究所使用的研究工具為「數學寫作學習單」。數學寫作學習單為研究者自編，題目設計參考教科書，並給學校老師和大學教授進行審題。題目編擬理論基礎建立於劉祥通與黃國勳（2005）所提出數學寫作活動的類型與實例，題型採用其中的解釋型、偵錯型與擬題型。

四、研究流程圖



肆、研究結果

本章研究結果分為兩個部分，第一部分為實施數學寫作活動以提升學生數學素養時所遭遇的問題以及解決策略，第二部分國小五年級學生在解釋型、偵錯型與擬題型數學寫作題之答題表現。

一、實施數學寫作活動以提升學生數學素養時所遭遇的問題以及解決策略

（一）低成就學生不知如何下筆

數學寫作活動中，學生需要先讀懂題目，並思考該用何種方法解答，並在腦中組織後透過畫圖、列算式等方式表達。而低成就學生通常思考時間較久，時常看完題目後還不知道該如何下筆。

為了幫助低學習成就學生能在數學寫作課堂中下筆，因此研究者在課堂中，會一一和學生說明算式中各個數字代表的含義，並寫在黑板，並同步用圖像說明，讓學生透過文字表徵與圖像表徵看見思維的過程。

在學生自行練習數學寫作時，研究者會鼓勵學生參照課本類似的題目，或是可以先判斷偵錯型題目是對是錯，透過幫助學生自行找鷹架以及降低任務難度的方式來降低他們對數學寫作的害怕。

在下一次書寫數學寫作前，事後看範本部分，透過約 15-20 分鐘的時間讓他們觀摩同學的寫法，讓學生透過觀摩不同寫法來學習，期待學生能在書寫的數學寫作單時將解釋寫得更完整，並在擬題時多想想題目情境是否合理。

（二）寫作活動占用時間太長

學期間，在初次進行數學寫作活動時，發現學生寫作速度差距極大，且數學寫作題目有別於一般考試的計算題，學生需要讀懂題意、進行判斷，並寫出原因。因此，對學生來說是很大的挑戰。

因此後來進行數學寫作時，我會趁綜合課、彈性課進行，在完整的一節課中，我會拍下同學的寫作內容並投放在螢幕上，先讓學生判斷同學在前一張數學寫作學習單的回答是好是壞，並說出原因，再讓他們進行數學寫作。因為有更完整的時間，學生可以放心的書寫，並且可以先透過同學寫作內容喚醒他們對數學寫作的了解，也可以讓他們更知道寫作好壞的規準。

（三）學生興趣日漸低落

在初次進行數學寫作時，學生會因為感到新奇而認真閱讀題目並嘗試寫作。不過隨著進行數學寫作的次數逐漸變多，學生的耐心也逐漸下降。

若是能再來一次，我會希望將數學寫作的題數變少，讓學生能好好作答，或是對不同程度學生有不同要求，對部分動機低落的同學可以鼓勵他們僅完成一題就好，如此一來，對學生的負荷便會大幅減輕，讓他們不再感到數學寫作充滿壓力。

在展示學生的數學寫作時，我觀察到學生喜歡看同學的答案，觀摩不同答案對他們來說充滿樂趣。因為說出同學寫作的優點是開放性問題，答案沒有對錯之分，而判斷同學的理由正確與否，更讓他們覺得自己是個小偵探，能讀懂不同的思緒，並針對同學的想法進行解說，是件有挑戰性但非常有趣的活動。

（四）學生書寫時言簡意賅

數學寫作的答題方式和以往學生作答數學題不同，學生需要書寫自己內心的想法。收回來的單子中可以看到學生言簡意賅，或難以辨讀其意思。

當學生交給我後，我會先讀出他書寫的內容，和他說我看不太懂，能不能把意思寫完整？希望學生閱讀後能進行改進。大部分學生在交出學習單前並不會重新閱讀並檢查自己的回答，因此當我請學生把回答寫完整後，學生會拿回

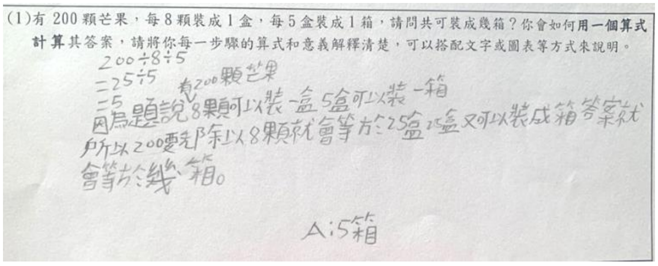
去重新改進，努力把回答寫的通順易讀。

數學寫作的表達方式對學生來說比較陌生，因此我希望他們能透過楷模學習來學習如何寫作，在每次學生完成學習單後，透過展示優良作品，讓學生了解不管是透過圖像或文字都可以說明得很清楚，也讓學生學到他人的表達方式。而實際實行後，也發現學生會學習同學的表述方式，有些原先都用文字描述的同學會開始加入圖示，也有些同學發現自己的解釋很難讓同學看懂意思，因此會把解釋寫得越來越清楚。

二、國小五年級學生在解釋型、偵錯型與擬題型數學寫作題之答題表現

（一）解釋型數學寫作答題表現

在「連除的計算」小節中，解釋型數學寫作題目為「有 200 顆芒果，每 8 顆裝成 1 盒，每 5 盒裝成 1 箱，請問共可裝成幾箱?」班級中有 8 位同學答案正確且解釋清楚，有 8 位同學答案正確但說明不完整，有 2 位同學算式正確但缺少說明，3 位空白，1 位答錯。

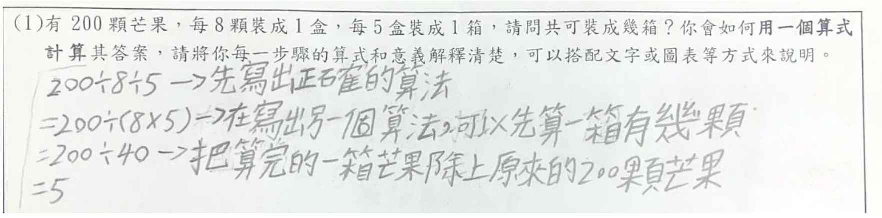

(1)有 200 顆芒果，每 8 顆裝成 1 盒，每 5 盒裝成 1 箱，請問共可裝成幾箱？你會如何用**一個算式計算**其答案，請將你每一步驟的算式和意義解釋清楚，可以搭配文字或圖表等方式來說明。

200÷8÷5
=25÷5
=5 因為題說8顆可以裝一盒5盒可以裝一箱 有200顆芒果
所以200要先除以8顆就會等於25盒 ... 會等於幾箱。

A:5箱

圖 4-2-1　解釋型數學寫作答案正確且解釋清楚

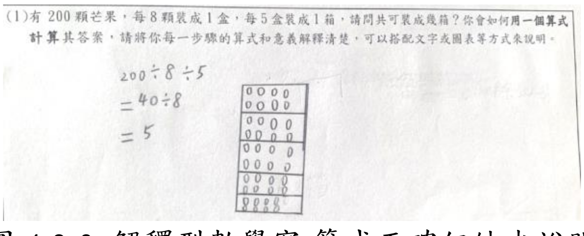
圖 4-2-1 中，學生選擇先算出 200 顆可以裝成幾盒，再算出 25 盒可以裝成 5 箱。兩位學生的計算過程不同，不過透過他們的說明可以知道他們掌握了本小節的概念，能具體的說明出自己的計算過程。


(1)有 200 顆芒果，每 8 顆裝成 1 盒，每 5 盒裝成 1 箱，請問共可裝成幾箱？你會如何用**一個算式計算**其答案，請將你每一步驟的算式和意義解釋清楚，可以搭配文字或圖表等方式來說明。

200÷8÷5 —>先寫出正確的算法
=200÷(8×5) —>在寫出另一個算法，可以先算一箱有幾顆
=200÷40 —>把算完的一箱芒果除上原來的200顆芒果
=5

圖 4-2-2　解釋型數學寫作答案正確但說明不完整

圖 4-2-2 中，可以看出該位學生第一句說明寫「先寫出正確的算法」，但並未寫出為何是這樣列式。不過學生第二句寫出「可以先算一箱有幾顆」，表示學生不僅觀念正確也能用文字進行解釋。第三句學生寫「把算完的一箱芒果除上原來的 200 顆芒果」，說明上應該寫成「原來的 200 顆芒果除以一箱 40 顆芒果」。因此雖然此位同學計算過程正確也試著敘述清楚，但仍有不完整的地方。


(1)有 200 顆芒果，每 8 顆裝成 1 盒，每 5 盒裝成 1 箱，請問共可裝成幾箱？你會如何用**一個算式計算**其答案，請將你每一步驟的算式和意義解釋清楚，可以搭配文字或圖表等方式來說明。

200÷8÷5
=40÷8
=5

圖 4-2-3 解釋型數學寫 算式正確但缺少說明

圖 4-2-3 中，圖旁邊沒有任何文字說明，僅寫出 200÷8÷5 寫成 40÷8，沒有說明自己的圖畫是什麼意思。

（二）偵錯型數學寫作答題表現

在「連除的計算」小節中，偵錯型數學寫作題目為「同學在計算 120÷6÷2

時，將算式寫成 120÷6÷2=120÷（6÷2）=120÷3=40」班級中，有 15 位同學勾選答對且解釋清楚(如：圖 4-2-4)，有 3 位同學勾選答對但說明不完整(如：圖 4-2-5)，有 2 位同學勾選答對但說明錯誤(如：圖 4-2-6)，有 1 位同學勾選錯誤(該學生在底下說明時能指出題目算式的錯誤，屬於粗心勾錯)，1 位空白。

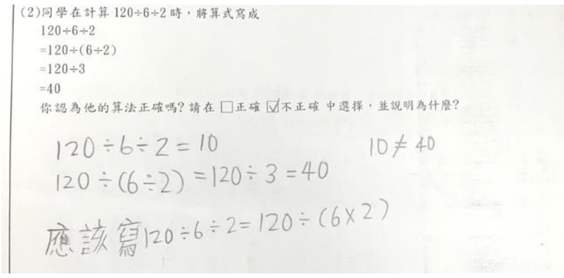

(2)同學在計算 120÷6÷2 時，將算式寫成
120÷6÷2
=120÷(6÷2)
=120÷3
=40
你認為他的算法正確嗎? 請在 □正確 ☑不正確 中選擇，並說明為什麼?
120÷6÷2=10　10≠40
120÷(6÷2)=120÷3=40
應該寫120÷6÷2=120÷(6×2)

圖 4-2-4
偵錯型數學寫作勾選答對且解釋清楚

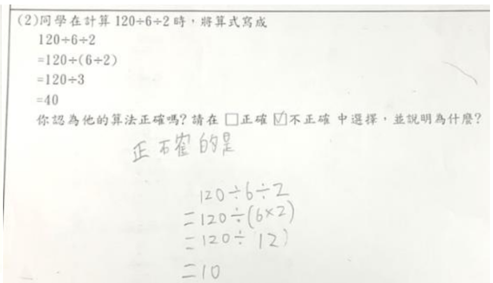

(2)同學在計算 120÷6÷2 時，將算式寫成
120÷6÷2
=120÷(6÷2)
=120÷3
=40
你認為他的算法正確嗎? 請在 □正確 ☑不正確 中選擇，並說明為什麼?
正確的是
120÷6÷2
=120÷(6×2)
=120÷12
=10

圖 4-2-5
偵錯型數學寫作勾選答對但說明不完整

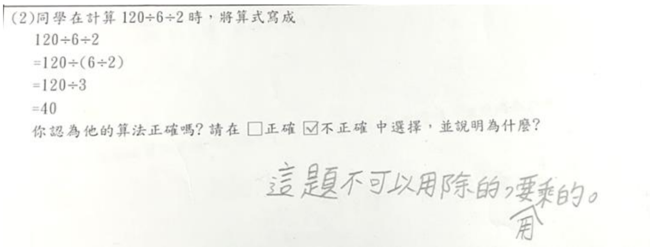

(2)同學在計算 120÷6÷2 時，將算式寫成
120÷6÷2
=120÷(6÷2)
=120÷3
=40
你認為他的算法正確嗎? 請在 □正確 ☑不正確 中選擇，並說明為什麼?
這題不可以用除的，要乘的。

圖 4-2-6　勾選答對但說明錯誤

圖 4-2-6 中，學生寫出因為 120÷(6×2)＝10，但題目是 120÷6÷2，該位學生並未說明這兩個算式的關係，就直接說明 120÷(6×2)，因此該位學生的說明錯誤。

（三）擬題型數學寫作答題表現

擬題型數學寫作題目為「請你設計一個數學題目，這個題目可以用 80÷5÷2 來解答。請將你設計的題目寫下來，並搭配合理的情境與單位。」

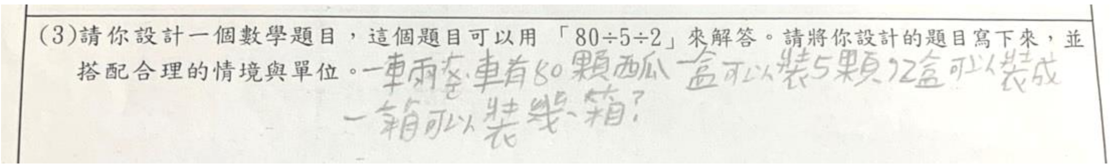

(3)請你設計一個數學題目，這個題目可以用 「80÷5÷2」來解答。請將你設計的題目寫下來，並搭配合理的情境與單位。一車西瓜車有80顆西瓜一盒可以裝5顆，2盒可以裝成一箱可以裝幾箱?

圖 4-2-7　擬題型數學寫作題目適當之範例

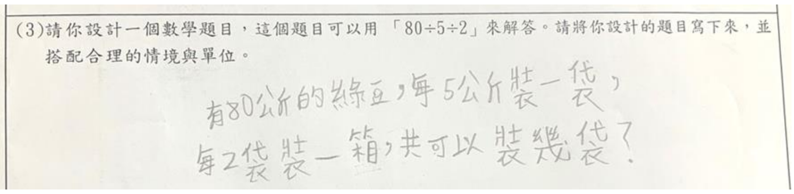

(3)請你設計一個數學題目，這個題目可以用 「80÷5÷2」來解答。請將你設計的題目寫下來，並搭配合理的情境與單位。
有80公斤的綠豆，每5公斤裝一袋，每2袋裝一箱，共可以裝幾袋?

圖 4-2-8　擬題型數學寫作題目不適當之範例

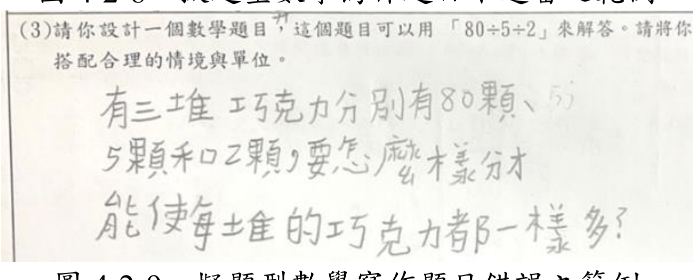

(3)請你設計一個數學題目，這個題目可以用 「80÷5÷2」來解答。請將你設計的題目寫下來，並搭配合理的情境與單位。
有三堆巧克力分別有80顆、5顆和2顆，要怎麼樣分才能使每堆的巧克力都一樣多?

圖 4-2-9　擬題型數學寫作題目錯誤之範例

圖 4-2-7，學生能搭配適合的情境與單位進行擬題。圖 4-2-8，題目是「有

80 公斤的綠豆，每 5 公斤裝 1 袋，每 2 袋裝 1 箱，共可以裝幾袋?」可以看出最後應該要問共可以裝幾箱才對，學生把單位寫錯了。圖 4-2-9，如果依照學生的擬題，算式應該會是（80+5+2）÷3，和題目規定的 80÷5÷2 不一樣。

伍、結論與建議

一、結論

（一）教師實施數學寫作活動時，所遭遇的問題以及解決策略

數學寫作活動期間，發現寫作活動占用時間太長，不適合併入數學課中，且學生書寫簡單不易讀、低成就學生不知如何下筆，加上學生興趣日漸低落，因此教師在平時課堂中融入數學寫作教學，並在寫作前展示優良作品，讓學生清楚該如何寫作。並在綜合課、彈性課中進行數學寫作，寫作時鼓勵學生先由判斷對錯等較容易的地方下手，減低學生的壓力，並請學生再次閱讀自己書寫的內容，改正書寫簡單不易讀的問題。

（二）國小五年級學生在解釋型、偵錯型與擬題型數學寫作題之答題表現

1.解釋型數學寫作題答題表現

高成就學生多能列出正確算式並說明，表達方式多元。中成就學生多能列出正確算式並說明，偶而會有算式的意義說明不清楚、搞錯單位的狀況。低成就學生常是整題空白、有列出算式但不會解釋，大多低成就學生數學概念不完整，無法嘗試表達解題過程。

2.國小五年級學生在偵錯型數學寫作題之答題表現

高成就學生在多能正確判斷題目是對是錯，並能說明原因。中成就學生不見得能正確判斷題目是對是錯，但說明時會嘗試說明清楚，顯示出易有迷思概念。低成就學生不見得能正確判斷題目是對是錯且說明處時常空白。

3.國小五年級學生在擬題型數學寫作題之答題表現

高成就學生在擬題型數學寫作題中多能擬出題目，偶有題目情境不適當或是表達不完全的問題。中成就學生在擬題型數學寫作題中多能嘗試擬題，少數學生可以符合題目限制與適當的情境，大多出現題目情境不適當或是表達不完全的問題，少數會空白。低成就學生在擬題型數學寫作題中通常會空白或是列出與題目限制無關的題目。

二、建議

在進行數學寫作教學前，教師須試寫數學寫作題目，熟悉透過文字表徵與圖像表徵溝通，並於課堂中進行數學寫作教學，讓學生清楚知道數學寫作的表達方式。事前也應設計不同的題目，在學生各自練習數學寫作時，應讓不同程度學生練習適合的數學寫作題目，並鼓勵多次修訂，學生在收到回饋後，修改自己的數學寫作，體驗如何改善表達方式。

研究方面，建議拉長研究時間，避免學生產生壓力。也可以關注數學寫作對學生情意方面的影響，如：數學寫作是否能提升學生自我效能。

參考文獻

任育萱（2022）。以數學寫作教學融入整數四則單元對國小四年級學童學習表現之影響（未出版之碩士論文）。國立臺南大學。

周立勳、劉祥通（1998）。寫作活動對國小學生數學解題能力的影響。教育研究資訊,6（3）,46-62。

教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要：數學領域。臺北市：教育部。

張佾穎（2019）。運用數學寫作於國小六年級學生速率概念學習之行動研究（未

出版碩士論文）。國立臺中教育大學。
劉祥通、周立勳（1997）。數學寫作活動的類型與實例。台灣數學教師（電子）期刊，1，2-11。
劉祥通、黃國勳(2005)。數學寫作活動的類型與實例。台灣數學教師電子期刊,1,2-11 。
楊德清、姜淑珍（2008）。數學寫作融入國三數學課室實踐歷程與影響之研究。科學教育月刊,16（4）,439-458。
蔡清田(2000)。教育行動研究。台北市:五南出版社。
Bangert-Drowns, R. L., Hurley, M. M., & Wilkinson, B. (2004). The effects of school-based writing-to learn interventions on academic achievement: A meta-analysis. Review of Educational Research, 74(1), 29–58.
Baxter, J. A., Woodward, J., Olson, D., & Robyns, J. (2002). Blueprint for writing in middle school mathematics. Mathematics Teaching in the Middle School, 8, 52-56.
Borasi, Raffaella, and Barbara J. Rose (1989). "Journal Writing and Mathematics Instruction." Educational Studies in Mathematics, 20 (November): 347-365.
Casa, T M., Firmender, J. M, Cahill, J, Cardetti, E, Choppin, I. M., Cohen, Cole, S. Colonnese, M. W., Copley, J, DiCicco, M, Dieckmann, J., Dorl, J., Gavin, K, Hebert, M. A., Karp, K. S., LaBella, E., Moschkovich, J. N., Moylan, K., Olinghouse, G.,...Zawodniak, R.(2016). Types of and purposes for elementary mathematical writing; Task force recommendations.
Colonnese MW. (2020) The development of instructional guidelines for elementary mathematical writing. School Science and Mathematics.;120:129–143.Connolly, P., & Vilardi, T. (1989). Writing to learn mathematics and science. New York: Teachers College Press.
Elizabeth M. Hughes & Joo-Young Lee (2020) Effects of a Mathematical Writing Intervention on Middle School Students' Performance, Reading & Writing Quarterly, 36:2, 176-192, DOI: 10.1080/10573569.2019.1677537
Emig, J. (1977). Writing as a model of learning. College composition Communication, 28, p. 122-128.Fast, L.A., Lewis, J.L., Bryant, M.J., Bocian, Hayes, J. R., & Flowers, L. S. (1980). Identifying the organization of writing processes. In L. W. Gregg & E. R. Steinberg (Eds.), Cognitive process in writing (pp. 3-30). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Lewin, K.(1948). Resolving social conflicts. New York: Harper and Brothers. Liedtke, W. W., & Sales, J. (2001). Writing tasks. Mathematics Teaching in the Middle School, 6(6), 350-355.
Kenyon, P. W. (1989). Writing is problem solving. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), Writing to learn mathematics and science (pp.73-87). New York, NY: Teachers College.
McIntosh, D. (1991).No time for writing in your class. Mathematics Teacher, 84, 423-433.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Neil, M. S. (1996). Mathematics the write way: Activities for every elementary classroom. Eye on Education.
OECD (2023), PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education, PISA, OECD Publishing, Paris.
Polya, J. (1957). How to solve it (2nd ed.).Garden City, NY：Doubleday Books. Rose, B. (1989). Writing and mathematics: Theory and practice. Writing to learn mathematics and science, 15-30.

An Action Research on the Implementation of Mathematical Writing in Fifth-Grade Integer Four Operations

Pin-Hsuan Tseng[1]
Po-Hsin Su[2]
[1] Jiude Elementary School
[2]Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

This study examines the implementation of mathematical writing in a fifth-grade class at a public elementary school in Wuri District, Taichung City, employing an action research approach. The research explores the challenges encountered during the implementation of mathematical writing and the corresponding strategies for addressing them, as well as students' performance in three types of mathematical writing tasks: explanatory, error-detection, and problem-posing. Data were collected through students' mathematical writing worksheets, and an analysis was conducted to derive the following findings.

During the implementation of mathematical writing activities, teachers faced several challenges. First, low-achieving students often struggled with initiating their writing. To address this issue, teachers integrated mathematical writing instruction into regular lessons and provided encouragement throughout the writing process. Second, as writing activities consumed a considerable amount of instructional time, teachers scheduled mathematical writing sessions during interdisciplinary and flexible courses to minimize disruptions to regular lessons. Additionally, students' interest in writing activities tended to decline over time. To sustain their motivation, teachers needed to adjust both their own and students' mindsets, making mathematical writing more engaging. Lastly, students' written responses were often overly concise. To improve this, teachers presented exemplary models before writing exercises and reminded students to review their responses to ensure clarity and completeness.

Regarding students' performance in the three types of mathematical writing tasks, they generally found error-detection tasks the easiest, as these only required a direct judgment of correctness. Explanatory tasks were manageable for most students, as they closely aligned with classroom content, allowing them to provide correct equations and explanations. However, some students struggled to clearly articulate the meaning of their equations. In contrast, problem-posing tasks posed the greatest challenge. High- and medium-achieving students often created scenarios that were either inappropriate or incomplete, whereas low-achieving students frequently produced responses that were incomplete, inconsistent with the problem's requirements, or entirely blank.

The findings indicate that mathematical writing can enhance students' understanding and expression of mathematical concepts. However, teachers must continuously refine instructional strategies to address the challenges students encounter in mathematical writing activities.

Key words: Mathematical Writing, Action Research, Explanatory Mathematical Writing, Error-Detection Mathematical Writing, Problem-Posing Mathematical Writing

國小二年級低成就學童數學外加課程舉例能力之教學初探

張娣安[1]　李源順[2]
[1]臺北市立大學數據科學與數學教育碩士在職專班
M11211011@go.uTaipei.edu.tw
[2]臺北市立大學數學系 leeys@go.uTaipei.edu.tw

摘要

本研究目的為探究二年級低成就學童在一個學期融入「讓學生舉例」的外加課程中，其舉例能力的改變情形與改變原因。研究方法採個案研究法，研究對象為三名數學低成就學童。研究過程為在一學期十個單元的內容中，利用每週一節彈性時間的外加課程，對在原班級已經學過的內容，利用學習單融入舉例的問題，培養學生對各單元某概念、內容的舉例能力，同時針對其舉例內容加以引導。資料收集包括學習單、教學拍照錄音、學童訪談，資料的信、效度採用內容效度、專家效度與三角校正法。本研究僅報導整數與運算單元的內容。

研究發現學童一開始僅能簡單的寫出幾個字，到後來能較完整的寫出二步驟加減運算的例子。學童改變的原因在於學生在安全的學習環境中，有機會口述他們的想法，寫下他們的想法。即使他們說得不完整，教師仍加以鼓勵，強化學生的自信心。
關鍵字：舉例、外加課程、低成就學童、國小二年級數學

壹、緒論

一、研究動機與背景

教育部國民及學前教育署（2021）開設外加課程，主要目的是為協助國小低成就學童（林建平，2010）利用彈性學習時間將學習重點重新詮釋，進而轉化為生活功能的學習目標與內容（楊坤堂，1993），使低成就學童能適應班級。研究者為外加課程的支援教師，依據教育部課綱及班級教學進度自行編輯課程教材進行適性教學。根據李源順（2018）營造數學感相關研究，研究者發現運用五核心內涵的教學策略能讓學童對數學算式或概念有生活意義。但是五個核心內涵的學習並非一蹴可及，需長期慢慢培養，其中舉例是讓學生對數學概念有感的最基本方法。李珮瑜（2024）更進一步發現舉例教學使低成就學童能更專注於學業，並且切合生活化教學，例如可以利用算式或概念舉出一個與生活相關的經驗。

因此，研究者提供「讓學生舉例」做為低成就學童做為數學科的學習策略，讓學生對任何數學概念都能舉出生活中的例子，養成舉例能力以及數學在生活的有用性，使學生能終身學習。

二、研究目的與研究問題

本研究目的為在二年級上學期十個單元中，探討三名個案學童舉例能力的改變情形和原因，以及培養察覺生活中數學的能力。依據研究目的，本研究提出下列三項研究問題：

(一）學童舉例能力的改變情形為何？

(二）學童為何會改變舉例的能力？

(三）學童是否可以察覺從生活中的數學？

限於文章篇幅，本文報導數與運算單元的內容。

貳、文獻探討

教育部（2021）十二年國民基本教育課程總綱指出，學校課程特點在素養導向和多元適性，教學實施轉而根據核心素養、學習內容與學習表現，著重學童差異化需求，選用多元且適性的教學策略。國家教育研究院（2025）在數學課程手冊強調提供有感的數學學習，學習目標應根據學童的學習能力發展數學能力，將數學思維應用於實際問題，提升應用能力。總結而言，數學教育應透過適性化教學，著重培養有感的學習，以解決生活情境中的問題，並具備面對未來挑戰的能力。

李源順與林福來（1998）提出數學感（MSE）旨在幫助學童理解數學概念，並結合日常生活經驗及新舊知識，在解決問題時能應用數學知識和做出合理判斷，強調學習過程中，從直觀觀察進入推理，掌握知識結構和應用，運用知識發展數學直覺和推理能力。李源順（2018）更進一步提出數學感教學策略包含「一個啟動機制」和「五個核心內涵」；啟動機制是讓學童表達學習收穫和困難，幫助教師了解學童的學習狀況；五個核心內涵則包括舉例、簡化、畫圖、問為什麼和回想等五項，目的是幫助學生將數學概念與生活經驗相連結，更容易理解數學問題，促使他們將數學知識內化，進而提高學習成效。

在數學學習過程，舉例是非常關鍵的策略之一。Freeman（2005）認為透過具體的實例，學童可以將抽象的數學概念與日常生活中的情境相連結，數學就不僅是符號和公式，也是具備實際意義的知識，並且發現相同的數學運算可以有多種意義與解釋。李源順（2016）提到數學概念往往源自於解決生活中的問題，教師運用舉例作為教學策略，透過舉出與生活相關的例子，可以將數學概念理想化和抽象化，進而強化學生的數學感。在舉例過程中，教師的引導至關重要，能夠幫助學童辨識數學與日常生活兩者概念間的差異，避免迷思和錯誤。對於低年級學童，目前已有多位學者指出舉例教學的成效(請參見表 1)，朱素珍（2014）研究結果顯示，在學習困難的概念時，舉例教學有助於澄清語

意理解，以非例行性問題而提升解題能力和學習成果。林秀玲（2018）研究則提到實驗組學童在根據整數加減法算式舉例能力提升三成。李珮瑜（2024）研究發現實驗組學童經由教師引導可依據列式舉出題目的正確率提高到九成，進而理解算式意義。研究皆指出舉例能力的提升源自於學童數學感表現的提升，且能讓低成就學童增進記憶層次、理解題目、和專注力。

本研究針對國小二年級上學期數學全部十個單元配合舉例學習單進行教學，不同於上述三個研究（朱素珍，2014；李珮瑜，2024；林秀玲，2018）都針對整數加減或乘法等一個單元進行研究。此外，本研究對三位二年級低成就學童進行個案教學，記錄是否了解數學題目意義，並分析討論其成效改變，不同於上述研究是針對整個班級。目前本研究已經完成二年級上學期全部單元的教學、紀錄，限於篇幅，本文僅就其中關於數與加減單元分析學生的數學學習表現。

表 1　國小低年級舉例教學相關研究

論文名稱(研究者，年代)	研究對象/研究主題	研究方法	研究結果
提升國小二年級學生數學加減法文字題題意理解能力之行動研究（朱素珍，2014）	國小二年級學童 20 人 /整數加減法文字題	行動研究法。設計語意釐清、關係釐清與訊息整合等三階段，分析舉例、畫圖教學策略對理解能力的影響。	1. 對比相似詞彙、結構及反轉敘述的句子，有助辨識題意。 2. 將數學概念與生活情境結合，能幫助理解和聯繫學習內容。 3. 同儕討論、舉例和圖示等教學方法，有助於澄清語意理解。 4. 常規性問題有助發展分析能力；非例行性問題能提升解題能力。
五核心融入數單元之學習表現研究（林秀玲，2018）	國小一年級 實驗組 26 人 對照組 49 人 共 75 人 /整數加減	準實驗。透過數學感五核心檢測單前後測檢測數學能力之學習表現。	1. 在舉例、畫圖、問為什麼等三項核心內涵的整數加法與減法能力都有提升。 2. 在概念性及程序性知識均有九成的答對率。
五核心融入數單元之學習表現研究（李珮瑜，2024）	國小二年級 實驗組 12 人 對照組 12 人 共 24 人 /乘法	質性為主、量化為輔。探討問為什麼及舉例融入教學的數學感表現。	1. 實驗組運用數學感五核心學習策略，進步幅度皆高於對照組。 3. 實驗組學童明顯能根據算式舉出例子，且低成就學生能更專注於學業。

參、研究方法

本研究採用質性的個案研究，研究場域為研究者任教的臺北市萬華區某國

小，研究對象為國小二年級學習成績落後的三位學童，他們是因為成績低落而由導師提出進行外加課程，希望能在外加課程中奠定數學基礎以適應原班級的學習。研究者將生活化的舉例問題融入各單元，並設計學習單，以培養學生有感的舉例能力。

外加課程是學生在原班級已經學習過的單元設計相關的學習單，時間安排在晨光時間，每周一次 40 分鐘授課，期間歷經十六周。教學過程則先學童直接書寫數學舉例學習單，研究者扮演偵錯的角色，藉由學習單填答內容，給予學童引導、鼓勵，必要時給與立即性的釐清迷思概念。在此過程中，研究者實地錄音拍照、記錄學童口述，以及師生訪談紀錄等蒐集資料，觀察學童舉例能力的改變，以及是否對數學學習產生興趣。最後分析低成就學童舉例能力改變的原因。

研究者根據二年級上學期使用的教科書單元順序，依照教科書 10 個單元設計學習單並與指導教授討論。學習單內容主要有「舉例問答題」、「重點勾選題」、「圓形臉部圖案」及提問「還有知道什麼？」，本研究主要聚焦分析在「舉例問答集」和「還有知道什麼？」讓學童在空白框格寫下與該單元相關的內容。為了提升本研究資料分析的信效度，本研究針對舉例學習單設計和資料蒐集兩階段，採用內容效度、專家效度、以及三角校正來檢查質性資料的準確性和可信度。資料的相關單位及個人隱私資料皆以匿稱呈現，研究個案學童以 S1、S2、S3 代號表示，避免用實際的班級和座號來呈現，保護研究對象之人身隱私，並維護學術研究倫理。

肆、研究結果

在學習單的使用，剛開始讓學童放聲讀題，引導詢問是否有不清楚意思的地方，教師僅在旁陪伴和等待被需求的協助。學童看懂題目或正確回答，給予立即鼓勵和回饋；若誤解題意或回答錯誤，運用引導替代責備，待其了解後再給予立即鼓勵，並回饋學童比以前更進步了。

一、學童舉例能舉出生活中看到的數字

第一單元「200 以內的數」，剛開始的教學模式主要讓學生了解學習單的呈現方式，以及如何做答。研究者請學童讀題目，再向學童說明框線中的是題目和答案的區域，若有不懂的意思可以隨時發問。例如佈題「生活中在哪裡看過 100~200 的數？」當學生讀到「看到的數是：」，S1 立刻說出：「是 100 到 200 的數嗎?」老師給與肯定，S2 則說「105」，S3 說「150」。當學生讀到「在這裡看到的：」。S2：「在超商看到」，S1：「計算機(看得到)。計算機可以按出 200，表示 200 元」，老師予以稱讚；S3 回答：「在百貨公司的衣服」。最後，老

師再請他們寫到學習單中。

可由下表 2 的書寫結果得知，雖然 S1 在「看到的數」中不清楚要寫其中一個數即可，「在這裡看到的」也能舉出在計算機看到 200 的數。學生可以想到身邊周遭的物品，並說出相關的數。

表 2　舉例學習單第一單元「200 以內的數」學童書寫結果

單元	生活中在哪裡看過 100~200 的數？	
一	看到的數是：	在這裡看到：
S1	200 5 100	ㄐㄧˋ ㄙㄨㄢˋ ㄐㄧ 200
S2	105	ㄎㄚ户的牛ㄋㄞˇ
S3	150	百貨公司的ㄧ元

二、學生能舉出生活中使用加法的例子

第二單元「兩位數的直式加減」，學習單的佈題「請舉出一個生活中的例子，是用 59+49=()算出來的。」學生能寫出生活中使用加法的例子，雖然他們書寫的不像教科書上的提問方式。S1 寫下:「付錢買牛奶和飲料，牛奶 59 元、飲料 49 元。」S2:「買兩樣東西。」S3:「買東西，冰棒 59 元，大瓶飲料 49 元。」

學習單的佈題「什麼時候用加法？或減法？」教師先引導生想看看這週課本講過的題目，發生什麼事情會用到加法？或減法？ S1 寫下:「計時器用掉自己的時間，就像是倒數的時候，看到 20，從一開始中間有 19 分鐘，用減法可以知道。」S2 寫下:「買兩個碗，小的碗是 49 元，大的碗是 59 元，用加法知道一共要花 108 元；100--我的錢，65--花掉的錢，45(剩下的錢)。」S3 寫下:「考試寫錯會扣分，100 分錯一個字扣 1 分，注音錯也扣 1 分。」(參照表 3)

研究發現三位個案一致上都可以運用生活經驗舉出與算式一致的例子。雖然一開始 S2 只寫買二樣東西，但從後面的例子可以發現他能寫出買二個碗所花的錢。同時，即使 S2 在減法問題計算錯誤，但口述「使用減法是在花錢」表示他的概念正確。

表 3　舉例學習單第二單元「兩位數的直式加減」學童書寫結果

單元二	請舉出一個生活中的例子，是用 59+49=()算出來的。		什麼時候用加法？或減法？
	看到的數是：	算出的結果是：	
S1	ㄈㄨˋ ㄑㄧㄢˊ 59 49 ㄋㄧㄡˊ ㄋㄞˇ 十ㄧㄣˇ ㄌㄧㄠˋ	(108)(元)	ㄓ ㄕˊ ㄑㄧˋ 20～1=19 中ㄐㄧㄢ ㄧㄡˇ 19 ㄈㄣ ㄓㄨㄥ

S2	ㄇㄞˇ 2 ㄊㄧˋ 東西	(108)(元)	149 → 小的ㄑㄧㄢˊ +59 → 大的ㄑㄧㄢˊ 108 150 → 我的ㄑㄧㄢˊ −65 → 剩下的ㄑㄧㄢˊ 45
S3	ㄇㄞˇ 東ㄒㄧ ㄒㄧㄠˇ [illegible] 59元 大[illegible] 49元	(108)(元)	[illegible] 寫[illegible]會數分 100 [illegible] 一個 [illegible]

三、學童能舉出二步驟加減問題的例子

第六單元「兩步驟的加減」佈題，「請舉出一個生活中的例子，是用 100−57=(43)，43−25=(18)算出來的。」S1 寫下：「[**扣錢**]我本來有 100 元，扣掉 57 元住飯店剩 43 元後，被罰錢扣掉 25 元等於 18 元。」S2：「[**換獎品**]我有 100 個章，換了 57 個章的小車，再換 25 個章的色紙，剩 18 個章。」S3：「[**一直買東西**]本來有 100 元買了一桶冰淇淋，花掉了 57 元，和買冰棒，還剩下 18 元。」

研究發現，三位學童經過五個單元的學習，他們的書寫愈來愈清晰，同時看到「減法」算式會寫出相符的情境[扣錢]、[換獎品]及[一直買東西]，而 S3 寫出[一直]表示理解連減的兩步驟概念。雖然 S1 說的住飯店 57 元，數值與現實生活不符，但可發現 S1 在口述語調表現自信，充分展現學習意圖，達到課程「自發」的目標(參照表 4)。

在「我還有知道……（和之前學什麼有關？)」的部分，S1 寫下：「我本來有 100 個積木，被拿走 50 個積木，我有 43 個積木又被拿走 25 個，等於 18 個積木。」S2：「我有 100 元又賺到 1 元，去打工又賺到 35 元，共幾元？」S3：「從這裡走到 7 本(7-11)走了 19 步，在再走回家花了 30 步，共走了幾步？」研究發現 S1 和 S2 寫下他們知道的二步驟問題，S3 則寫出以前學的一步驟加問題。

為了讓學生有機會連結先前單元所學的內容，形成一個完整的數學結構。在「和之前學什麼有關？」的問題上，S1 說明和「比大小」有關，S2 說明會「用到前面教的二位數」。S3 說明和「二位數的直式加減」有關。研究發現，學生也能連結先前所學的概念。

同時，S2 學童由原本不善口語回答轉變開始樂於將想法分享給教師和同學，而且三位學童的書寫內容越來越多，形容情境的語句也愈來愈完整。

表 4　舉例學習單第六單元「加減關係與應用」學童書寫結果

單元三	請舉出一個生活中的例子，是用 100−57=(43)和 43−25=(18)算出的	我還有知道：（和之前學什麼有關？）

	在這裡看到：	
S1	在這裡看到： 我本來有100元，ㄇㄞˇ 57元ㄉㄜ˙ㄉㄨㄥㄒㄧ =43元 ㄗㄞˋ ㄇㄞˇ 25元=18元。	ㄉㄚˋ ㄒㄧ 我本來有100個ㄓ木，ㄋㄚˊ走57個ㄓ木，我又ㄋㄚˊ 43個ㄓ木又ㄋㄚˊ走25個ㄓ木=18個ㄓ木
S2	在這裡看到：「ㄕㄤ ㄆㄧㄣˇ」 我有100個ㄒㄧㄣ，ㄇㄞˇ了57個ㄒㄧㄣ的小車， 再買一個25個ㄒㄧㄣ的ㄓˇ ㄓㄨ，ㄕㄥˋ 18個ㄒㄧㄣ。	我有100元，又ㄇㄞˇ 1元，ㄑㄩˋ ㄅㄞˇ ㄏㄨㄛˋ ㄇㄞˇ 35元 ㄕㄥˋ 幾元 (ㄕㄤˋ ㄑㄧㄢˊ的2ㄅㄨˋ)
S3	ㄑㄩˋ 買東西，本來有100元買 了一ㄏㄜˊ ㄊㄧㄠˋ ㄑㄧˊ，ㄏㄨㄚ了57元和一個 ... ㄙㄜˋ ㄅㄧˇ，還ㄕㄥˋ下18元。	從這裡走到7-11(便利商店)走了19 步再走回家ㄧㄡˋ30ㄅㄨˋ，走了幾步？ ② 二ㄒㄧㄥ ㄓ的ㄓㄨㄥ的ㄊ

四、學童舉例能力的改變：在安全、沒壓力的學習環境可以口試、書寫

第一單元學童開始摸索學習單的書寫方法，練習將口語轉為文字，但尚無法跟著自己說出的語句寫出文字，常常漏字或只寫出重點語詞，或講完就忘記想寫下的語句。此時教師仍能肯定學生的回答、書寫，不給與任何的責罰。

第二單元問什麼時候用到加法或減法？當學童思考沒有回答，教師會進一步的提問：「媽媽做什麼事情？或爸爸要做什麼？或你做什麼事情的時候用到了加法？」、「試著看看翻課本的題目，有什麼是你平常會做的？而且是用到加法？」此時學童開始能聯想生活情境，可以說出更多的內容。

進行到第六單元的課堂，學童也能感受到自己的進步。S3 說：「明明題目越來越難，我的分數變高了，是不是因為有來這裡加課？」教師由數學二年級上學期成績與一年級成績相較發現，S3 學期總分數由 94.62 降低至 91.54，但在班排名前進一名，表示學習內容加深卻更加進步，的確與學童感受相符。

研究發現，低成就學童往往理解力不足和評量結果不理想，因此變得更不願意表達。在外加課程中，教師運用安全的學習環境，引導和鼓勵學生，包括「還有什麼呢？」「可以再多寫一點點唷！」或「請問這是什麼意思？」，學童慢慢的增加回答信心，且答題內容也愈來愈豐富。

五、學童可以察覺從生活中的數學

研究發現學童的確是由生活中的數字提出舉例。例如學習單內呈現熟悉的環境在超市買鮮奶，課堂後，研究者實際走訪超市發現 105 元的六目町純鮮奶和賣場見到每件 150 元的亞歸柔棉兒童短 T。

三個單元連續練習的數量加減相關內容，由學習單發現學童可以將算式以文字敘述而達到養成課堂口說舉例的習慣。學生能理解題意，提高學習數學的興趣，教師也更能發覺學童學習困難點。

本研究進行質性分析「舉例」融入外加課程發現低成就學童可以逐漸寫出二步驟加減運算例子，學童將數學概念與生活情境結合，並澄清語意，藉由自我參照幫助理解算式的關係，與朱素珍（2014）提到的結果相符。進一步發現改變原因在於學童在安全的學習環境中口述和寫下想法，即使說不完整，仍被鼓勵強化自信心。

伍、結論與建議

研究結果發現即使是低成就學生，只要給與安全的學習環境，讓學生安心的說出自己的想法，即使說錯也不加以責罰，替而代之的是指導與鼓勵，同時讓學生有表達想法的機會，有將想法寫下來的機會，慢慢的學生可愈寫愈完整，愈寫愈豐富。研究發現，學童的舉例能力也能連結生活中的實例，了解數學在生活中的應用。同時低成就學生分享自己在原班的數學進步情形。

研究過程中發現，雖然學生能舉出加、減法的例子，二步驟的問題，但是學生寫出來的例子，和教科書上的例子不同。教科書的例子是有待解決的問題，例如，S1 的「我本來有 100 個積木，被拿走 50 個積木，我有 43 個積木又被拿走 25 個，等於 18 個積木。」在教科書則是「我本來有 100 個積木，被拿走 50 個積木，又被拿走 25 個，剩下幾個積木?」研究者反思，或許是研究者所列的算式 100-57=(43)和 43-25=(18)從來沒有出現在教科書上，因此學生無法了解算式中，括號的數字是可以不用列在題意之中。同時研究者沒有適時的指導。對於低成就學生的舉例學習，研究者認為或許不應該像中、高成就學生那樣，快速的給予糾正，因此研究者選擇先鼓勵學生的表達與書寫方式，待低成就學生的自信心、學習興趣建立起來以後，再慢慢的讓學生的了解，教科書上的表達方式，使學生能和教科書的實例連結。

數學學習歷程通常由情境中理解、純數字規律練習到超越情境應用等三個步驟，也是學童達到具體到抽象的過程。本研究學習單的「舉出生活例子」到「還有想到什麼」，便是依據此歷程讓學童發展理解抽象數學題的過程；學童從生活找出可以做為舉例的實例，到學會數學舉例的方法，最後學童可以從生活中發現數學的舉例，這個歷程顯示學童可以培養出的是終生學習的能力。

參考文獻

朱素珍（2014）。**提升國小二年級學生數學加減法文字題題意理解能力之行動研究**。國立台中教育大學，臺中市。

李珮瑜（2024）。 **五核心融入數單元之學習表現研究-以二年級乘法單元為例**。臺北市立大學，臺北市。

李源順（2016）。**數學教師知識網/如何營造學生的數學感?**。臺北市。2024/12/26 檢自 https://mtedu.utaipei.edu.tw/forum.php?mod=viewthread&tid=2426&extra=page%3D1。

李源順（2018）。**數學這樣教：國小數學感教育**。臺北市：五南出版社。

李源順、林福來（1998）。校內數學教師專業發展的互動模式。**師大學報：科學教育類，43（2）**，1-23。

林秀玲（2018）。**五核心融入數單元之學習表現研究—以一年級整數加減法為例**。臺北市立大學，臺北市。

林建平（2010）。低成就學童的心理特徵與原因之探討。**國教新知，57（1）**，44-51。

國家教育研究院（2025）。**國民中小學暨普通型高中數學領域課程手冊**。新北市檢自數學領域課程手冊。

教育部（2021）。**十二年國民基本教育課程綱要總綱**。教育部國民中小學課程與教學資源整合平臺檢自 https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=11&mid=12502。

教育部國民及學前教育署（2021）。**十二年國民基本教育特殊教育課程實施規範**。優質特教平台檢自 https://sencir.spc.ntnu.edu.tw/GoWeb/include/index.php?pageNum_content01=4&totalRows_content01=35&Page=6-C-4。

Freeman, R. (2005). *Creating learning materials for open and distance learning: A handbook for authors and instructional designers.* CANADA: Commonwealth of Learning (COL).

A Pilot Study on the Mathematics Exemple-Giving Ability of Underachievers in the Second Grade of the Elementary School Extra-Curriculums

Ti-An Chang[1] Yuan-Shun Lee[2]
[1]Master's Program of Data Science and Mathematics Education for In-service Adults
[2]Department of Mathematics, University of Taipei

Abstract

The purpose of this study is to explore the changes in mathematics example-giving ability among underachievers in the second grade students after participating in extra-curriculums incorporating "student giving example" over the course of a semester. The research adopts a case study method, targeting three low-achieving mathematics students. The process involved using one flexible lesson each week, across ten units in one semester, to revisit content already learned in their original class. Worksheets integrating example-giving questions were employed to develop students' ability to provide examples related to specific concepts and content of each unit. At the same time, their example-giving content was guided and improved. Data collection included worksheets, teaching recordings, and student interviews. The reliability and validity of the data were ensured using content validity, expert validity, and triangulation. This study focuses solely on the content of the unit on integers and operations.

The findings reveal that, initially, students could only write a few simple words. Over time, they progressed to providing more complete examples involving two-step addition and subtraction operations. The reasons for this improvement include a safe learning environment where students had the opportunity to articulate and write down their thoughts. Even if their expressions were incomplete, teachers offered encouragement, boosting the students' confidence.

Keywords: giving example, extra-curriculum, underachiever, second grade math.

診斷教學應用於數學分數單元教學成效之研究

邱子倫[1]　李源順[2]
[1]新北市土城區樂利國民小學 m11011110@go.utaipei.edu.tw
[2]臺北市立大學數學系 leeys@go.uTaipei.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討診斷教學應用於國小四年級數學分數單元教學之成效。本研究探詮釋性研究法。研究對象為四年級 24 位學生。分數單元內容包括帶、假分數及其互換、大小比較。研究過程先文獻探討相關迷思概念，再設計評量試題診斷學生的迷思概念，進行診斷教學，再探討教學成效。資料收集與分析包括前、後測問卷，教學錄影。信效度採內容效度、專家效度與三角校正。本文僅報導學生的學習成效。研究結果發現學生在帶分數的定義及判別的表現平均得分從 0.08 分(4%)進步到 1.13 分(56.5%)，同分母帶分數與假分數比大小的表現平均得分從 0.5 分(25%)進步到 1.71 分(85.5%)，同分母分數加法的表現平均得分從 1.63 分(81.5%)進度到 2 分(100%)，同分母分數減法的表現平均得分從 1.29 分(64.5%)進度到 1.67 分(83.5%)，帶分數的整數倍計算的表現平均得分從 0.08 分(4%)進步到 1.58 分(79%)。以成績總分 28 分，學生平均得分從 11.7 分(41.8%)進步到平均得分 17.8 分(63.6%)，整體表現有進步。

關鍵字：診斷教學、分數單元、迷思概念、錯誤類型

壹、緒論

一、研究動機

許多研究指出，分數是數學與日常生活中的重要概念，但學生在學習時往往面臨挑戰，無論是在定義、理解或圖像表徵方面，都容易出錯。根據研究者的教學經驗，不論處於哪個學習階段，分數單元對多數學生而言都是較具挑戰性的內容，通常需要投入更多時間才能真正理解。

然而，在課堂中，由於時間與空間的限制，教師難以全面提供符合不同學生需求的差異化教學素材。此外，即使是相同的題目，學生的錯誤類型也可能大不相同，因此教師可以透過整理與分析學生的錯誤表現，歸納出不同的錯誤類型，進而在補救教學或未來課程設計中，針對這些問題進行更有針對性的教學與引導。

因此，期望教師能在課堂活動中融入診斷教學的設計，不僅幫助學生掌握計算程序上的知識與能力，建立正確的概念性理解，以及學生在未來學習分數單元的過程中能夠更加順利。

二、研究目的

本研究目的旨在探討診斷教學應用於國小四年級數學分數單元教學之成效。研究問題為：國小四年級學生在分數單元診斷教學前後學習成就表現為何？以及迷思概念為何？對於教師使用診斷教學的建議。

貳、文獻探討

一、分數單元

根據十二年課綱分數的學習表現，能找出與四年級且與研究主題相符的指標「n-II-6 理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意　義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義」。而依所使用的教材彙整出本次研究單元「分數」，單元目標包括(1)認識真分數、假分數和帶分數的意義(2)能做假分數和帶分數的互換(3)能做同分母分數的比大小(4)能解決同分母分數的加減問題(5)能解決分數的整數倍。因此對應十二年課綱相符應的學習內容為「N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。」

本研究將聚焦在真分數、假分數、帶分數的判別，假分數和帶分數的互換與同分母分數的比大小，同分母分數的加減計算。

二、錯誤類型

錯誤類型分析透過學生的作業樣本，研究其在數學解題過程中出現的系統性錯誤與策略偏誤，並對錯誤進行分類，以作為改進教學的參考（Ashlock，2006）。Ashlock 將學生的計算錯誤分為系統性錯誤與隨機性錯誤。系統性錯誤指學生在相似情境下反覆出現的穩定錯誤，通常源於對數學概念或運算規則的誤解。例如:學生可能誤以為分數加法時應將分母相加，導致錯誤答案。隨機性錯誤則是偶發性的，如粗心計算或一時疏忽所致，例如抄錯數字或漏寫運算步驟。數學學習中的錯誤可能來自概念性知識誤解、計算程序錯誤或解題策略不當。透過識別這些錯誤類型，教師可以針對學生的學習困難進行調整，進而提升數學教學的有效性。

三、迷思概念

迷思概念是指學生因個人認知程度與先備知識的差異，與教師或專家的概念不同，導致學習困難（梁鉅娟，2011）。在概念學習過程中，部分學生可能因理解偏差而產生錯誤，影響學習成效（李源順，2021）。所以迷思概念正是學童學習新知時，是以自己本身的學習經驗所積累的認知去認識新概念，而形成了學習不利情況導致產生錯誤，而這樣的錯誤被稱之為迷思概念。

學生學習分數基本概念的迷思主要有二，一是忽略單位量，二是受分子或分母控制（李源順，2021）。例如:分數比大小時，學生會認為分母較大的分數值較大，$\frac{1}{8}>\frac{1}{4}$，因為 8>4，學生有整數比大小的先備知識，並且用於分數的比大小。或是分數加減時，學生會分子與分母都相加，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$。

而在錯誤類型上，多是學生在解題時因推理錯誤、計算疏忽或策略選擇不當而產生的具體錯誤。例如:分數比大小時，學生認為$\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$的原因是分子相比 2>1，分母相比 3>2，卻沒有真正進行通分後再比較。分數加減時，會分子與分母都相加忘了通分，$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$。在課堂上，教師可以透過詢問學生「為什麼？」或「說說看你是怎麼想的？」來了解他

們的思考歷程。即使學生的答案看似相同，但其思考過程可能不同，有些可能源於迷思概念，而有些則可能只是計算錯誤。

三、診斷式教學

診斷教學理論源於皮亞傑的認知發展理論，強調從學童的知識基模出發，透過學習過程中的認知衝突，引導學生調適迷思概念，建構新的知識結構（Bell, 1993）。診斷教學是解決學生迷思概念的重要策略，數學教育研究普遍認同其有效性（Bell, 1993）。教師透過診斷學生的學習困難，設計能引發認知衝突的教學活動，以幫助學生修正錯誤概念（梁惠珍、劉曼麗，2005）。研究者本次探討學童在分數單元中的迷思概念，並透過診斷教學進行補救。

診斷教學強調教師需先了解學生的學業缺陷，再規劃補救策略。多位學者（林福來、黃敏晃、呂玉琴，1996））運用診斷方法於數學教學，結果顯示該策略能有效改變學生的迷思概念。國內外研究亦積極探討診斷教學，證實其在幫助學生習得正確概念方面的價值。

此外，李源順與林福來（1998，2000）研究發現，教師在應用診斷教學後，不僅能提升自身教學覺察力，還能有效協助學生克服迷思概念，使教學更具針對性與成效。

研究者整理歸納出診斷教學的精神為透過教師發現學生的迷思概念，藉由教學法破除學生的迷思，並建立正確認知。診斷教學的關鍵步驟有三: (1)學生錯誤概念的呈現(2)教師製造學生認知衝突(3)澄清迷思概念建構正確認知。

五、分數的診斷教學相關研究

分數概念是數學學習中重要的角色，但是也有許多學生在學習分數時容易出現困難。研究指出，學生的錯誤類型多樣化，包括對分數的基本概念、圖形表徵、運算規則的誤解等，在這樣的背景下，診斷教學是可以成為改善學生學習困難的重要方法。

陳明宏、呂玉琴(2005)的研究「國小四年級學童分數概念之診斷教學研究」中，其研究為準實驗設計，選定一整個既有班級為實驗組，並選擇另一整個既有班級為控制組，研究方法採教學實驗法，控制組採用小組討論式教學法，實驗組採用診斷教學法，研究結果呈現在相同教學時數、相同任教教師之下，從實驗組學童在分數概念課堂表現及二組學生在分數概念後測試題之表現、學校期中評量的分數試題之表現的研究結果來看，診斷教學的教學成效優於小組討論式教學的成效。

梁鉅娟(2011)的研究「新北市國民小學實施「攜手計畫-課後扶助」方案之行動研究-以數學分數與小數單元診斷教學為例」，其研究對象的學校與本研究對象的學校是同學校，差別在於前者的研究對象為低成就的學生，本研究對象則為一個普通的班級。其研究結果為學生在「簡單分數的意義」;「等分概念一半的意義」;「分數單位量的部分/全部」;「小數意義與分數互換及分辨 0.1 與 1 的關係」;「小數應用的計算」皆有明顯進步。但是，部分學生對「等分概念」、「分數單位量」、「等值分數」及「小數應用」等題意比較複雜者仍然無法克服。另外，少數學生在分數的數字常識之培養仍嫌不足。

文獻上發現有針對分數概念進行診斷教學研究（梁鉅娟，2011；陳明宏、呂玉琴，2005），有針對小數進行診斷教學研究（梁鉅娟，2011）。有針對一般學生進行研究（(陳明宏、呂玉琴，2005），有針對學習成就低落學生進行研究（梁鉅娟，2011）。較少針對帶、假分數定義、互換、大小比較，以及同分母分數的加減、帶分數整數倍進行診斷教學研究，故本研究主要以其中的假分數和帶分數定義、互換、大小比較，以及帶分數整數倍計算進行探究。

參、研究方法

一、研究設計

本研究是以小學四年級學童為對象，研究者同時擔任教學者。先收集分數單元迷思概念的相關文獻，再以研究對象的學習教材找出相符應的活動設計施測題目，於教學前透過前測彙整學生在分數單元的迷思概念後。再以研究者的班級作為研究對象進行診斷教學，透過教學設計，在學生的迷思概念中製造出認知衝突，透過討論與回饋，協助學童建立新的認知。最後以後測進行分析，探究學生在分數單元的學習成就改變情形。所以本研究以詮釋性研究方式找出並理解學生學習上的困難處，探討研究者透過診斷教學法，指導學童在分數單元中的迷思概念，及收集相關研究資料進行分析及詮釋，不斷的改進與反思，是否能提升學童在數學分數的單元之學習成就。

二、研究工具

本研究的研究工具主要為參考學生所使用的課本與《數學這樣教：國小數學感教育》（李源順，2021）中的分數相關內容，透過文獻分析及專家教授的指導，編制分數單元含迷思概念的前、後測試題內容進行自編的試題。接著，在該單元實施教學前先進行前測，前測主要目的為蒐集學生在分數單元的錯誤類型與迷思概念。前測後，與專家教授討論並設計診斷教學教案，在教學過程中透過錄影進行紀錄，並於教學結束一週後實施後測。最後，對研究者班級的後測結果進行分析，以檢視學童在接受診斷教學後的學習成效提升情形。

根據本研究單元為分數單元，與前測施測結果及診斷教學進行教案設計。教學單元名稱為「分數」，以四個教學活動進行設計，分別是「認識真假分數、帶分數」、「假分數帶分數互換與比大小」、「同分母分數加減」、「分數的整數倍」。

三、資料分析與處理

(一）資料蒐集

本研究主要分析的資料為研究對象的前後測卷、研究者的教學錄影檔。研究對象以S1、S2……作為學生的編碼。前測結果主要作為找出分數單元迷思概念的資料來源；後測分析主要看整體學生在每個題目中的表現與前測作比較，以及個別學生的成就差異。

(二)前、後測分析

前後測後，依據研究者自編試題評閱規準批閱進行分類。題型有文字說明、繪圖、選擇、計算等，除了選擇題外，各題型評閱計分方式為 2 分、1 分和 0 分，其中 2 分表示正確回答問題；1 分則代表概念正確,但回答問題說明有不清楚或是答案有遺漏，再依不同的錯誤類型進行第二碼的編碼，例如:1a、1b......；0 分則表示回答錯誤，再依不同的錯誤類型進行第二碼的編碼，例如:0a、0b......等；空白沒有作答則以數字 9 作為編碼。

(三)信度與效度

本研究以量化研究為主，質性分析為輔，在量化資料的部分，以本研究單元所設計的前後測卷學生作答內容，而質性部分則以研究者的教學錄影檔轉譯資料以及教學現場的觀察紀錄作為研究輔助資料。

1.信度

為提升研究者的信度，本研究採取多種策略，包含透過標準化的資料收集程序，例如:制定清晰的資料分析標準與施測指導語，以減少變數所導致的誤差，確保測量方式與條件的一致性。此外，研究測量工具由研究者根據文獻分析與專家教授指導編制，並經專家審查，以確保試測題目的專家效度與信度，使其適用於本研究對象與主題。採用多重資料來源進行交叉驗證，除了分析前後測作答內容，亦參考教學錄影檔的轉譯資料、教學現場的觀察紀錄，以提升研究結果的信度，減少單一資料來源可能帶來的偏差，確保研究結論的穩定性與可靠性。

2.效度

本研究透過多種校正方式來提升效度，包括資料三角校正、方法三角校正與研究者三角校正。首先，資料三角校正是指透過不同來源驗證研究結果，以提升研究效度；本研究採用前後測作答內容、教學錄影檔轉譯資料、教學現場觀察紀錄等多方資料進行分析，確保結果的準確性與完整性。其次，方法三角校正則結合量化與質性研究，以不同方法探討相同現象。例如，本研究透過量化的前後測作答內容與質性的教學錄影轉譯資料、觀察紀錄及學生工作單進行綜合分析，以提升研究結果的信度與效度。最後，研究者三角校正指多位研究者對同一資料進行分析，以降低單一研究者的偏誤。雖然本研究僅有一名研究者，但在資料分析過程中，透過指導教授、同校數學教師及共同進修的同學討論，確保分析結果的客觀性與可靠性。

肆、研究結果

透過收集學生前後測驗等數據，歸納出不同的錯誤類型，本篇將從完整的前後測試題中，挑選部分試題進行分析，並驗證診斷教學對學生學習分數有成效，提供未來教學的改進建議，使教師更能掌握學生的學習脈絡。前後測試題為相同題目，共有 14 題，蓊分為 28 分，計分方式為 2 分、1 分、0 分，另有空白無作答以數字 9 作為紀錄。

一、後測總成績較前測總成績有進步

研究對象共 24 人，總得分為 281 分，平均得分為 11.7 分；後測時，總得分為 444分，平均得分為 18.5 分；後測總成績較前測進步。

二、真、假分數與帶分數的定義理解有進步

試題題目是「$\frac{3}{8}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{9}{9}$、$\frac{11}{5}$、$2\frac{3}{4}$、$1\frac{5}{3}$，哪些是真分數？哪些是假分數？哪些是帶分數」，評量目的是依據學習目標「了解真分數、假分數和帶分數的定義」，學生需正確判斷真、假、帶分數。正確答案為真分數有$\frac{3}{8}$、$\frac{1}{4}$，假分數有$\frac{9}{9}$、$\frac{11}{5}$，帶分數有$2\frac{3}{4}$。而計分方式以全對得 2 分，只有一個項目判斷錯誤得 1 分，二個項目以上判斷錯誤得 0 分此題前測總得分為 2 分，後測總得分為 28 分。答題結果統計如表 1，錯誤類型分類記號以英文字母表示。前測結果顯示學生在真、假、帶分數的定義及判斷的概念尚未建立，但是學生應要有真分數的先備經驗；在$\frac{3}{8}$、$\frac{1}{4}$判斷錯誤有 7 人次，而將$\frac{9}{9}$判斷為真分數的則有 18 人次；後測結果顯示，學生在真、假分數判斷已經成熟，唯有$1\frac{5}{3}$此項目仍有 22 人判斷為帶分數。活動一「認識真分數、假分數、帶分數」課程當中，在定義假分數

時，教師已有舉例$1\frac{4}{4}$、$1\frac{5}{4}$讓學生判斷，當時有學生認為是帶分數，詢問學生「為什麼是帶分數？」，學生回答「因為帶分數是整數加上分數」，在課堂上也立即澄清過這個定義，並且說明這樣的分數會出現在計算過程，但不是最後的答案，並且不能屬於帶分數或假分數。後測之後，在課堂上討論題目時，後測中選擇$1\frac{5}{3}$為帶分數的 21 人次，再次詢問學生「為什麼是帶分數？」，其中有 18 人次表示因為題目沒有說明「都不是」的項目時可以不用寫，所以他們選擇將$1\frac{5}{3}$填寫在帶分數的部分；另有 3 人以個別指導的方式進行補救。

表 1 真、假、帶分數的定義及判斷錯誤類型及答題表現

項目	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{11}{5}$	$2\frac{3}{4}$	$1\frac{5}{3}$
錯誤類型		d-假分數	c-真分數	h-帶分數	i-假分數	a-假分數
前測錯誤人次		1	18	3	1	5
後測錯誤人次		0	0	0	0	0
錯誤類型	g-假分數	e-帶分數				b-帶分數
前測錯誤人次	5	1				17
後測錯誤人次	0	0				21
錯誤類型					f-真分數	
前測錯誤人次					1	
後測錯誤人次					0	

三、假分數與帶分數的比大小能力有進步

試題題目「紅繩子長$2\frac{5}{8}$公尺，藍繩子長$\frac{19}{8}$公尺，哪一條繩子比較短？寫出你的理由。」評量目的是依據學習目標「能夠比較同分母分數的大小，並能正確排序」，學生需能夠解決生活情境中包含多個同分母分數比較的問題。計分方式以全對得 2 分，帶、假分數換算正確，比大小過程正確，最後答案錯誤則得 1 分，帶、假分數換算有誤或比大小過程有誤則得 0 分；此題表現平均得分從 0.5 分(25%)進步到 1.71 分(85.5%)。答題結果統計如表 2，錯誤類型分類記號以英文字母表示。前測結果顯示學生有同分母真分數比大小的先備經驗，但是帶、假分數換算的程序性知識尚未建立；在帶分數$2\frac{5}{8}$換假分數換算錯誤有 3 人次，而將假分數$\frac{19}{8}$換帶分數換算錯誤有 1 人次，沒有換算直接比較有 2 人次，理由不正確有 4 人次，空白沒作答則有 9 人次；後測結果顯示，學生已建立帶、假分數換算的程序性知識，在帶分數$2\frac{5}{8}$換算成假分數正確有 7 人次，而將假分數$\frac{19}{8}$換算成帶分數正確有 17 人次，但其中有 6 人次在最後答案部分回答錯誤，有針對得 0 分的同學，以個別指導的方式進行補救。

表 2 帶、假分數換算、比大小錯誤類型及答題表現

錯誤類型	a-換算帶分數錯誤	b-換算假分數錯誤	c-沒有換算	d-比大小錯誤	e-理由不正確	f-答案錯誤
前測錯誤人次	1	3	2	2	4	3
後測錯誤人次	0	0	1	0	1	1

四、帶分數的整數倍計算有進步

試題題目「一捆緞帶長$1\frac{3}{4}$公尺,老師做緞帶花用掉了 5 捆,共用了多少公尺的緞帶?」評量目的是依據學習目標「能解決分數與整數倍數的乘法問題」,學生需能運用所學的乘法知識,解決實際情境中的分數和整數倍數問題。此題表現平均得分從 0.08 分(4%)進步到 1.58 分(79%)。答題錯誤類型分類記號以英文字母表示,統計如表 3。前測結果顯示學生在帶分數的概念性知識尚未建立,是用整數基模在處理問題,例如,在題目中「用掉了 5 捆」直接以「-5」表示的人佔 13%;帶分數概念或單位量概念模糊的人佔 13%,他們將$1\frac{3}{4}$視為一個$\frac{3}{4}$或是$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$;學生在解讀題意時,無法正確地辨識數量關係、單位意涵,進而誤用或錯誤套用運算方法,將題目中的 5 捆在算式中記作$\frac{5}{4}$、$\frac{5}{5}$的人佔 21%;帶分數整數倍的計算,包含分母同乘整數倍、只有整數乘整數倍、乘法計算等過程錯誤的人佔 17%,前測更是有近 38%的人空白沒作答。後測是進步到 79%的人完全正確,8%的計算錯誤,最後 13%的人仍有解題列式的困難,透過個別輔導進行補救教學。

表 3 帶分數的整數倍計算錯誤類型及答題表現

錯誤類型	d-用減法	e-將分母也同乘 5	f-計算概念錯誤	j-用加法	h-只有整數部分乘 5	i-計算錯誤
前測錯誤人次	4	1	3	1	1	4
後測錯誤人次	0	0	1	0	1	1

五、學生學習分數的迷思概念與進步情形

學生在學習分數單元的迷思主要可分為單位量的迷思、受分子或分母控制的迷思。

1. 真分數、假分數的判斷進步:前測時,學生對真分數和假分數的定義與判斷概念尚未建立,尤其在判斷假分數時錯誤較多。後測結果顯示,大部分學生已能正確判斷真分數與假分數,判斷錯誤人次明顯減少,表現成熟。

2. 帶分數的判斷進步與迷思:前測中,部分學生將假分數誤判為帶分數,顯示未清楚理解假分數與帶分數的區別。後測結果顯示雖有 22 人次仍有誤判情形,在排除提議不清的狀況下,仍有少數人須個別指導。

3. 帶分數與假分數換算的進步:前測中,有帶分數換假分數錯誤、假分數換帶分數錯誤。後測時,帶分數換假分數、假分數換帶分數都有進步,顯示學生的程序性知識大幅提升。但是後測中,即使換算正確,仍有部分學生在最終答案部分回答錯誤,顯示他們在表達答案或解釋理由上仍有困難。

4. 帶分數與整數倍數乘法概念的進步:前測時,大多數學生對帶分數的概念性知識不清楚,無法正確處理帶分數與整數的乘法。後測中,多數人能完全正確解題,顯示帶分數與整數乘法的概念理解與計算能力明顯提升。

伍、結論與建議

一、結論

診斷教學的關鍵步驟有三: (1)學生錯誤概念的呈現(2)教師製造學生認知衝突(3)澄清迷思概念建構正確認知。所以在本研究實施前測後,教師透過學生作答情形找出迷思概念,並且歸納出學生的錯誤類型,進而設計相關的診斷教學課程,以其中的迷思概念製造學生認知衝突,最後便能澄清迷思概念且建構正確認知。

(一)後測總成績優於前測總成績,以成績總分 28 分,學生平均得分從 11.7 分(41.8%)

進步到平均得分 17.8 分(63.6%)，進步 6.1 分(21.8%)。

(二)真、假分數與帶分數的定義後測結果優於前測結果，表現平均得分從 0.08 分(4%)進步到 1.13 分(56.5%)，進步 1.05 分(52.5%)。

以第三題題目為例，結果呈現學生的迷思概念在於$1\frac{5}{3}$的定義，在實施前測後的教學中，便以此進行診斷教學；而在後測的表現雖是優於前測表現，但仍有 22 人次將$1\frac{5}{3}$判斷為假分數，在了解學生作答原因後，能理解是題目說明不夠完整，應多一個選項為「都不是」讓學生作答。

(三)假分數和帶分數的互換及同分母分數的比大小後測結果優於前測結果。

二、建議

(一)診斷教學活動以小範圍設計

研究者透過收集學生的前測數據，歸納出不同的錯誤類型，並設計診斷教學活動幫助學生改善學習，但在課堂上並非都有時間進行前測測驗;所以在學生迷思概念出現時，教師透過診斷教學方式來協助學生建構正確的認知。因此研究者建議不用整堂課都設計診斷教學，針對學生易出現迷思概念之處設計診斷教學活動即可。

(二)診斷教學中的提問與小活動

在進行診斷教學時，研究者並未特別強調學生需要加強注意，整體學習氛圍與日常課堂相似。當老師提問時，擁有正確概念的學生往往能迅速回答正確答案，然而，這樣的方式可能無法給持有迷思概念的學生足夠的思考時間。因此，建議教學者在診斷教學過程中特別強調個別學生的思考時間，並透過提問方式引導學生深入思考。例如，可以詢問:「你能說說看……和……的不同嗎？」或「你的想法是什麼？」或是常常問學生「為什麼？」，此外，適當延長學生回答問題的時間，營造充足的思考空間，確保每位學生都有機會參與討論與回答。

為了提升學生對分數的理解，研究者採取以下具體措施：

1.具體操作：利用積木、餅乾、拼圖等具體實物來展示帶分數與假分數的轉換，或善用習作中提供的附件作為輔助教材。

2.畫圖輔助：透過數線、圖形（如圓形、長條圖）幫助學生理解分數的大小關係，讓抽象概念更加具體。

3.錯誤診斷與討論：提供學生常見錯誤的反例，引導他們分析錯誤的原因，並透過討論找出正確的解法，以加深理解並修正迷思概念。

這次研究透過這些策略，能夠幫助學生建立正確的數學概念，提升學習成效。鼓勵教師的提升診斷教學技巧透過這次研究，能發現診斷教學對於學生的概念學習式有成效的，希望未來的老師們可以學習診斷教學的技巧並且運用於課堂上，對於學生學習也是有幫助。

參考文獻

李源順（2021）。**數學這樣教國小數學感教育**。

林福來、黃敏晃、呂玉琴（1996）。分數啟蒙的學習與教學之發展性研究。**科學教育學刊，4（2）**，161-196。

梁惠珍、劉曼麗（2005）。國小四年級小數診斷教學之研究。發表在**台灣教育學術研討會**。

梁鉅娟（2011）。**新北市國民小學實施「攜手計畫-課後扶助」方案之行動研究-以數學分數與小數單元診斷教學為例**（未出版）。

陳明宏、呂玉琴（2005）。國小四年級學童分數概念之診斷教學研究。**國立臺北教育大學學報，18（2）**，1~32。

Ashlock (2006). Error patterns in computation. (Ed.), *Error patterns in computation*, (Vol., pp.).

A Study on the Effectiveness of Diagnostic Teaching Applied to the Teaching of the Fraction Unit in Mathematics

Tzu-Lun Chiu[1] Yuan-Shun Lee[2]
[1]Master Program of Mathematics Education, University of Taipei
[2]Department of Mathematics, University of Taipei

Abstract

This study aims to investigate the effectiveness of applying diagnostic teaching in the instruction of fractions for fourth-grade elementary school students. The research adopts an interpretative approach and involves 24 fourth-grade students as participants. The fraction unit covers mixed numbers, improper fractions, their conversions, and comparative magnitude.

The research process begins with a literature review on relevant misconceptions, followed by the design of diagnostic assessment items to identify students' misconceptions. Subsequently, diagnostic teaching is implemented, and its effectiveness is evaluated.

Data collection and analysis include pre- and post-test questionnaires and classroom teaching recordings. The validity and reliability of the study are ensured through content validity, expert validity, and triangulation.

This paper reports solely on students' learning outcomes. The results indicate that students' average scores in identifying and defining mixed numbers improved from 0.08 points (4%) to 1.13 points (56.5%). Their ability to compare the magnitude of mixed numbers and improper fractions with the same denominator increased from an average of 0.5 points (25%) to 1.71 points (85.5%). Performance in addition of fractions with the same denominator improved from 1.63 points (81.5%) to 2 points (100%), while subtraction of fractions with the same denominator improved from 1.29 points (64.5%) to 1.67 points (83.5%). Students' ability to compute integer multiples of mixed numbers showed an improvement from 0.08 points (4%) to 1.58 points (79%).

Out of a total score of 28 points, students' average scores increased from 11.7 points (41.8%) to 17.8 points (63.6%), demonstrating an overall improvement in their performance.

Key words: diagnostic teaching, unit fraction , misconception, error types

因倍數概念之學習診斷工具開發之前導研究

蘇柏昇[1] 沈明勳[2]
[1]國立高雄師範大學科環所 jay740616@gmail.com
[2]國立高雄師範大學科環所 t4033@mail.nknu.edu.tw

摘要

國中小階段的因數與倍數概念是分數運算與解方程式的基礎，但學生常因概念不清，面臨解題困難。研究發現，學生在學習此單元時，常遺漏因數、混淆概念、誤用策略，甚至放棄應用題，產生學習無助感。為此，研究者針對國小五年級至國中八年級學生，參考因材網知識結構星空圖，開發一套診斷工具，幫助教師快速識別學生薄弱點。教師可透過診斷，在教學前針對性複習，強化先備知識，提升學習成效，減少因概念不清導致的困難。

關鍵字：因倍數概念、先備知識、知識結構、學習診斷

壹、緒論

一、研究動機與背景

國中小階段建立因數與倍數概念是十分重要的，因為它是分數運算的先備基礎，也和之後的解方程式課程有很大關聯。但根據許多專家的研究報告發現，國中小階段學生的因數、倍數、公因數、公倍數知識表現並不理想（謝堅，1995；蕭金土，1994；游麗卿，1997），研究者在補習班教學中發現，國中小學生的因倍數概念普遍模糊不清。特別是在解因倍數相關的文字題時，學生常常遇到許多困難，具體表現在以下幾點：1.依賴猜測解題：學生傾向於用猜測方式尋找解題策略，而非依據邏輯推理。2.誤用關鍵字：常因誤解題目中的關鍵字，導致解題方向錯誤。3.不理解題意：無法準確把握題目要求，影響解題過程。 為了解決這些挑戰，研究者針對國小五年級至國中八年級的學生，以因材網的知識結構星空圖為參考，開發了一套診斷工具。這套工具旨在協助教師快速找出學生的學習薄弱點，從而提升教學效率。

二、研究目的

本研究開發因倍數診斷工具，仿造因材網星空圖，讓教師快速識別學生薄弱觀念，教學前診斷並複習舊知，減少因先備知識不足導致的跨年級學習困難。

貳、文獻探討

一、因倍數概念

因數(factor)也稱因子、除子、除數，是一個常見的數學名詞用於描述自然數 a 和自然數 b 之間存在的整除關係，即 b 可以被 a 整除。這裡我們稱 b 是 a 的倍數，a 是 b 的因數或因子。

理解因、倍數概念是認識其他數學領域知識的基礎。有關因、倍數表現的研究，一些是關於證明的數學議題(Lester & Mau,1993; Martin & Harel,1989; Movshovitz-Hadar & Hadass,1991)，部分研究則透過解題探索因倍數關係(吳碧智、張駿勝、陳嘉皇，2013；Ball,1990; Graeber,Tirosh & Glover,1989; Greer, 1992)，部分則探索教師對因、倍數概念的理解(Campbell &

Zazkis,2002; Zazkis,1998;Zazkis & Campbell,1996a,1996b)，另外Olson(1991)建議可用幾何觀點配合因、倍數探究「最大公因數」(greatest common divisor, gcd)表現，但未進一步探索因、倍數對理解最大公因數的影響。近年則有許多研究，嘗試建構學生因數與倍數概念詮釋結構模式，企圖找出影響學生因數與倍 數學習成就之因素。有關因數與倍數教學應用方面之研究，包含因數與倍數之教材、教法及評量等，主題涵蓋不同版本教科書比較、資訊融入因數與倍數教學與評量、補救教學等，俱希望教師運用合適的教材及試題，或使用創新的教學策略，有效的幫助學生突破因數與倍數學習瓶頸。

Factor and multiple concepts play an important role on the mathematics learning. Factor and multiple are abstract concepts so that students often have difficulties. Their related concepts include factor, multiple, common factor, common multiple, greatest common factor and least common multiple. When students are asked to respond word problems of factor or multiple tasks, they always have difficulty to perceive and understand the latent structure of factor and multiple [8, 13]. Some researchers provide instruction strategies to overcome misconceptions of factor and multiple. Bassarear [2] uses interaction and union of Venn diagram to improve factor and multiple concepts. Kennedy, Tipps and Johnson [11] adopt factor tree to clarify the misconceptions of factor and multiple. (Yuan-Horng Lin, Jeng-Ming Yihand Tsai-Nuan Tsai,2014)

二、先備知識與知識結構

先備知識（prior knowledge）是學習新知識及進行問題解決的基礎（Brooks,1983），也是影響學習者學習表現的最重要因素（Doukakis, Tsaganou, &Grigoriadou, 2007）。因此，在程式設計問題解決過程中，學習者的「先備知識」與「規劃解題」能力扮演關鍵要素。在「先備知識」方面，Mayer（1992）提出程式語言教學時提供程式設計電腦運作相關的心智模式、訓練先備技能、將學習任務解析成更小的學習任務並教導問題解決的思考技能及遷移技能，有助於初學者學習程式語言；在「規劃解題」方面，Lau 與 Yuen（2009）建議，應教導學習者如何解決問題的規劃策略（planning strategies），才能幫助學習者達到較高層次的知識理解。因為學生不必規劃學習活動也很少使用後設認知監控歷程（Azevedo & Cromley, 2004），他們不需要監控和評量問題解決（Ge & Land, 2004）。愈來愈多研究者強調需提供學生在解決複雜或非結構化問題時發展認知與後設認知歷程，因此，後設認知是規劃解決問題的關鍵因素。

The term “prior knowledge” is used in relation to teaching and learning and refers to the knowledge that a learner or group of learners has prior to a specific learning episode or course/program of study. The notion of prior learning is important from at least two perspectives. From the perspective of educational purposes, educational provision should be designed such that each stage or phase of educational experience allows learners to make progress beyond what they have already achieved in earlier stages or phases. So, for example, teaching about any science topic in secondary education should represent progression over what is taught in primary school. (Taber, K.S,2015)

三、學習診斷工具

學習診斷的定義，意指教師或專家使用診斷工具或方法對學習者學習狀況進行資料蒐集，藉以分析學習者學習困難之所在以及困難形成的原因。從學習輔導相關研究得知，導致學生學習困難的因素大致上可分為個人因素以及環境因

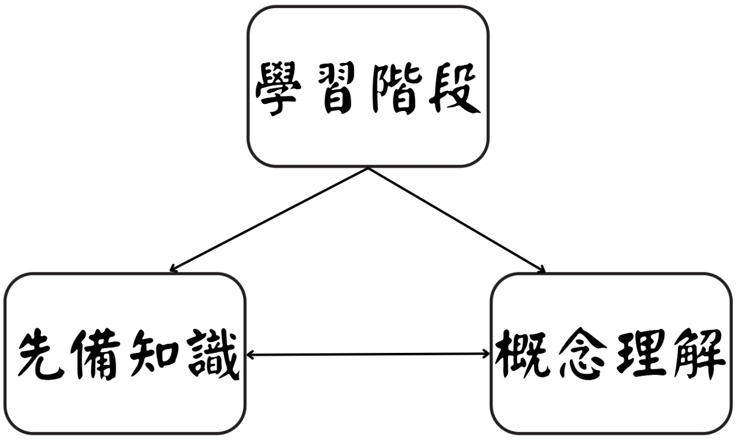
素，環境因素意指不適當的課程安排或學生不適應課程教學之情況，此種狀況凸顯了補救教學的重要性(何英奇等人，2001) 。教師需對學生進行學習診斷的時機: 1.學生遭遇學習困難，教師需對學生進行補救學習的情況。2.學生在學習過程中，有以前學過的觀念模糊不清楚的情況。

學習診斷工具分為正式的診斷評量(formal assessment)與非正式診斷評量兩大類，正式的診斷評量即所謂的常模見評量，其測驗診斷結果是與同性質(例如:同年級、同年紀或者相近智力)的常模比較而得。非正式診斷評量的實施程式不一定為結構化程式，且不依定視標準化的測驗結果。由於非正式診斷評量可以自訂評量的內容及評量方法，較能符合實際的教育需求，也較適合實現個別化的學習診斷。

參、研究方法

一、研究架構

根據研究目的與文獻探討發展出本研究的研究架構，對學習階段、先備知識以及概念理解的影響關係進行研究。本研究旨在建立與驗證「先備知識」與「概念理解」的路徑關係模型，並建立與驗證「學習階段」對「先備知識」與「概念理解」的影響，了解「先備知識」對「概念理解」的直接效果和間接效果。簡言之，本研究將以學習階段作為自變項，而先備知識和概念理解為依變項做相關性研究



二、研究對象

本前導研究選取的研究對象有六年級、七年級、八年級之學校的學生，因上述年級都學習過六年級之質因數分解與短除法單元，因此選這些學生當作研究對象。本研究預計在預試階段的時候，先選取研究對象為五年級學生 60 位，六年級學生 60 位，七年級學生 60 位，八年級學生 60 位。正式施測階段預計研究對象為五年級學生 300 位，六年級學生 300 位，七年級學生 300 位，八年級學生 300 位。

三、研究工具

本研究以學生探究先備知識對於跨年級因倍數概念學習之關聯研究為目標，對五年級、六年級、七年級以及八年級因倍數因倍數概念理解之學習診斷工具，專家小組成員為一位國中小補習班專業教師及一位數學教育領域專家所組成，共同討論編製研究工具。本研究依據李源順(2022)著作的數學這樣做國小數學感教育之書本，以及美國數學教育成就評量(National Assessment of

Educational,NEAP)(NAGB,2002)所提出的數學內容和數學能力雙向的評量架構，其中數學能力就是概念性知識、程序性知識和解題的評量理論，將本研究學習診斷工具進行題目編制，依照題目屬題目彙整成三種屬性:

1.三種題目屬性

(1)概念型(Concept)

數學觀念是人腦對現實對象的數量關係和空間形式的本質特徵的一種反映形式，即一種數學的思維形式。 在數學中，作為一般的思維形式的判斷與推理，以定理、法則、公式的方式表現出來，而數學概念則是構成它們的基礎。 正確理解並靈活運用數學概念，是掌握數學基礎知識和運算技能、發展邏輯論證和空間想象能力的前提。

(2)計算型(Operation)

計算是一種將「單一或多個的輸入值」轉換為「單一或多個的結果」的一種思考過程。

(3)應用型(Application)

應用數學是以應用為目的的明確的數學理論和方法的總稱，研究如何應用數學知識到其他範疇（尤其是科學）的數學分支，可以說是純數學的相反，應用純數學中的結論擴展到物理學等其他科學中，應用數學的發展是以科學為依據，作為科學研究的後盾。

2.三種數學題目類型之屬性分為概念題(屬性 C)、計算題(屬性 CO)、應用題(屬性 COA)，依照難易度區別依序為概念題(屬性 C)<計算題(屬性 CO)<應用題(屬性 COA)，也就是說概念題的難度最低，應用題的難度最高。

肆、研究結果

以下針對六年級因倍數概念之學習診斷工具開發為例，研究討論如下:

一、專家效度

研究者蒐集完各年級之題目後，綜合兩位數學領域的專家甲和乙專家綜合討論數學題目類型之屬性，六年級之數學題目中，第五題的題目為:用短除法求56 的質因數分解，下列哪一個算式是正確的?

(A)
$$\begin{array}{r|l} 7 & 56 \\ \hline & 8 \end{array}$$
$56=7\times8$

(B)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 56 \\ \hline 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ \hline & 7 \end{array}$$
$56=2\times2\times2\times7$

(C)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 56 \\ \hline 2 & 28 \\ \hline & 14 \end{array}$$
$56=2\times2\times14$

(D)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 56 \\ \hline 7 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$
$56=2\times7\times4$ 。

專家甲認為此題目選項中都已經做好短除法的計算過程，所以認為此題目是很單純在考觀念而已，所以專家甲認為此數學題目為概念型，專家乙認為此題目雖然選項中已經有做短除法的過程，但學生仍需知道該如何使用短除法進行運

算，所以專家乙認為此數學題目為計算型，經兩位數學領域專家討論後，認為此題目有進行短除法這個運算過程，學生仍須有短除法的基本預算能力，因此將題目屬性調整成計算型。

二、預試及工具編修

1.項目分析

(1)高低分組設定

根據預試樣本回收 62 份，區分問卷答題總分前 27%和後 27%分別為高分組和低分組(吳相儀等人，2018)，高分組和低分組各 18 人進行後續的問卷總分差異的獨立樣本 t 檢定。

2. 高低分組差異 t 檢定

統計資料顯示，高分組問卷答題總分平均數 22.33，低分組 13.89，由獨立樣本 t 檢定分析顯示，高低分組答題總分差異達顯著水準($t = 13.972$, $p < .001$)，表示高分組答題總分明顯高於低分組，由此表示該問卷總分具有良好的鑑別力。

表 高低分組量表總分差異之獨立樣本 t 檢定摘要表

組別	平均數	標準差	t	p
高分組(18 人)	22.33	0.458	13.972***	.000
低分組(18 人)	13.89	2.518		

***$p<.001$

3. 題項與問卷總分相關分析

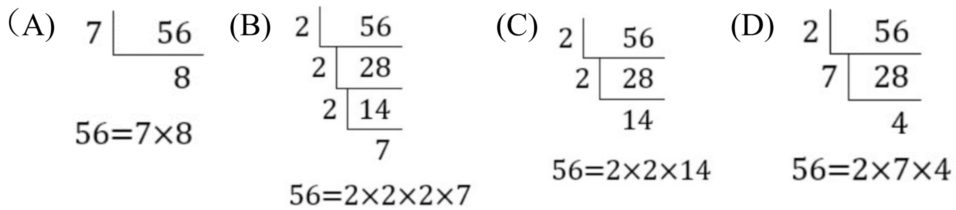
依據上述問卷總分具良好鑑別力後，接續進行各題項與問卷總分的關聯分析，若各題項的相關係數越高，表示題項之間具有內部一致性；再者，本研究依照李亭儀等人(2011)研究強調會將相關係數低於 0.3 的題項予以刪除，以確保各題項具有較佳的診斷功能。

表 總分與各題項之相關係數

		分數
總分	皮爾森 (Pearson) 相關性	1
	顯著性 （雙尾）	
第 1 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.235
	顯著性 （雙尾）	.066
第 2 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.229
	顯著性 （雙尾）	.073
第 3 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.553**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 4 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.631**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 5 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.362**
	顯著性 （雙尾）	.004
第 6 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.311*
	顯著性 （雙尾）	.014

第 7 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.353**
	顯著性 （雙尾）	.005
第 8 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.436**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 9 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.474**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 10 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.452**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 11 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.413**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 12 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.273*
	顯著性 （雙尾）	.032
第 13 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.461**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 14 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.376**
	顯著性 （雙尾）	.003
第 15 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.525**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 16 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.442**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 17 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.361**
	顯著性 （雙尾）	.004
第 18 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.449**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 19 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.416**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 20 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.481**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 21 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.682**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 22 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.503**
	顯著性 （雙尾）	<.001
第 23 題	皮爾森 (Pearson) 相關性	.435**
	顯著性 （雙尾）	<.001

綜合兩位數學領域的專家甲和乙專家綜合討論後，將第 1 題的題目修正為沈老師問同學，下面哪一個數是質數？請問哪位同學回答是正確的?(A)天天:1(B)阿奇:91(C)小莉:97(D)路馬:111。另外第 7 題的題目用短除法求 56 的質因數分解，下列哪一個算式是正確的?



原為計算(CO)屬性，將題目修改為求 56 的質因數分解，下列哪一個算式是正確的?(A)56=7x8(B)56=2x2x2x7(C)56=2x2x14(D)56=2x7x4，將題目修改成概念(C)屬性。

另外由第 3 題和第 4 題的錯誤狀況來看，學生可能因題目沒有看清楚，把「質因數」看成「因數」，因為題目的屬性為概念(C)，主要用意是要了解學生對概念的了解程度，因此討論後決定將題目的質因數三個字加上「」;

另外第 13 題雖然相關性達.461，但與第 9 題的問題是一樣的，只是加上了生活情境而以，但本身這兩題的都是計算(CO)屬性，所以選擇留下第 9 題。

最後新增了一題改念(C)屬性的題目，下列選項何者是 2x5 和 5x7 最小公倍數(A)2x7(B)5x5(C)2x5x7(D)2x5x5x7，藉由增刪題以及修正題目後，六年級問卷留下屬性為概念(C)5 題、屬性為計算(CO)5 題、屬性為應用(COA)5 題，總題數 15 題，作為六年級學習診斷工具的正式問卷。

伍、結論與建議

一、學習診斷工具的重要性

學習診斷工具在國中小學生的因倍數概念學習中具有關鍵作用，其重要性體現在以下幾個面向：

1.診斷學習困難

學習診斷工具能夠幫助教師精準辨識學生在因倍數概念上的學習困難與迷思概念，例如先備知識不足、概念混淆（如因數與倍數的區別不清）、或解題策略錯誤（如誤用關鍵字或猜測解題）。透過診斷，教師可以快速了解學生的薄弱環節，並針對性地提供補救教學，解決學生在數學學習中的具體問題。

2.提升教學效率

在教學開始前使用診斷工具進行評估，教師能清楚掌握學生的學習狀況，避免浪費時間重複教授已掌握的內容。同時，教師可以將精力集中在學生的困難點上，優化課堂時間分配，從而提高整體教學效率。

3.促進個別化教學

每個學生的學習進度與理解能力不盡相同，診斷工具能提供個別化的評估結果，讓教師根據學生的具體需求設計差異化的教學策略。這有助於實現因材施教，提升每位學生的學習成效。

二、學習診斷工具的適用性

1.跨年級使用

該工具涵蓋國小五年級至國中八年級的因倍數學習內容，從基礎的因數與倍數到進階的質因數分解與因式分解，能適應不同年級的課程需求，提供連貫的診斷支持。

2. 多樣化的題型

工具包含概念題（如判斷質數）、計算題（如求最大公因數）與應用題（如文字題情境分析）三種類型，全面評估學生的概念理解、運算能力及實際應用能力，確保診斷結果的完整性。

3. 專家效度

工具由數學教育專家與數學領域教師共同審查與編制，經過多次討論與修改，確保題目內容效度高、難易度適中，能準確反映學生的真實學習狀況。

三、學習診斷工具的可行性

1. 便利性

相較於因材網需依賴網路與設備的限制，本工具設計注重實務教學現場的應用，教師無需特定技術支持即可使用，能靈活應用於教學教育現場。

2. 易於操作

工具參考因材網知識結構星空圖的概念，設計直觀易懂的界面與題目結構，教師 可快速上手，降低使用門檻。

3. 可擴展性

工具的設計理念與方法不僅適用於因倍數概念，還可延伸至其他數學單元（如分數或代數）或學科，具有良好的推廣潛力，能滿足更廣泛的教育需求。

綜上所述，學習診斷工具的重要性在於它能幫助教師識別學習困難、提升教學效率、實現個別化教學、預防學習挫折並支持跨年級知識銜接，從而提升整體教學質量與學生學習成效。其適用性體現在跨年級使用、多樣化題型與專家效度的支持；可行性則來自於便利性、易操作性、即時反饋、低成本與可擴展性。這些特點使該工具成為國中小數學教學中實用的輔助手段，特別是在因倍數概念的學習診斷與補救教學中具有顯著價值。

參考文獻

邱濱文(2004)。**模糊理論在學習診斷資訊系統之應用-以國小學童解未知數解題程序的錯誤類型為例**。國立新竹教育大學進修部數理教育碩士班(數學組)論文，未出版，新竹市。

黃綺芳、林志成（2023）。**學習扶助運用數位科技的思維及作法**。學校行政，(145)，25-39。

劉哲源、劉祥通(2008)。國一資優生對因倍數問題的解題分析。**資優教育期刊，8**(1)，47-66。

謝如山、潘鳳琴（2012）。**情境教學於學生因數與倍數概念發展之行動研究**。藝術學報，(90)，347-371。

林宗翰、姚如芬（2011）。**情境融入國一最大公因數與最小公倍數文字題補救教學之研究－下一站・北港**。台灣數學教師電子期刊，(28)，21-39。

林宜靜(2012)。**應用 S-P 表於學習回饋對國小數學學業成就、學習態度、自我調整之影響研究**。淡江大學教育科技學系碩士班論文，未出版，新北市。

蔡彩暖(2014)。**五年級學童數學直覺法則與因數倍數概念關聯性探討**。國立臺中教育大學數學教育學系論文，未出版，台中市。

李源順(2022)。**數學這樣教國小數學感教育**。台北:五南。

史麗珠、鍾佳玘、趙國玉、林雪蓉、侯嘉玲、林慧芬(2015)。注意力不足過動症知識量表之發展及信效度評估。**台灣公共衛生雜誌，34**(3)，319-334。

李亭儀、楊仁仁、徐志輝、張梅香(2011)。有氧舞蹈課程滿意度量表編製之研究。**運動健康休閒學報，2**，47-57。

吳相儀、陳冠羽、廖思涵、劉政宏、謝碧玲(2018)。「新編青少年強項量表」之編製與驗證。**測驗學刊，65**(4)，367-399。

郭彥成、林靜萍(2006)。大學生桌球認知測驗之編製。**體育學報，39**(3)，119-129。

趙梅如、黃信樽(2009)。數學學習需求之內涵建構及量表編製。**教育學刊，32**，159-195。

Yuan-Horng Lin, Jeng-Ming Yihand Tsai-Nuan Tsai(2014). Clustering Approach to Investigate Intuitive Rule Usage with Factor and Multiple on Mathematics Problems. International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics, 267-282

Taber, K.S. (2015). Prior Knowledge. In: Gunstone, R. (eds) Encyclopedia of Science Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2150-0_483

The Pilot Study of The Invention of A Learning Diagnostic Tool Focusing on Factors and Multiples

Po-Sgang Su[1] Ming-Hsun Shen[2]
[12]Graduate Institute of Science Education and Environmental Education, National Kaohsiung Normal University

Abstract

The concepts of factors and multiples in elementary and middle school serve as the foundation for fraction operations and equation solving. However, students often met difficulties when solving problems due to the lack of understanding of the concepts. Research has found that when learning this unit, students frequently neglect factors, confuse concepts, misuse strategies, even giving up on word problems, leading to a sense of helplessness towards learning. To address this issue, based on the Knowledge Structure Star Map from the Adaptive Learning Platform, I developed a diagnostic tool for students from fifth grade in elementary school to eighth grade in middle school, helping teachers identify students' weak points quickly. By using this diagnostic tool, teachers can conduct targeted reviews before formal instruction, reinforcing prerequisite knowledge, enhancing learning effectiveness, and reducing difficulties caused by unclear concepts.

Keywords:factors and multiples, prerequisite knowledge, the knowledge structure, learning diagnosis

結合提問和數學感提升學生文字題解題表現之個案研究

李欣蓉[1]　陳建誠[2]
[1]基隆市七堵區復興國民小學 ac4981@gm.kl.edu.tw
[2]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
jiancheng@mail.ntue.edu.tw

摘要

本研究旨在探究結合提問策略與數學感學習策略，對國小學生數學文字題解題成效之影響。研究者以基隆市一所非山非市公立小學之四年級三位數學學習扶助學生為研究對象，採用個案研究法進行教學介入與成效分析。教學設計結合提問四策略——複述、回應、追問、挑戰，以及數學感五學習策略——舉例、簡化、畫圖、問為什麼、回想，協助學生建立四步驟解題流程——理解題意、規劃策略、記錄算式、確認答案，藉此引導學生理解題意、建構數學概念並提升解題能力。

資料蒐集包含文字題解題前後測、教學觀察紀錄、學習單與學生訪談，並採量化與質性分析方式探討學生學習表現。前測結果顯示，學生在面對單位轉換、關鍵字誤解及計算錯誤等問題時，解題表現不佳。本研究尚處於實驗初期，僅完成前測與部分觀察分析。

本研究期望能為教學現場提供具實證基礎之教學模式，並強化教師在數學文字題教學上的提問設計與策略運用能力，作為後續教學與研究參考。

關鍵字：提問策略、數學感學習策略、數學文字題、解題表現

壹、緒論

一、研究動機與背景

根據教育部十二年國民基本教育課程綱要數學學習領域課程綱要(2018)提及之基本理念指出，數學應提供每位學生「有感」的學習機會，同齡學生的數學認知發展有個別差異，若未能充分理解前一階段的概念，必然影響後續階段的概念學習。課程綱要的實踐，教學上需藉由教師的課程設計與規劃搭建鷹架並適時引導，透過不同方式提供能讓每位學生都有感的學習活動。

研究者為國小現職教師且為四年級導師，根據教育部偏遠地區學校教育發展條例之定義，研究者服務的學校為基隆市非山非市公立小學。本校總班級數為六個班級，每個學年僅有一個班級，各年級皆實施常態編班。

為配合十二年國民基本教育推動，「教育部國民及學前教育署補助辦理國民小學及國民中學學生學習扶助作業要點」，篩選國語文、數學、英語文三領域學習低成就學生，及早提供學習扶助，鞏固學生學力，以提升學生學習效能，縮減學力落差，落實教育機會均等。

本班共有六位學生，於 2024 年 5 月份透過線上施測的方式，進行學習扶助篩選測驗，測驗範圍為三年級學習扶助基本學習內容。該次學習扶助篩選測驗結果為班級內其中五位學生數學領域未通過。未通過學生中，共有三位參與數學學習扶助課程，因此本研究實施對象為參與數學學習扶助課程的三位學生。其中一位學生雖接受特教服務，但非屬學習障礙類別，並無神經心理缺陷。因此，該生在學習時聽、說、讀、寫、算、記憶、注意、理解等方面無顯著的困難。

除此之外，研究者於日常教學中觀察發現學生於概念性知識、程序性知識經過刻意練習後學習表現尚可。不過遇到數學文字題時，由於無法充分理解題幹中的數量關係語句，導致問題轉譯有困難，進而影響解題執行結果。因此想運用提問結合數學感學習策略，透過提問搭建問題轉譯時的鷹架，並運用不同的數學感學習策略，如舉例、簡化、畫圖、問為什麼或回想，幫助學生充分理解題幹中的關係語句，進而有效解題。

二、研究目的

本研究希望透過結合提問和數學感的教與學策略，提供每位學生有感的學習機會，讓學生對數學學習產生感覺，能運用多元表徵表達他理解的概念，且使用數學語言表達解題過程，進而培養學生知道數學學習的方法以及正確使用數學工具的素養。運用結合提問和數學感的教學設計、實際教學活動以及教學後的省思與調整，探討學生運用結合提問和數學感學習策略後的解題表現如何，並進一步檢視學生運用結合提問和數學感學習策略是否能增強學生對數學概念的掌握與問題轉譯的能力，進而提升其解題信心與表現。本研究期望透過結合提問和數學感教與學策略，提升研究者的數學教學專業知識與能力，並提供未來實施相關教學的參考與建議。

根據上述研究動機與目的，本研究探討問題如下：

一、結合提問和數學感學習策略的教學流程為何？

二、學生運用提問和數學感學習策略後文字題解題之解題成效如何？

三、研究者暨教學者運用提問和數學感學習策略教學方案的反思與成長為何？

貳、文獻探討

一、數學提問教學的意義

數學提問教學的意義就是教師透過提問的方式，瞭解學生的先備經驗、對概念的理解程度，進一步引導學生思考，學習新的數學概念，進而達到教與學的目標。根據美國國家數學教師協會（NCTM, 2014）的說法，數學提問是促進學生理解數學概念、培養數學思維與溝通的重要教學策略。

Resnick (1995)在數學教學中，提問教學是一種經過教學者以達成學習目標為目的，使用之精確且具啟發性的策略，旨在透過教師設計適當的提問，沿著概念核心引導學生思考，建立數學概念，並增強他們的解題能力。有效的提問不單只有檢核答案，而是能引導學生深入思考、澄清誤解、促進討論與概念建構。然而，在數學學習中，學生常因缺乏有效的問題理解與思考策略，導致解題困難。

提問教學法強調師生之間的雙向互動與交流，不僅能吸引學生注意，還能激發他們的學習興趣與動機，鼓勵積極參與課堂活動和學習任務。同時，教師可及時評估學生的學習進度，了解他們的概念理解、錯誤觀念及學習需求，並根據個別差異調整教學策略和提問方式。透過精心設計的提問，教師除了引導學生從表面到深入探索數學知識、激發學生思考，還能培養學生的數學感與解決問題的能力，同時也協助他們進行後設認知的自我監控與調整，以提高學習效果。

本研究整理相關研究，探討提問教學法在國小數學教學中的應用與效果：劉祥通(2007)強調提問不只是教材中的配角，而應成為教學設計的主體。由教師在課堂中主動提出問題，或在師生互動中適時提問，能引導學生參與思考歷程、激發學生更高層次的思考、發現錯誤概念並進行修正，促進認知發展。蕭武治與劉祥通(2015)探討在國小三年級數學課堂中，教師運用開放式教學法時的提問策略，發現當問題過於困難或學生解題不理想時，教師可透過討論錯誤類型，澄清並引導學生的錯誤概念，作為學習的鷹架。然而，若是困難在於先備知識不足或缺乏操作經驗，透過提問來追問、挑戰學生，以補足學生先備知識與提供操作經驗，學習效果有明顯改善。

以上研究皆指出，有效的提問策略能深化學生對數學問題的理解，促進學生的數學思維與解題能力。尤其是當問題過於困難時，適當的提問能澄清學生的錯誤概念，提供學習鷹架，提升學習效果。

二、數學提問教學的類型

Resnick(1995)指出，教師在課堂中若能有策略性地運用「複述、回應、追問、挑戰」四種提問技巧，將能有效促進學生的思考與學習。首先，複述(Restate)是指鼓勵學生以自己的話重述題目或他人的觀點，幫助澄清理解與建立語言表達能力。其次，回應(Respond)則是針對學生的回答給予正向回饋或進

一步引導第三，追問(Probe)則用於深入探究學生的思考歷程，促使他們更細緻地說明推理與策略。最後，挑戰(Challenge)則是進一步提出具有挑戰性的問題，檢驗學生對概念的理解與應用能力。這四種提問策略循序漸進，能有效建構學生的數學思維、提升課堂互動品質，是推動深度學習的重要手段。

Mason(2000)將課堂中的提問依功能性區分為三種類型，分別為聚焦式(Focusing Questions)、檢驗式(Testing Questions)與探索式(Inquiring Questions)。其中，聚焦式提問主要用於引導學生將注意力集中在問題中的關鍵概念或特定步驟上，幫助學生釐清解題方向。檢驗式提問則著重於確認學生是否理解特定概念或能正確運用計算方法，藉此掌握學生的學習狀況。最後，探索式提問強調促進學生延伸思考與提出假設，鼓勵他們思考多元解法或反思自身策略，可培養學生的數學推理與創造力。這三種提問相互搭配，能有效促進學生建構概念與深化思考，是數學教學中不可或缺的重要策略。

三、數學提問結合數學感的學習

李源順(2018)提出數學感的教與學策略，強調以「啟動學生數學感的機制」為前提，透過具體策略引導學生在解題中活化思維、理解結構，進而培養靈活的數學感。其中，他提出五項核心內涵：舉例、簡化、畫圖、問「為什麼」與回想。首先，舉例能幫助學生將抽象概念轉化為具體情境，促進理解與連結；簡化是將複雜問題轉換為較簡單的概念或數值，以掌握解題本質；畫圖則利用圖像表徵輔助思考，使數量關係更清晰可見；問「為什麼」鼓勵學生探究背後的數學原理，培養批判與反思能力；而回想則引導學生回顧先前學過的概念與策略，以強化學習遷移與整合能力。這五項策略共同構成數學感教學的架構，使學生在面對問題時，能靈活應用知識，展現具理解力與策略性的解題行為，是推動深度數學學習的重要途徑。

郭素幸(2023)的研究發現提問教學法運用在數學兩步驟應用問題時，有助於學生理解題意，若搭配圖示輔助，學生的解題歷程表現更為清晰。除此之外，當學生能透過提問策略反思與練習時，學習成果能夠較長時間保留。黃世美(2007)探討提問教學法對國小五年級學生在分數文字題的解題表現之影響時，發現當學生解題時若無法跳脫原有的學習迷思時，適當的運用具體物供學生操作，或是輔以圖形表徵，先從較基本的概念或數值搭建學習鷹架，再逐步的引導與提問能加深學生印象，並幫助學生交表徵與算式連結，進而達到有效解題之目標。

參、研究方法與工具

一、研究設計

本研究採用個案研究法，旨在探討如何透過結合提問策略與數學感來提升學生在文字題的解題表現。從研究者平時經歷的教學實務情境，發掘學生文字題的學習困難與問題，運用相關理論發展成研究主題，進而規劃可執行的提問教學方案，進行系統性的研究。研究執行過程中，透過觀察及評量等方式收集學生學習成效與回饋，為使學生有效學習，從中省思提問教學流程設計與引導方式，並提升研究者者自身數學教學專業能力。

二、研究對象

本研究的研究對象屬基隆市非山非市公立小學，選擇四年級數學學習扶助班級學生作為研究對象，合計三位學生。研究對象皆為女生，依序編號為 S1、S2、S3。研究對象於 2024 年 5 月份透過「國民小學及國民中學學生學習扶助科技化評量系統」之數學領域篩選測驗，當時測驗範圍為三年級數學學習扶助基本學習內容，皆未達通過標準，能力未達三年級數學學習扶助基本學習內容。

S1 雖經鑑定有情緒障礙且接受特教資源服務，但非屬學習障礙類別，學習能力相較同儕並無顯著困難，且無神經或心理缺陷，因此平時數學課程仍於普通班學習。研究者將三位學生的數學學習態度與表現，整理簡述如表 3-1：

表 3-1

學生數學學習態度與表現

編號	學生數學學習態度與表現
S1	數學能力較低，課中反應較慢，具備基本運算能力，概念理解能力較弱。作答時缺乏耐心，因此遇到文字題時會懶得思考，將數字和運算符號隨機組合進行計算和解題，導致答題正確率不高。文字題的閱讀理解能力不佳，無法自行理解題意，需要透過教師提問引導思考，逐步確認算式意義和進行解題，方能有效解題。
S2	課中反應較慢，且不太願意於課堂中開口回答，使教學者無法及時瞭解學生學習節奏或困難，須由教師指定回答，或透過手勢或書寫想法以確認其理解程度。雖然具備基本運算能力，不過經常出現計算錯誤，導致答題正確率下降。概念理解能力較弱，因此學習新概念需要教學者提供更多細緻的學習鷹架和練習機會。若幫學生建立解題時的思考或流程，該生可以依序執行，不過遇到題目變化時，無法自行舉一反三，數學思考靈活度不佳。
S3	數學能力中等，基本運算能力佳。概念理解能力中等，多能跟上教師日常教學節奏。文字題的閱讀理解能力尚可，偶爾需要輔以教師提問引導思考，再自行確認算式意義。

註：作者自行整理。

三、教學流程與設計

研究者將每題的教學流程分為四步驟，說明如表 3-2：

表 3-2

教學流程與教師提問引導表

教學流程	學習目標	教師提問引導參考
理解題意	1.理解題目情境。 2.釐清數學名詞。	1.先默讀題目，把不懂的詞語請圈起來。 2.釐清學生題目中不懂的詞語。 3.請用自己的話說說看，題目在說什麼？ 4.題目中原本的資訊有哪些？ 5.哪些數字或條件是重要的？ 6.題目最後想要知道什麼？
規劃策略	幫助學生建立解題策略，發展數學推理能力。	1.題目裡做了什麼事？或是有什麼變化？ 2.這題可以用什麼方法來解決？ 3.試試看畫圖或畫線段幫助自己思考和列出算式。
記錄算式	依照解題步驟，逐步完成解題。	1.請用算式記錄，圖像或線段圖的意義，並說明理由。 2.先算什麼？請先寫下第一個算式。 3.再算什麼？再寫第二個算式。
確認答案	檢核答案的合理性，是否符合題目所求。	最後算出來的答案是題目想要知道的嗎？

註：作者自行整理。

四、研究工具

透過文字題解題測驗、課堂觀察記錄、學生學習單與訪談，分析提問策略與數學感對解題表現的影響。文字題解題測驗分為前測和後測各包含 10 題文字題，題目內容包含兩步驟連乘問題、兩步驟乘除混合問題。前測用於評估學生在研究介入前的解題表現。後測用於評估經過提問與數學感教學後解題表現的進步程度。研究者於教學過程中觀察，學生接受研究者提問的反應、數學感展現與解題表現。學習單用於記錄學生的解題過程與想法，以補充測驗結果的質性分析。訪談以半結構式訪談方式進行，輔以錄音記錄，主要探討學生對提問與數學感教學的反應、解題的想法與困難，進一步分析提問策略對解題表現的影響。

五、資料收集與分析方法

本研究採用量化與質性分析，探討提問與數學感對學生解題表現的影響。量化分析的部分，藉由前測與後測答題正確率比較，檢驗解題表現是否有顯著進步。質性分析除了透過教學觀察記錄分析學生接受研究者提問的反應與解題

表現，並分析學生學習單和訪談內容，歸納學生的學習經驗與反思，探討提問策略對學生解題表現的影響。

（一）前測卷

計算前測卷答題正確率，分析錯誤題型，詢問研究對象算式記錄背後的原因和思考方式。

（二）課堂觀察記錄

觀察教師提問引導，研究對象課堂反應及經教師引導後的解題方式。觀察研究對象是否能根據教師引導練習幫助解題的策略。

（三）學生學習單與訪談

分析研究對象學習單裡運用之幫助解題的策略及解題歷程中算式背後的思考方式和原因。

（四）後測卷

計算後測卷答題正確率，分析解題時使用的方法及錯誤類型，詢問研究對象算式記錄背後的原因和思考方式。

六、前測卷結果分析

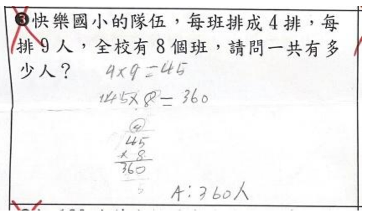
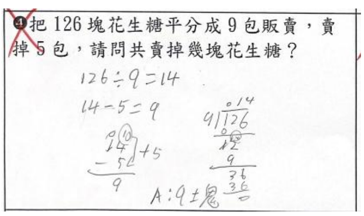
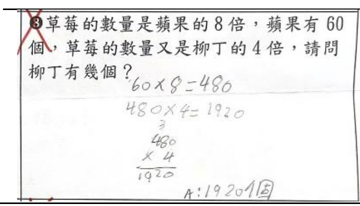
（一）前測卷答題正確率

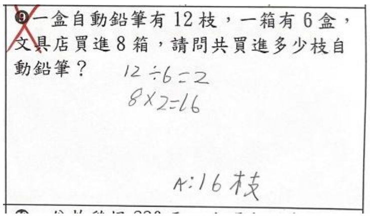
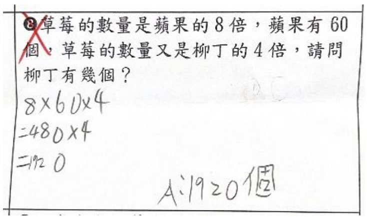
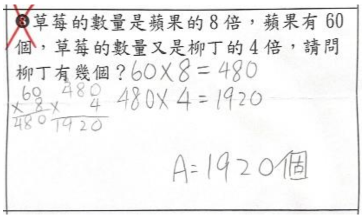
S1：60%、S2：80%、S3：80%

（二）作答記錄、訪談摘要與分析，如表 3-3：

表 3-3

作答記錄、訪談摘要與分析

研究對象	作答記錄	訪談摘要	錯誤類型與分析
S1	 ❸快樂國小的隊伍，每班排成 4 排，每排 9 人，全校有 8 個班，請問一共有多少人？ 4×9=45 45×8=360 A:360人	要先算出每一班的人數，然後再成 8 個班就可以知道一共有多少人？	Q3 計算錯誤。
	 ❹把 126 塊花生糖平分成 9 包販賣，賣掉 5 包，請問共賣掉幾塊花生糖？ 126÷9=14 14−5=9 A:9塊	是因為題目說先平分，所以決定先除。因為賣出去，用減的，所以是賣掉 9 塊。	Q4 知道平分和賣出，但沒有留意單位不同。
	 ❽草莓的數量是蘋果的 8 倍，蘋果有 60 個，草莓的數量又是柳丁的 4 倍，請問柳丁有幾個？ 60×8=480 480×4=1920 A:1920個	看到幾倍幾倍就都用乘的。	Q8 受題目關鍵字影響，沒有留意已知量和未知量的倍數關係，

	 一盒自動鉛筆有 12 枝，一箱有 6 盒，文具店買進 8 箱，請問共買進多少枝自動鉛筆？ 12÷6=2 8×2=16 A:16枝	因為一盒有 12 之，一箱有 6 盒，所以用除的。	Q9 沒有釐清不同單位間的關係。
S2	 草莓的數量是蘋果的 8 倍，蘋果有 60 個，草莓的數量又是柳丁的 4 倍，請問柳丁有幾個？ 8×60×4 =480×4 =1920 A:1920個	因為題目說幾倍幾倍所以就用乘的。	Q8 受題目關鍵字影響，沒有留意已知量和未知量的倍數關係，
S3	 草莓的數量是蘋果的 8 倍，蘋果有 60 個，草莓的數量又是柳丁的 4 倍，請問柳丁有幾個？60×8=480 480×4=1920 A=1920個	因為題目說幾倍。	Q8 受題目關鍵字影響，沒有留意已知量和未知量的倍數關係，

註：作者自行整理。

肆、發現與討論

根據前測卷的作答結果，研究者透過訪談了解學生解題時的想法，發現幾種文字題解題時的錯誤原因，如下：

一、不同單位間的轉換

當學生遇到題目敘述裡有不同單位時，沒有有效的理解題意且無法瞭解不同單位間的大小關係，會隨機或從題目中的其他線索選擇運算方式，同時也無法覺察答案可能不合理。

二、學生解題時容易受關鍵字影響

學生雖然讀完題幹敘述，但仍會根據自己過去的作答經驗，判別題目中關鍵字，像是看到看到「賣掉」就用減法，「倍」就用乘法，看到「平分」就用除法。僅透過關鍵字決定算式記錄及運算方式，沒有確實理解題幹敘述中的語意關係。

三、計算結果不同則放棄

學生在同一題經過多次解題和計算後，若發現每次解題結果皆不相同，則開始懷疑自己的作答方式錯誤，最後直接擦掉所有解題過程，放棄該題。

伍、結論與建議

本研究尚於實驗進行階段，僅做完本研究之前測，目前僅能提供前測後的紀錄和分析，因此尚無相關結論與建議。

參考文獻

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2017). *Taking Action: Implementing Effective Mathematics Teaching Practice.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematic Educational in Science and Technology, 31*(1), 97-111.

Resnick, L. B.(1995). Inventing arithmetic: Making children’s intuition work in school. In C. A. Nelson (Ed.), *Basic and applied perspectives on learning, cognition, and development* (pp. 75-101). Lawrence Erlbaum Associates.

吳幸娟（2019）。**國小二年級數學文字題教學之行動研究（碩士論文）**。國立中正大學，嘉義縣。

李源順(2018)。**數學這樣教-國小數學感教育**。台北市：五南。

康淑娟、劉祥通(2010)。數學提問教學之探討及應用。**科學教育月刊**，333，1-18。

教育部(2018)。**十二年國民基本教育課程綱要數學學習領域課程綱要。**台北市：教育部。

郭素幸(2023)。**以提問教學法解兩步驟應用問題之探討－以國小三年級學生為例(碩士論文)。**國立臺南大學，臺南市。

陸昱任、簡秀純(2021)。數學課堂中的有效提問。**問對問題!讓好的問題引動數學學習的意識**。宜蘭縣：宜蘭縣國民教育輔導團。

黃世美(2007)。**提問教學影響國小五年級學生分數解題表現之研究-以商構念的問題為例(碩士論文)**。國立嘉義大學。嘉義市。

蕭武治、劉祥通(2015)。開放式教學法在小學數學課室之實踐：提問策略之角色。**屏東大學科學教育年刊**，1，2-24。

A Case Study on Enhancing Students' Word Problem-Solving Performance through the Integration of Questioning and Mathematical Sense

Sin-Rong Li Jian-Cheng Chen

Department of Mathematics and Information Education,
National Taipei University of Education

Abstracts

This study aims to investigate the effects of integrating questioning strategies and number sense learning strategies on elementary students' performance in solving mathematical word problems. The participants were three fourth-grade students receiving mathematics remedial instruction at a public elementary school in Keelung City, categorized as neither mountainous nor urban. A case study approach was adopted to implement and evaluate the instructional intervention.The instructional design incorporated four questioning strategies—restating, responding, probing, and challenging—and five number sense strategies—providing examples, simplifying, drawing, asking "why," and recalling. These were structured into a four-step problem-solving process: understanding the problem, planning strategies, recording equations, and verifying the answer. This design aimed to guide students in comprehending problem statements, constructing mathematical concepts, and enhancing their problem-solving abilities.

Data were collected through pre- tests and post-tests of word problem-solving, classroom observations, student worksheets, and interviews. Both quantitative and qualitative analyses were conducted to examine student performance. The pre-test results revealed that students struggled with issues such as unit conversions, misinterpretation of keywords, and computational errors. As the study is still in its early stages, only the pre-test and partial observation data have been completed.

This research is expected to provide an evidence-based instructional model for classroom practice and to strengthen teachers' abilities in designing and applying effective questioning strategies in teaching mathematical word problems. It also aims to serve as a reference for future instructional design and research.

Keywords: Questioning Strategies, Mathematical Sense Learning Strategies, Mathematical Word Problems, Problem-Solving Performance

國中數學課後學習扶助使用數位學習平台之個案研究

林珅兆[1] 姚如芬[2]
[1] 台中市私立曉明女子高級中學 nick41318888@mail.smgsh.tc.edu.tw
[2] 嘉義大學教育學系 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘 要

本研究採用個案研究法，旨在探討數位學習平台對國中數學課後學習扶助的影響，研究焦點聚焦於八年級上學期「因式分解」單元。研究對象為台中某私立國中一名數學低成就學生。透過前測、後測、半結構式訪談與反思日誌分析學生的學習歷程與成效。研究結果顯示，個案在使用數位學習平台後，掌握了提公因式與十字交乘法等關鍵概念。其後測的答對率由原先的 38%提升至 72%，顯示個案學生有明顯的進步。數位平台中的教學影片與即時回饋機制，有效協助學生釐清迷思概念與提升學習信心。研究建議可將此平台應用至其他數學單元與不同學生群體，以進一步檢驗其普適性與成效，日後可作為補救教學策略設計與數位工具整合的實務參考。

關鍵詞：數位學習平台、因式分解、數學學習扶助、學習歷程。

壹、緒論

一、前言

根據教育部(2021)提出的「國中小補救教學政策白皮書」，有效的補救教學策略已成為當前教育改革的重要目標。尤其在數學學科中，學生普遍面臨抽象概念難以理解的挑戰，數學低成就學生更常因挫折經驗而產生學習焦慮與排斥心理。

二、研究動機與背景

多數學生在數學學習上都遇到了上課聽不懂又不知如何解決問題的窘境，特別是對於數學學習低成就的學生。這些孩子可能因為對數學缺乏興趣、理解能力有限或學習環境的限制而難以取得好的成績，這些因素都對他們的學習成效產生了負面影響。因此，能否提供有效的學習扶助來改善這些孩子的數學學習狀況是個很重要的課題。根據研究者的教學觀察顯示，數學低成就學生常因理解能力有限、學習資源不足或課堂學習節奏過快，導致學習效果不彰。隨著 AI 與數位科技的進步，數位學習平台成為教育現場補救教學的新選項，提供自主學習與即時回饋的環境，有助於個別差異的補足(D'Mello, 2021)。本研究以 108 課綱為架構，聚焦於八年級「因式分解」單元，觀察數學低成就學生在使用 IXL 數位學習平台進行課後補救教學後的學習改變。

本研究以 108 課綱數學學習內容綱要為基礎，針對八年級數學「因式分解」單元，使用數位學習平台進行課後學習扶助。期望透過此研究，為數學學習低成就學生的學習困境提供一個省思及決解途徑。

三、研究目的與問題

本研究為個案研究，目的為利用數位學習平台來改善個案在國中數學第三冊第三單元「因式分解」的學習狀況。主要為觀察記錄個案在使用數位學習平台學習狀態的前後差異。具體研究問題如下：

1. 個案在平台學習後對「因式分解」單元的概念理解與成效有何改變？
2. 個案在使用數位學習平台時的數學學習歷程為何？

貳、文獻探討

一、數位學習平台(Digital Learning Platform)：

數位學習平台是一種利用資訊科技工具所建立的學習媒介，提供學習者不受時間與地點限制的自主學習環境(D'Mello, 2021)。此類平台能提高學習效率、促進互動，並因應不同學生的學習差異，實現個別化教學(Meier, 2021)。Meier(2021)進一步指出，數位學習平台透過設計精良的練習題與即時回饋功能，能顯著提升學生的學習參與與數學表現。

黃綺芳與林志成(2023)研究指出，運用數位載具與平台於扶助學習，可提升低成就學生的學習興趣與動機；亦可幫助教師了解、掌握學生參與扶助學習過程的改變。Liao 與 Chen(2019)則進一步指出，適當使用平台中的回饋與練習設計，有助於加強學生對數學概念的掌握與整體學習成效。Ulum(2023)證實，Khan Academy 這類平台能有效提升學生的數學成績，特別是在補救教學與自主學習環境中更具效果。

本研究選擇使用 IXL 平台，是因為其介面親和、操作簡單，具備即時錯誤解析與獎章機制，能提高學習動機與自主性。其教學影片多以簡單英文呈現，亦貼近本研究個案的語文優勢特質。

二、因式分解學習的困難與迷思概念：

因式分解是國中代數核心能力之一，學生常面臨多項式拆解策略不熟悉、概念混淆等問題。研究指出，學生對十字交乘法理解薄弱，常將乘法公式混用於不適用情境，且容易將配方法與平方差公式混淆(Wu, 2016；林玉琴，2018)。黃秋香(2015)針對國中生因式分解錯誤類型的分析指出，學生在列式時常無法辨識是否能提公因式，亦不清楚乘法公式使用的條件。陳美珍(2017)進一步指出，國中學生常誤以為所有二次多項式皆可直接進行十字交乘法，忽略了二次項係數與常數項的關係，導致錯誤頻繁。

本研究以「因式分解」單元作為補救教學重點，藉由數位平台的引導步驟與即時回饋，觀察學生是否能逐步釐清上述迷思概念，進而建構正確的解題歷程。

參、研究設計

一、研究方法

本研究採個案研究法，透過訪談、觀察、前後測與反思日誌深入描寫個案在 IXL 數位學習平台中之學習歷程與成果。

二、研究對象

研究對象為一位就讀台中某私立國中二年級女學生，化名小 C。其家庭組成背景：父親為教育人員、母親為醫院個案管理師，還有二位分別就讀國小六年級及國小四年級的弟弟。家庭功能健全，但個案個性內向不敢問問題，對數學學習態度不積極，對數學沒有興趣，且班上數學老師上課節奏快、考試多，所以數學學習明顯落後。小 C 喜歡閱讀及英文，但對數學排斥及被動影響了他對數學的學習興趣，小 C 不喜歡數學的原因，於實施補救教學活動前，做了第一次半結構式訪談，重點如下：

1. 不喜歡數學的起因：小 C 在國小四年級時開始跟不上進度，且數學成績不理想。考試失敗後，老師的批評、同學的取笑和父親的責罵，使她感到丟臉、難過、不受支持，產生自我懷疑和排斥心理。小 C 開始覺得數學是「學不會的東西」，變得被動、不敢發問。
2. 引導策略：透過鼓勵與理解，讓小 C 感到被支持，重建學習數學的心態，降低挫折感。研究者建議小 C 對英文學習的優勢，將其轉換到數學學習上，降低小 C 的排斥心理。提出具體且簡單的學習計畫(每天 20~30 分鐘、逐步達成小目標)。
3. 引發學習動力：結合小 C 喜歡的「成就感」與「獎章」機制，引發她的學習興趣與動力。
4. 重建自信心：讓小 C 將數學學習視為與英文相同的「逐步學習過程」，強調她能主動解決困難的能力。

三、研究工具

為探討數位學習平台對學生數學學習之影響，本研究採質性研究法，透過參與式觀察與非正式訪談方式，記錄研究對象在課後使用 IXL 數位學習平台進行補救教學前後的學習表現與轉變，並綜合分析其學習感受與成效，作為研究結論之依據。

本研究所使用之工具共計八項，以下逐一說明各項工具之目的、內容、使用時機與次數：：

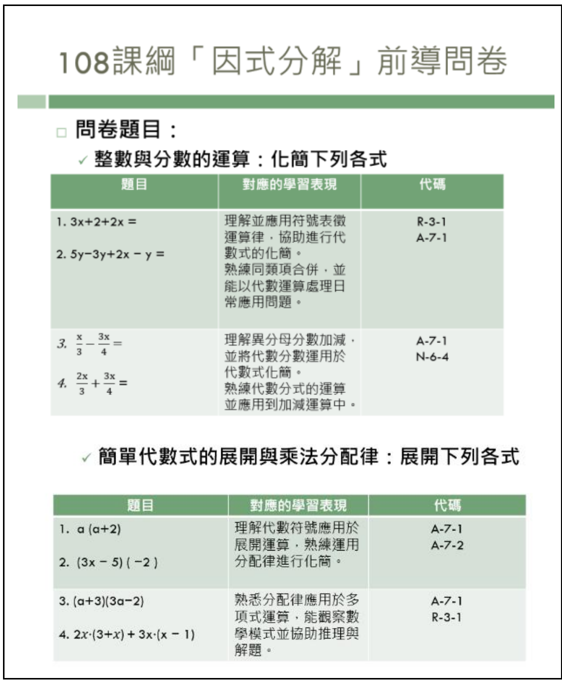
1. 補救單元：依據《十二年國民基本教育課程綱要—數學領域》國中階段課綱內容，學生應具備整式的乘法與因式分解能力，並理解多項式結構與其因數分解技巧，作為後續學習的基礎(教育部，2018)。本單元為代數領域的重要內容，屬於學生數學結構感與運算策略發展的關鍵概念。
2. lXL數位學習平台：本平台為本研究的主要學習工具，提供教學影片、題組練習與即時回饋功能。研究目的在於協助學生於前測後透過有系統的線上學習模式進行「因式分解」單元的再學習與練習，以提升學習成效與概念掌握。
3. 前導測驗：施測時機為補救教學實施前，目的在於評估學生對因式分解相關之先備知識的掌握程度。若學生之先備知識不足，研究者將先行加強相關基礎內容後再進行補救教學。測驗題目內容如表二所示。
4. 因式分解單元前測：施測時機為學生接觸IXL平台補救教學前，目的為了

解學生對因式分解單元的初步理解與概念掌握情形。試題設計依據課綱及教學內容，如表三所示。

5. 因式分解單元後測：施測時機為完成平台學習活動後，目的在評估學生經過補救教學後之學習成果與成效。試題設計與前測相同，題型與難度保持一致，以利進行前後測比較分析，如表三所示。
6. 半結構式訪談：研究者於研究初期針對研究對象進行第一次半結構式訪談，目的在深入了解學生對因式分解單元的學習動機、困難點。以及補救教學活動後，進行第二次半結構式訪談，目的在蒐集研究對象對IXL平台使用經驗之回饋與感受，作為教學調整與資料分析之參考。
7. 反思心得：研究者於研究過程中，撰寫觀察日誌，紀錄研究對象的學習反應、情緒表現與互動狀況，並反思自身的觀察與教學決策。此資料有助於後續分析個案學習歷程與教學修正。
8. 教學介入：研究者於觀察研究對象使用IXL平台進行學習的過程中，針對學生出現的學習障礙與概念錯誤，適時提供教學介入。介入內容包括平台的正確操作與使用及釐清錯誤概念。每次介入皆有紀錄，以便後續分析學生學習困難與介入成效。
9. 本研究的目的與所蒐集資料之對應表如表一所示：

研究目的	前導測驗	前測	後測	半結構式訪談	反思心得
一	O	O	O	X	X
二	X	X	X	O	O

表一、研究的的與所蒐集資料之對應表



108課綱「因式分解」前導問卷

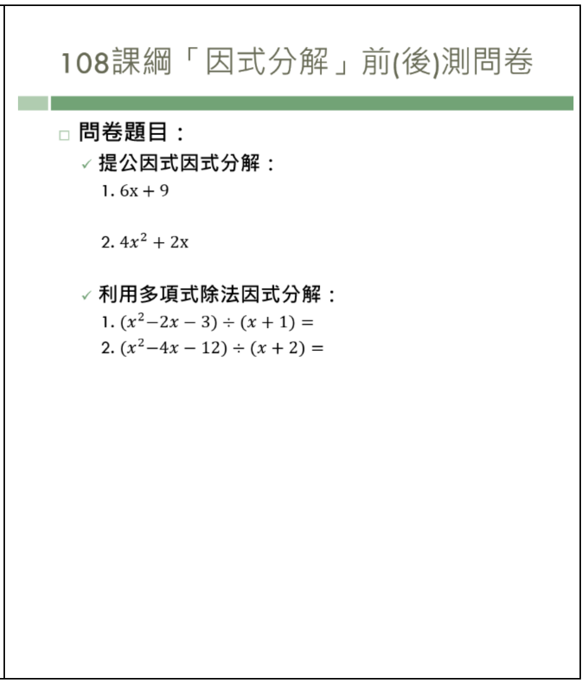
□ 問卷題目：

✓ 整數與分數的運算：化簡下列各式

題目	對應的學習表現	代碼
1. 3x+2+2x = 2. 5y−3y+2x − y =	理解並應用符號表徵運算律，協助進行代數式的化簡。 熟練同類項合併，並能以代數運算處理日常應用問題。	R-3-1 A-7-1
3. $\frac{x}{3}-\frac{3x}{4}=$ 4. $\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=$	理解異分母分數加減，並將代數分數運用於代數式化簡。 熟練代數分式的運算並應用到加減運算中。	A-7-1 N-6-4

✓ 簡單代數式的展開與乘法分配律：展開下列各式

題目	對應的學習表現	代碼
1. a (a+2) 2. (3x − 5) (−2)	理解代數符號應用於展開運算，熟練運用分配律進行化簡。	A-7-1 A-7-2
3. (a+3)(3a−2) 4. $2x\cdot(3+x)+3x\cdot(x-1)$	熟悉分配律應用於多項式運算，能觀察數學模式並協助推理與解題。	A-7-1 R-3-1



108課綱「因式分解」前(後)測問卷

□ 問卷題目：

✓ 提公因式因式分解：

1. 6x + 9

2. $4x^2 + 2x$

✓ 利用多項式除法因式分解：

1. $(x^2-2x-3)\div(x+1)=$
2. $(x^2-4x-12)\div(x+2)=$

	✓ 利用乘法公式因式分解（和、差的平方）： 1. x^2+4x+4 2. $9x^2+12x+4$ 3. x^2-6x+9 4. $25x^2-40x+16$ ✓ 利用乘法公式因式分解（平方差）： 1. x^2-4 2. $9x^2-16$ 3. x^4-1 4. x^4-81 ✓ 利用十字交乘法因式分解： 1. x^2+4x+3 2. x^2-3x-4 3. $2x^2-7x+6$ 4. $6x^2+x-12$ ✓ 利用配方法因式分解： 1. $x^2+4x-77$ 2. $x^2-9x-216$
表二、因式分解先備知識	表三、因式分解前(後)測題型

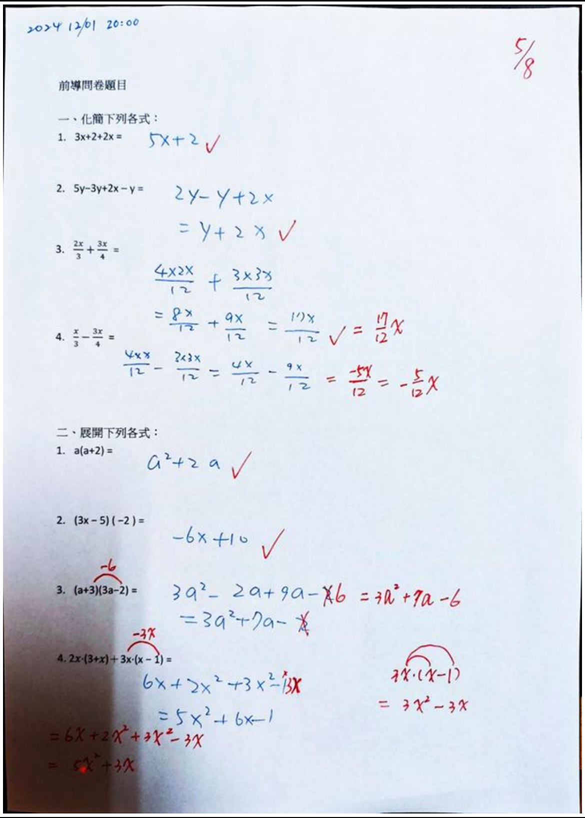
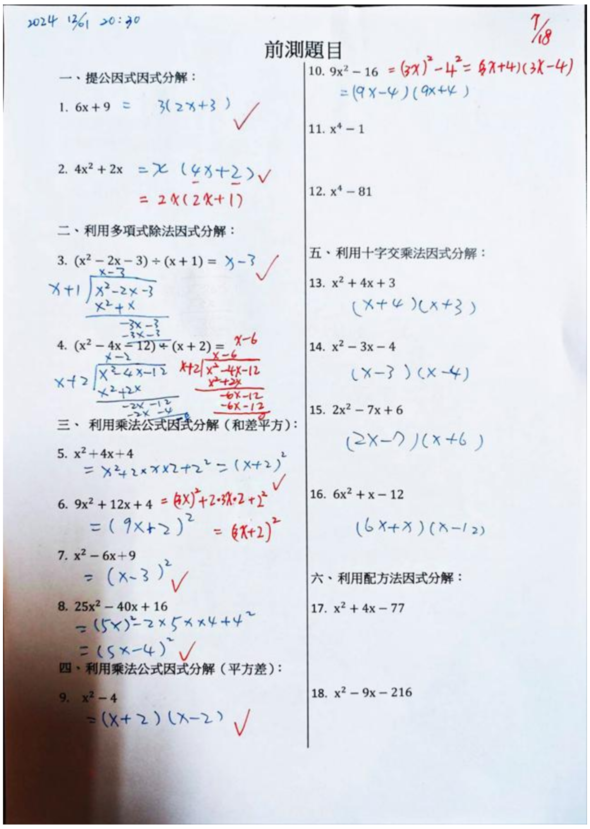
四、實施流程：

以下為研究工具的實施順序與流程，便於後續研究安排與報告撰寫：

1. 前期準備階段：
   a. 編製補救教材(依課綱與因式分解單元內容)
   b. 設計前概念測驗、單元前後測試卷
   c. 撰寫半結構式訪談大綱。
2. 第一次半結構式訪談：與研究對象進行第一次半結構式訪談，教師同步撰寫反思心得日誌。
3. 前測階段：
   a. 實施前導測驗
   b. 若學生先備知識不足，進行先備知識補強
   c. 實施因式分解單元前測
4. 補救教學實施階段：
   a. 學生進行IXL平台學習
   b. 研究者觀察並記錄學生學習歷程
   c. 適時提供教學介入並做紀錄
   d. 教師撰寫反思心得日誌
5. 第二次半結構式訪談：與研究對象進行第二次半結構式訪談，教師再次撰寫反思心得日誌。
6. 後測階段：實施因式分解單元後測，以評估學生補救學習成效。
7. 資料蒐集與統整階段：彙整所有測驗結果、訪談紀錄、介入紀錄、反思日誌，進行質性分析與研究結論撰寫。

肆、研究結果

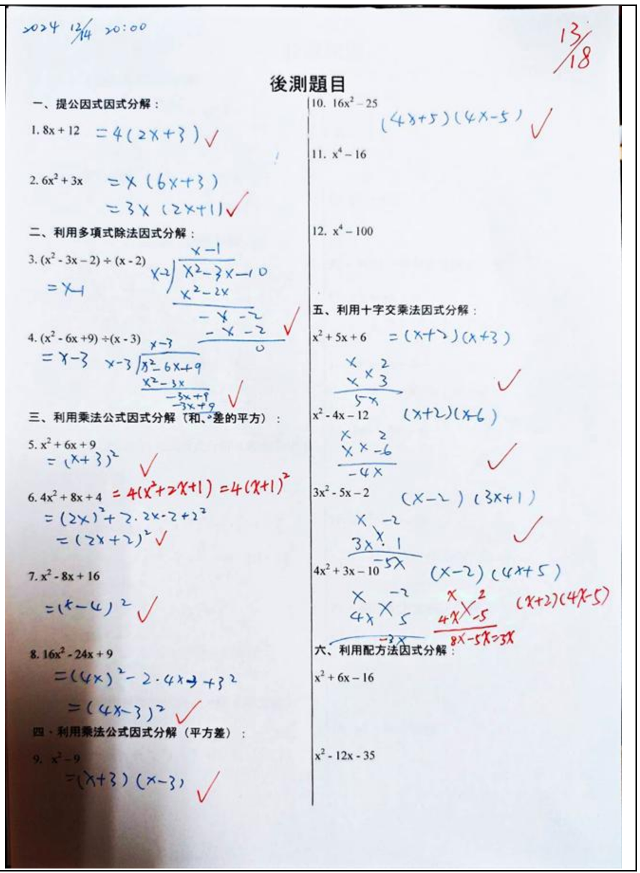
一、個案學生在使用數位學習平台後，學習單元的概念理解及學習狀況：

<table>
<tr>
<td>(一)前導測分析：答對率 5/8
研究對象已具備的先備知識包括：同類項合併、乘法指數律、異分母通分與基本四則運算。主要困難為分配律的不穩定。為此，教學策略以概念澄清與重複練習為主，透過教學介入強化其概念穩定性與運算熟練度。</td>
<td>
2024 12/01 20:00
5/8
前導問卷題目
一、化簡下列各式：
1. $3x+2+2x=$ $5x+2$
2. $5y-3y+2x-y=$ $2y-y+2x$ $=y+2x$
3. $\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=$ $\frac{4\times 2x}{12}+\frac{3\times 3x}{12}$ $=\frac{8x}{12}+\frac{9x}{12}=\frac{17x}{12}=\frac{17}{12}x$
4. $\frac{x}{3}-\frac{3x}{4}=$ $\frac{4\times x}{12}-\frac{3\times 3x}{12}=\frac{4x}{12}-\frac{9x}{12}=\frac{-5x}{12}=-\frac{5}{12}x$
二、展開下列各式：
1. $a(a+2)=$ a^2+2a
2. $(3x-5)(-2)=$ $-6x+10$
3. $(a+3)(3a-2)=$ $3a^2-2a+9a-6$ $=3a^2+7a-6$
4. $2x\cdot(3+x)+3x\cdot(x-1)=$ $6x+2x^2+3x^2-3x$ $=5x^2+6x-1$ $=6x+2x^2+3x^2-3x$ $=5x^2+3x$ $3x\cdot(x-1)=3x^2-3x$</td>
</tr>
<tr>
<td>(二)前測分析：答對率 7/18
研究對象初步掌握提公因式(數)、基本多項式除法與乘法公式。但在高次平方差、二次項係數為平方數與十字交乘法的因式分解部分表現不佳。教學策略採用數位平台中的即時回饋與步驟引導，幫助其逐步釐清錯誤概念。</td>
<td>
2024 12/01 20:30
7/18
前測題目
一、提公因式因式分解：
1. $6x+9=$ $3(2x+3)$
2. $4x^2+2x$ $=x(4x+2)$ $=2x(2x+1)$
二、利用多項式除法因式分解：
3. $(x^2-2x-3)\div(x+1)=$ $x-3$
4. $(x^2-4x-12)\div(x+2)=$ $x-6$
三、利用乘法公式因式分解（和差平方）：
5. x^2+4x+4 $=x^2+2\times x\times 2+2^2=(x+2)^2$
6. $9x^2+12x+4$ $=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2$ $=(9x+2)^2$ $=(3x+2)^2$
7. x^2-6x+9 $=(x-3)^2$
8. $25x^2-40x+16$ $=(5x)^2-2\times 5\times x\times 4+4^2$ $=(5x-4)^2$
四、利用乘法公式因式分解（平方差）：
9. x^2-4 $=(x+2)(x-2)$
10. $9x^2-16$ $=(3x)^2-4^2=(3x+4)(3x-4)$ $=(9x-4)(9x+4)$
11. x^4-1
12. x^4-81
五、利用十字交乘法因式分解：
13. x^2+4x+3 $(x+4)(x+3)$
14. x^2-3x-4 $(x-3)(x-4)$
15. $2x^2-7x+6$ $(2x-7)(x+6)$
16. $6x^2+x-12$ $(6x+x)(x-12)$
六、利用配方法因式分解：
17. $x^2+4x-77$
18. $x^2-9x-216$</td>
</tr>
</table>

(三)後測分析：答對率 13/18

學習成果顯示，研究對象已掌握提公因式、基本多項式除法、乘法公式、二次項係數為平方數及十字交乘法。尚未完全理解高次平方差與配方法，原因為教學時間限制，未能涵蓋全部概念。

整體而言，學生對已補救內容已展現明顯進步。錯題分析指出，其十字交乘法錯誤多因加減法計算失誤所致，非屬概念誤解。建議進一步透過重複練習強化計算準確度。


2024 12/4 20:00

13/18

後測題目

一、提公因式因式分解：

1. $8x + 12$ $=4(2x+3)$

2. $6x^2 + 3x$ $=x(6x+3)$ $=3x(2x+1)$

二、利用多項式除法因式分解：

3. $(x^2 - 3x - 2) \div (x - 2)$ $=x-1$

4. $(x^2 - 6x + 9) \div (x - 3)$ $=x-3$

三、利用乘法公式因式分解（和、差的平方）：

5. $x^2 + 6x + 9$ $=(x+3)^2$

6. $4x^2 + 8x + 4$ $=4(x^2+2x+1)=4(x+1)^2$ $=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 2+2^2$ $=(2x+2)^2$

7. $x^2 - 8x + 16$ $=(x-4)^2$

8. $16x^2 - 24x + 9$ $=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2$ $=(4x-3)^2$

四、利用乘法公式因式分解（平方差）：

9. $x^2 - 9$ $=(x+3)(x-3)$

10. $16x^2 - 25$ $(4x+5)(4x-5)$

11. $x^4 - 16$

12. $x^4 - 100$

五、利用十字交乘法因式分解：

$x^2 + 5x + 6$ $=(x+2)(x+3)$

$x^2 - 4x - 12$ $(x+2)(x-6)$

$3x^2 - 5x - 2$ $(x-2)(3x+1)$

$4x^2 + 3x - 10$ $(x-2)(4x+5)$ $(x+2)(4x-5)$

六、利用配方法因式分解：

$x^2 + 6x - 16$

$x^2 - 12x - 35$

二、個案學生使用平台學習「因式分解」後的心得與感受

(一) 學習歷程與體驗：

初期因不熟悉平台介面與操作流程而略顯排斥，但透過多次使用逐漸適應。教學影片提供循序漸進的概念說明，搭配簡易英文，有助於降低理解難度。即時回饋功能可立即指出錯誤並給予解釋，幫助學生在練習中自我修正。

(二)學習動機與興趣的變化：

過去對數學感到排斥與焦慮，主要因害怕錯誤與反覆失敗的經驗。平台中設計的互動機制如「學習進度獎章」成功引發其成就感。特別是「十字交乘法」在反覆操作後終於理解，使其信心大增，對數學產生初步的正向認同。

(三) 學習成效與自我評估：

學生自評對「因式分解」已有明顯進步，能掌握基本題型與解題邏輯。她能正確解釋因式分解如 $x^2 + 5x + 6$ 的步驟，並表示若能提早接觸此平台，將有更好的學習成果與心態調整。

(四) 平台使用回饋：

相較於傳統教學，IXL 平台提供更多自主學習彈性。學生認為平台設計更貼近自己的興趣與節奏，特別適合喜歡英文與圖像操作的學習者。錯誤可隨時修正、影片可重複觀看，學習過程更具掌握感與安全感。

研究結果一：

前導測(答對率 5/8)：小 C 具備代數基礎能力，但部分運算概念(如配分律)尚有迷

思。

前測(答對率 7/18)：對因式分解的基本概念(如提公因式、多項式除法)初步掌握，但在高次平方差及十字交乘法方面表現薄弱。

後測(答對率 13/18)：小 C 在補救教學後顯著提升了學習成效，掌握提公因式、乘法公式及十字交乘法等知識點。

尚未完成的配方法與高次平方差，因教學時間不足未納入平台練習，後續可持續進行補強，顯示小 C 在使用平台後，能提升學習效果。

研究結果二：

平台使用前：小 C 對數學的排斥心理源自國小時期的負面學習經驗，包括老師指責、同儕嘲笑與家庭壓力，使其對數學產生恐懼並失去信心。

平台使用中：透過鼓勵其語文優勢轉化至數學學習，搭配英文介面的熟悉感與即時引導，小 C 逐漸適應平台環境。特別是對「十字交乘法」的突破，重新建立其對數學解題的掌控感。

平台使用後：學生主動學習的意願提升，開始主動尋求問題解答，對錯誤接受度增加，展現持續學習的動機與信心。她表示未來願意更早開始學習、面對挑戰不再逃避。

伍、結論

本研究個案學生小 C 的後測成績從 38%提升至 72%，搭配訪談與學習日誌，證實學生在概念理解、計算熟練度與態度上皆有實質成長。建議未來教學可善用數位平台彈性，延伸應用至其他數學單元與不同學習族群，並針對尚未掌握的概念進行補強教學，提升教學效能。

個案小 C 在使用 IXL 數位學習平台進行「因式分解」單元的補救學習後，展現明顯的學習進步與態度轉變。平台的多元功能如教學影片、即時回饋、互動機制與成就激勵，有效降低其學習焦慮，重建學習信心。從初期排斥到最終願意主動學習，小 C 的學習歷程說明數位學習平台對低成就學生具有正向輔助效果。

主要參考文獻

D’Mello, S. K. (2021). The promise of AI in education: A twenty-year retrospective. Journal of Educational Psychology, 113(3), 421–439. https://doi.org/10.1037/edu0000600

Huang, C.-H.(黃秋香).(2015)。國中生因式分解錯誤類型分析與教學省思。數學教育學刊, 32(2), 45－68。

Liao, Y.-C., & Chen, H.-M. (2019). The effect of digital learning platforms on mathematics performance: A case study in junior high school. Curriculum and Instruction Quarterly, 22(1), 33–58.

Lin, Y.-C.(林玉琴).(2018)。國中生在因式分解學習中的常見錯誤與對策。課程與教學季刊, 21(3), 45－66。
Meier, A. (2021). Personalized digital learning platforms and student engagement: A meta-analysis. Educational Technology Research and Development, 69(6), 2915–2934. https://doi.org/10.1007/s11423-021-10004-3
Ministry of Education [教育部國民及學前教育署]. (2021). 國民中小學補救教學政策白皮書.
Ulum, Ö. G. (2023). The effect of the Khan Academy learning platform on students' achievement in mathematics. International Journal of Educational Methodology, 9(1), 55–68. https://doi.org/10.12973/ijem.9.1.55
Wu, H. J. (2016). Students' misconceptions in algebra: A review. Mathematics Teaching, 51(2), 77－98。
黃綺芳、林志成(2023)。運用數位載具與平台於扶助學習提升學生學習動機之成效探討。臺中市教育電子報，第 117 期。
陳美珍(2017)。國中學生使用十字交乘法時常見迷思與補救策略。國民教育學報, 26(1), 33－52。

A Case Study on the Use of a Digital Learning Platform for Junior High School Mathematics Remedial Instruction

Shen-Chao Lin[1] Ju-Fen Yao[2]
[1]Taichung Hsiao-Ming Girls' High School, Taichung City, Taiwan
[2]Department of Education, National Chiayi University, Chiayi City, Taiwan

Abstract

This case study explores the impact of using a digital learning platform in supporting junior high school mathematics remedial instruction, focusing on the third unit, "Factorization," from the first semester of the eighth-grade curriculum. The participant was a low-achieving student from a private junior high school in Taichung. Multiple research tools were employed, including pre-tests, post-tests, semi-structured interviews, and reflective journals, to examine the student's learning process and outcomes. The analysis revealed that after engaging with the digital learning platform, the student showed increased motivation and reduced resistance toward mathematics learning. Through instructional videos and immediate feedback provided by the platform, the student successfully grasped key concepts in factorization, such as factoring out the greatest common factor and applying the cross-multiplication method. The student's post-test score improved from 38% to 72%. The findings suggest that the platform helped alleviate learning anxiety and enhanced academic performance through systematic and repeated practice. This study recommends the application of digital learning platforms in other mathematics units and among diverse student populations to further evaluate their effectiveness and generalizability.

Keywords: digital learning platform, factorization, mathematics remedial instruction, learning process

應用三階段評量探討國小五年級學童
在因倍數問題的解題表現

林沁儀[1]　林原宏[2]

[1]國立臺中教育大學數學教育系 a603307963@gmail.com
[2]國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在發展三階段評量診斷工具，據以探討國小五年級學童在因數與倍數問題上的迷思概念(misconception)，分析學童在因數、倍數問題的解題表現和類型，並探討和後設認知表現之相關。本研究以 215 位來自不同地區的國民小學五年級學童為對象，研究工具採用自編國小五年級因數、倍數的三階段評量。研究結果顯示：(一)本測驗試卷結果以 Cronbach’s Alpha 係數的信度係數結果為.677及.854，顯示本測驗試卷為信度良好試卷。(二)用 Pearson 積差相關分析試題鑑別度，所有試題相關係數皆達顯著水準(<.05)，表示試題能區辨學生的答題能力。(三)事實性知識判斷能力方面：答對率最低的錯誤類型是「尋找倍數時，出現遺漏本身之情形」，答對率為.34，顯示學童易忽略每個數自身即為最小倍數。（四）詮釋性知識的解釋能力方面：學童在「尋找因數時，出現遺漏 1、本身或部份因數之情形」平均得分最低，只有.70 分，顯示其在解釋時容易忽略從最小因數 1 開始列舉或未完整找出所有因數。整體而言，本研究的評量工具具備良好的信度與鑑別度，可作為未來探討國小學童因數與倍數概念理解的參考依據。

關鍵字：因數、倍數、三階段評量、建構反應題、後設認知

壹、緒論

一、研究動機與背景

本研究者在擔任高年級導師的教學期間，發現學生在因數與倍數此單元容易陷入困境，因數與倍數除了在定義和語意上難以理解，容易產生迷思概念之外，相關研究指出因數之概念十分抽象，在生活中難以使用實際物件進行說明與操作(黃國勳、劉祥通，2002)。因此，部分剛升上高年級的學童在面對此單元時容易發生學習困難之現象。然而，因數與倍數對學童在往後的數學學習發展有著相當重要性，在國小階段因數概念為等值分數與比例概念的基礎(劉祥通、周立勳，1999)，中學後則會有數列與級數、多項式等相關單元。若學生無法妥善奠基因數與倍數的基礎概念，往後對於較高階的數學將產生銜接困難，故對學生在因數與倍數單元的概念進行診斷有其必要性，此為本研究動機之一。

對於教師而言，因數與倍數亦為較難的教學的單元，新進教師仍可能對因倍數出現辨識乘法關係的問題(Dias,2005)。許多老師也容易將因數與倍數當成工具性的知識，強調其找尋因數的程序與計算，忽略了建立概念的重要性(劉祥通、黃國勳，2003)。相關實徵研究採用遊戲、活動等學生熟悉的經驗進行教學，建立因數與倍數的概念。基於教師教學的立場，提升教師專業是影響學生學習成效

的原因之一，評量並分析學生的學習結果，亦有助於追蹤、了解學生的學習問題，進而協助教師針對學生的迷思概念擬定教學計畫(Ojose,2015)。因此，本次研究將以發展評量工具為目標，建立有助於教師檢測學生因、倍數單元之評量工具。本研究需了解學生的思考過程，以利教師透過學生的作答內容進行分析。開放性評量(open-ended assessment)較符合本研究之目的，Wijaya(2018)指出開放性評量有利於學童使用多種解決策略進行解題。因此，本研究試題以建構反應題(constructed-response items)作為開放性評量試題之類型，使教師能從建構反應試題中獲取較多的學習訊息(胡詩菁、鍾靜，2015)，此為本研究動機之二。

二階段診斷評量 (two-tier assessment)，在教育研究和實務中被廣泛應用，特別是在蒐集迷思概念資料時，但在此評量工具中亦存在著假正(false positive)之可能性(Hestenes ＆ Halloun,1995)。因此本研究將發展三階段診斷評量工具(three-tier assessment)，分別為內容層(content tier)、信心層(confidence tier)、理由層(reason tier)，針對進行學生對自我認知理解的信心評估，並分析學生對概念的理解與迷思。而信心評估為一種後設認知(meta-cognition)之應用，Flavell (1979) 認為後設認知能力可以幫助學生在學習過程中進行自我調整。故此次研究所發展之三層次問題將檢測學生的概念理解情形，經由學生的解釋和信心程度測量，有效區分出概念理解錯誤與迷思概念的功能，並促進學生反思自己的學習，發展後設認知能力。因此，本研究希望發展一套評量工具，透過學生的解題表現與類型分析學生可能的迷思概念，並探討學生的評量結果與後設認知之相關，協助教師分析學童在因數與倍數學習的困境，此為本研究動機之三。

二、研究目的

本研究旨在發展三階段評量診斷工具，透過三階段評量測驗與建構反應試題，探討國小五年級學童在因數與倍數問題中的表現與類型，以及學童的評量結果和後設認知表現之相關。本研究主要研究目的如下：

(一)發展適用於國小五年級學童在因數、倍數的三階段評量試題。

(二)分析國小五年級學童在因數、倍數各階段解題表現相關性。

貳、文獻探討

一、因數與倍數的先備知識

(一)乘除法概念

依據十二年國民基本教育課程綱要(教育部，2018)的學習內容，學童在現階段應能應用乘、除運算與其互逆關係，解決乘、除法問題。然而，因數與倍數的學習在概念上較為抽象，因此學童需要紮實的先備知識作為支撐。黃國勳、劉祥通(2003)指出，學童在學習因數與倍數概念前，需先熟悉整數的乘除法。劉秋木(1996)更指出因倍數概念與整數乘除有著緊密的概念網絡，此網絡不僅顯示加、減法為乘、除法的下位概念，更表示學童若未具備整數乘除法之能力，將會在學習此單元時面臨困難。

(二)整除概念

整除概念的學習應先理解「某數是否能被另一個數整除」，進而辨別「某數能被哪些單位量整除」。且整除、因數與公因數的學習發展通常以「純數字計算」作為基礎，逐步過渡到「應用文字題」。整體而言，學童的因數概念發展順序為：整除→因數→公因數。黃玉雙(2011)研究發現，學童在因數與倍數問題中的錯誤原因眾多，其中未理解整除概念、誤以為某數的因數最大值不超過該數的一半，

皆是學童常見的問題。

二、因數與倍數迷思概念的探討

(一)概念定義混淆不清

Rubenstein 和 Tompson(2002)指出，因數與倍數的語言特性容易讓學生產生混淆，學生經常無法清楚區分因數與倍數的概念。而當學習進一步涉及最大公因數與最小公倍數時，學生容易依賴關鍵字解題，而非真正理解其數學意義(Kolitsch & Kolitsch, 2011)。此外，「倍數」與「倍」在語言上雖然相近，但意義完全不同。單元中所指的倍數僅限於正整數範圍，因數與倍數必然為正整數。然而，倍的概念則不限於正整數，可能包含小數或分數，例如 0.8 倍或三分之一倍等。這種語言上的差異容易使學生混淆。因此，在教學中，教師應仔細區分倍數與倍的概念，並在口語表達時，精準區分兩者的數值範圍與使用時機，以幫助學生建立正確的數學概念(康軒，2024)。

(二)找尋因數、倍數時易有缺漏

黃培甄和葉啟村(2005)整理出，學童在學習因數與倍數單元時，常見的迷思概念包括：依賴關鍵字解題、因數列舉不完整、缺法對因數與倍數概念的理解，以及無法統整因數與倍數之間的關係。這些迷思可能源於學生對因數與倍數特性缺乏清晰的認識，或在列舉倍數時，未按順序系統性地乘上1,2,3,...，導致遺漏倍數或錯過最小公倍數(康軒，2024)。

(三)誤解或看不懂題意

數學素養的一個重要項目是將生活中的挑戰與問題，因此，題型設計常融入多元的生活經驗，利用清晰的文字敘述來描述問題情境。然而，研究者在實際教學中發現國小學童除了學習數學概念外，還面臨生活情境貧乏及閱讀量的挑戰，這使得學童普遍認為文字題解題是一項困難的任務。陳珠惠(2012)指出，學生在解答文字題時，除了需要理解文字題的語意外，還必須分析問題中的解題目標及相關條件，並將語文形式轉譯成數學算式、熟悉計算，才能順利解出文字題，這樣複雜的解題過程，往往讓學童感到困難並導致混淆。

三、多階段評量的意涵

本研究的三階段評量發展自Treagust (1988)所提出的兩階段評量，兩階段評量改善了過去多項選擇題(multiple-choice questions)在測驗上遇到的問題，如透過選擇題只能瞭解學生答題正確或錯誤，卻無法得知學生是利用正確概念還是錯誤推理而作答正確。Caleon & Subramaniam (2010)指出，兩階段評量不僅能在第一階段測量學生在認知概念題的理解程度，還能於第二階段的題目中測量學童答題的背後原因。因此評量在命題階段時，編制者需清楚知識內容，並確認選用的教

學內容是否合宜，再利用內部一致性檢核題目與知識概念的相關性。為了區分學童在第一階段是在真實理解的情形下作答正確，需增加學童對答題的信心層。因此研究者將發展三階段評量工具測量學生在因數與倍數的表現，第一階段編制診斷概念錯誤的題目，於第二階段的信心層瞭解學童對敘述性知識的理解程度。

參、研究架構與設計

一、研究架構

本研究旨在發展三階段評量診斷工具，透過三階段評量測驗與建構反應試題，探討國小五年級學童在「因數與倍數」問題中的表現與類型，以及學童的評量結果和後設認知表現之相關。研究計畫架構如圖一所示。

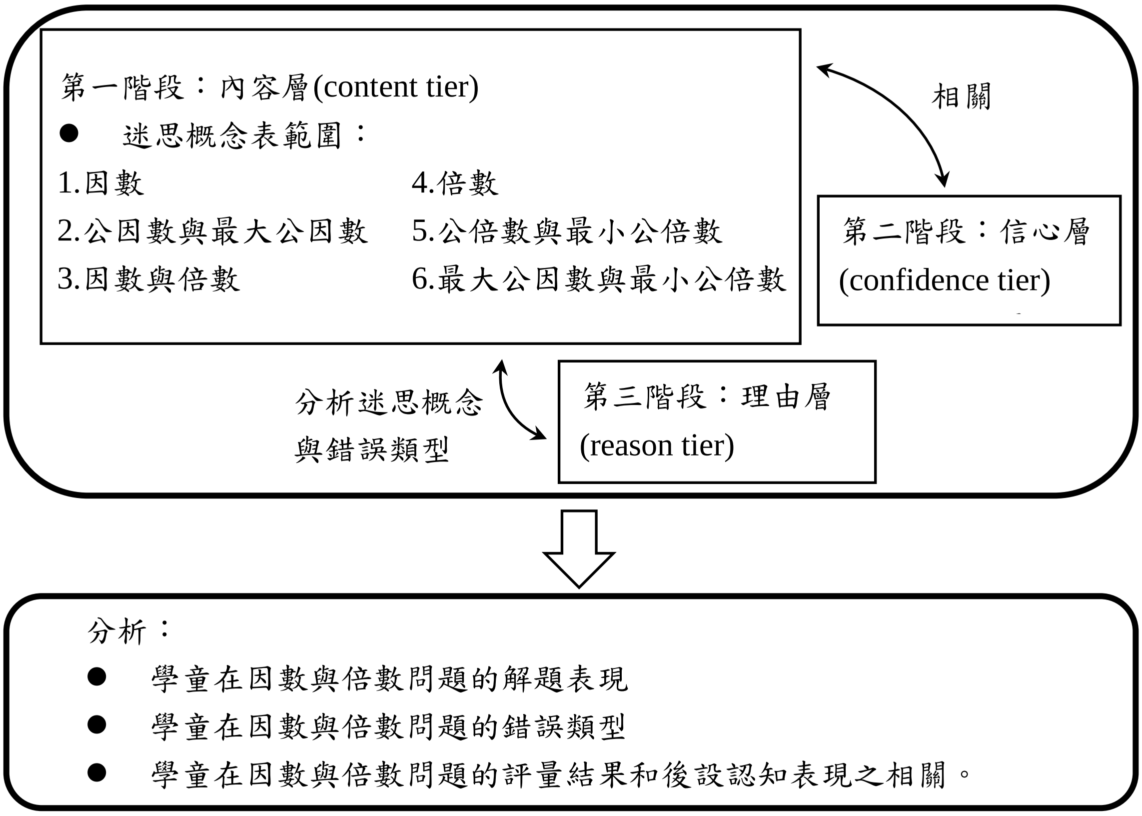


圖1 研究架構

二、研究對象

本研究為確保試題的設計與用字遣詞是否合宜，故於正式施測前先針對部分班級的學童進行預試，以了解學童的學習狀況與情境理解情形。本研究在預試結束後進行試卷分析、修正與分類迷思錯誤。正式施測的研究對象分別為新北市E國民小學3個班級、桃園市F國民小學1個班級、桃園市G國民小學5個班級、台中市H國民小學3個班級，共計12個班級，施測人數為215人。

三、研究工具

本研究工具為本研究者自編之國小五年級因數與倍數三階段試題，研究內容包含建構反應試題與後設認知表現。茲說明如下：

(一)試題編製方法：本研究參考自相關文獻與十二年國民基本教育課綱，試題內

容包含陳述性知識概念的理解、錯誤類型的迷思分析。本測驗共有13題，每題皆有三階段。第一階段為勾選題，根據題目的陳述判斷其敘述是否正確。第二階段為信心評量，針對第一題的結果進行信心程度的勾選。第三階段為開放性試題，讓學生根據第一題的答案自行運用文字敘述、算式紀錄或表格繪製等對原因進行闡述，並以建構反應試題的方式進行計分。三階段評量之編制原則與範例對照表如表1。

(二)統計分析：本研究以統計軟體進行統計分析，針對研究結果進行信度、難度與鑑別度的量化分析。

表1 三階段評量之編製原則與範例對照表

試題舉例	階段評量目標	說明
1. 以下是幾位同學找出 24 所有的因數： 小希：2、3、4、6、8、12 小安：2、3、4、6、8、12、24 小慈：24、48、72、96 (1)你認為誰的說法正確？(請勾選) □小希 □小安 □小慈 □都不正確	第一階段： 判斷學生對敘述性知識概念的理解是否正確。	學生根據題目的敘述進行判斷，以此分析學生對此單元的知識概念程度為何。
(2)你對題目(1)理由的正確性有信心嗎？(請勾選) □非常有信心 □有信心 □沒有信心 □非常沒有信心	第二階段： 評量學生後設認知的能力。	讓學生依據第一題的回答進行自我信心的評估，該階段的結果將影響其後設認知的評量。
(3)請你針對題目(1)選擇的答案，寫出你的理由：	第三階段： 以建構反應試題評量學生的詮釋性知識。	學生根據第一題的答案自行運用多元的方式對原因進行闡述，並以建構反應試題的方式進行計分，以獲得學生的解題類型，並針對錯誤類型進行分析。

肆、研究結果與討論

一、研究工具信度與鑑別度分析

(一)信度分析

本研究採用內部一致性分析來考驗試卷的信度，其中又以 Cronbach's α 係數的信度分析為主，而 Cronbach's α 值介於.7 至.9 表示是題是良好且可接受的。經 SPSS 統計軟體分析後，本研究在第一階段與第三階段分別為.677 及.854，因此可知本試卷之信度可以接受。

(二)鑑別度分析

鑑別度為檢測該試題是否能有效區分不同程度之學生，其數值介於-1 至 1 之間，當數值愈大，表示試卷能有效區分學生程度。本研究使用 Pearson 積差相

關係數進行試卷鑑別度的分析，當 Pearson 積差相關係數達顯著水準(p<.05)時，表示該題的分數與總分有著高度相關性，也代表該試題具有鑑別度。本研究第一階段與第三階段試題皆達顯著正相關，因此本試題皆有效區別學生能力的高低。

二、描述性統計分析

(一)事實性知識的判斷能力

依研究結果所得的統計如表 2 分析可知，第一階段答對率最低的錯誤類型是關於倍數的問題，答對率為.34，在此題型中學生容易忽略每個數的最小倍數，顯示學生忽略每個數自身即為最小倍數；其次，關於公倍數的問題，答對率為.40，此題須先理解應用題的題意，並將抽象的因倍數概念應用於生活化情境，而多數學生不理解題意導致答題錯誤。答對率較高的概念皆關於因數的問題，答對率皆高於.9，可歸類為較簡單的題目，表示對多數學生而言是有正確概念的。

(二)詮釋性知識的解釋能力

本測驗第三階段進行詮釋性知識測驗，以建構反應題的計分方法進行編碼。得分編碼分別為 0、1、2 三種得分，答案完整且正確時將予以 2 分；答案部分正確或部分缺漏時予以 1 分；答案完全錯誤、不相關或空白時則予以 0 分。由於此評分是評分者依照自訂之評分規準進行分析與計分，因此，在此評分中需要由其他評分者協同對試題再次計分，以驗證評分者於計分之一致性、客觀性。研究顯示第三階段在因數相關的題目中平均得分最低，只有.70 分，顯示其在解釋時容易忽略從最小因數 1 開始列舉或未完整找出所有因數；其次為公因數與最大公因數相關的題目，得分是.71，學童解釋能力受限，影響答題表現。

表 2 第一階段與第三階段描述性統計摘要表

向度	錯誤類型	第一階段			第三階段			
		答對率	判斷正確 人數百分比	判斷錯誤 人數百分比	平均得分	2 分 人數百分比	1 分 人數百分比	0 分 人數百分比
因數	尋找因數時，出現遺漏 1、本身或部份因數之情形	.42	41.4	58.6	.70	26.5	17.7	55.8
	認定兩數中，數字較大者的因數較多	.92	91.6	8.4	1.48	71.2	6.0	22.8
	直覺判定奇數的因數只有 1、本身	.87	86.5	13.5	.90	23.3	43.7	33.0

	誤解教材內容之概念	.90	89.8	10.2	1.48	62.3	24.2	13.5
公因數與最大公因數	易忽略1是任兩數的最小公因數	.80	79.1	20.9	1.40	67.9	4.7	27.4
	無法了解最大公因數在情境的意義與應用	.78	77.7	22.3	1.10	55.3	0	44.7
	無法理解與轉譯文字題，並使用錯誤概念尋找最大公因數	.40	39.1	60.9	.72	33.0	2.3	64.7
因數與倍數	對因數與倍數的專有名詞理解有困難	.77	76.7	23.3	1.10	36.7	36.7	26.5
	因粗心而產生遺漏或多選之困難	.76	75.8	24.2	1.08	38.6	31.2	30.2
倍數	尋找倍數時，出現遺漏本身之情形	.34	33.5	66.5	1.10	28.8	53.0	18.1
公倍數與最小公倍數	尋找公倍數之方式錯誤	.74	74.4	25.6	.84	26.5	29.8	43.7
	尋找最小公倍數時，出現遺漏兩數其中一數即為最小公倍數之情形	.68	67.9	32.1	1.10	53.0	4.2	42.8
最大公因數與最小公倍數	混淆最大公因數與最小公倍數之概念	.69	68.8	31.2	.98	44.7	8.8	46.5

註：*第一階段答對率* $= \frac{\text{判斷正確人數}}{\text{總人數}-\text{未作答人數}}$，不包含為作答人數。

三、Pearson 積差相關分析

第一階段在評量學生是否具備判斷事實性知識是否正確的能力，第二階段為評量學童對於判斷敘述性知識是否有信心，第三階段為評量學生詮釋性知識的解釋能力；採用 Pearson 積差相關的分析方式，由表 3 可知，第一階段與第二階段之間的顯著正相關性，亦即學童判斷事實性知識的能力越好，其後設認知能力也

越佳。而第一階段與第三階段之間的顯著正相關性，即為事實性知識判斷能力較佳者，詮釋性能力也較好。然而，在第一階段與第二階段的相關中，第3題與第7題並未達到顯著相關，經分析發現在第3題學童的表現多為第一階段判斷正確，但對自己的答案缺乏信心，而第7題的表現則多為在第一階判斷錯誤，但對自己答案很有信心。

表3 第一階段與第二階段相關係數檢定摘要表

題號	第一階段與第二階段之相關	第一階段與第三階段之相關
1	.624**	.793**
2	.265**	.494**
3	.118	.461**
4	.338**	.442**
5	.239**	.685**
6	.314**	.574**
7	-.095	.678**
8	.310**	.490**
9	.440**	.676**
10	.478**	.426**
11	.268**	.462**
12	.346**	.697**
13	.441**	.544**

*p<.05

伍、結論與建議

在十二年國教基本課綱中，國小階段的學童在此單元容易陷入困境，除了在定義和語意上難以理解，也容易產生迷思概念，甚至難以連結到生活情境當中來解決問題，未來教師在相關單元進行授課時，可先建立學生穩固的基礎概念，並針對容易發生的錯誤概念進行加強。最後，根據本研究發現，未來可設計此單元在不同日常生活情境中的應用題，或是深入探討此單元在文字應用題時，使學生感到困難的因素，幫助學生瞭解如何利用此單元的概念解決日常生活中的問題。本研究所探討整理學生常見的因數與倍數迷思概念，期能對國小教師未來的教學有所幫助。

陸、參考文獻

教育部(2018)。**十二年基本國民教育課程數學領域綱要**。臺北市：教育部。

教育部(2020)。**十二年基本國民教育課程綱要數學領域學習手冊**。臺北市：教育部。

胡詩菁、鍾靜(2015)。數學課室中應用建構反應題進行形成性評量之研究。**臺灣**

數學教師，**36**(2)，26-48。
康軒編撰委員會(2024)。**國民小學數學教學手冊**。第十一冊。臺北市：康軒。
陳珠惠(2012)。**國小五年級學童因數與倍數文字題解題歷程之研究**〔未出版之碩士論文〕。國立臺中教育大學：臺中市。
黃玉雙(2011)。**國小五年級學童在因數與倍數問題表現之研究-以高雄縣市為例**〔未出版之碩士論文〕。國立屏東教育大學：屏東。
黃培甄和葉啟村(2005)。**國小六年級因數與倍數單元之創新架構研究**〔未出版之碩士論文〕。國立臺南大學：臺南市。
黃國勳、劉祥通(2002)。歡樂滿堂的數學課－因數教材創新教學之實踐。**科學教育研究與發展季刊**。26，52-64。
黃國勳、劉祥通(2003)。五年級學童學習因數教材困難之探討。**科學教育研究與發展季刊**。30，52-70。
劉秋木(1996)。**國小數學科教學研究**。臺北市：五南。
劉祥通、周立勳(1999)。國小比例問題教學實踐課程之開發研究。**臺中師院數理學報**，**3**(1)，3.1-3.25。
劉祥通、黃國勳(2003)。實踐小學因數教學模組之研究。**科學教育學刊**，11 (3)，1-22。
Akturk, A. O., & Sahin, I. (2011). Literature review on metacognition and its measurement. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 15,* 3731–3736.
Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32-42.
Caleon, I., & Subramaniam, R. (2010). Development and application of a three-tier diagnostic test to assess secondary students' understanding of waves. *International Journal of Science Education*, *32*(7), 939–961.
Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906–911.
Kolitsch, S., & Kolitsch, L. (2011). Greatest common factors and least common multiples with Venn diagrams. *Louisiana Association of Teachers of Mathematics Journal, 5*, 1–7.
Ojose, B. (2015). Students' misconceptions in mathematics: Analysis of remedies and what research says. *Ohio Journal of School Mathematics, 72*, 30-34.
Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics, 9*(2), 107–113.
Treagust, D. F. (1988). Development and use of diagnostic tests to evaluate students' misconceptions in science. *International Journal of Science Education, 10*(2), 159-169.

Application of three-tier assessment to explore the performance of elementary school 5^{th} students in solving factors and multiples.

Chin-Yi Lin [1] Yuan-Horng Lin[2]

[1] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

[2] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

This study was to develop a three-tier assessment to investigate the misconceptions of fifth-grade elementary school students regarding factors and multiples. The study aimed to analyze students' performance and problem-solving types related to factor and multiple problems and explore the correlation between their assessment results and metacognitive performance.

There were 215 fifth-grade students who come from different regions, with the research tool being a self-developed three-tier assessment on factors and multiples for fifth-grade students. The results of the study are as follows: (1) The reliability coefficient of the test, as measured by Cronbach's Alpha, was .677 and .854, indicating that the test had good reliability. (2) Pearson's correlation analysis of the item discrimination showed that all item correlation coefficients were significant (<.05), indicating that the items could effectively differentiate students' abilities. (3) Regarding factual knowledge judgment ability, the lowest accuracy rate was observed in the error type of "missing the number itself when identifying multiples," with an accuracy rate of .34, suggesting that students tend to overlook that each number is its own smallest multiple. (4) Regarding interpretive knowledge and explanation ability, students had the lowest average score of .70 when "identifying factors and missing 1, the number itself, or some factors," indicating that they often overlooked starting from the smallest factor 1 or failed to list all factors completely. Overall, the assessment tool developed in this study demonstrated good reliability and discrimination, making it a valuable reference for future research on elementary school students' understanding of factors and multiples.

Keywords: factors, multiples, three-tier assessment, instrument, constructed-response items, metacognition

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(7) 其他數學教育和數位議題

研討主題

「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系

台灣數學教育學會

國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

國小高年級學生數學情緒初探

張榆平[1] 林原宏[2]

[1]國立臺中教育大學數學教育系 betty860929@gmail.com

[2]國立臺中教育大學數學教育系 lyh@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究旨在發展並驗證國小高年級學生的數學情緒量表，並探討學生在不同背景變項下的數學情緒差異。數學情緒指學生在數學學習、解題及評量時所產生的情緒，影響其動機與學習表現。Pekrun(2006)的控制-價值理論指出，情緒受學生對任務的控制感與價值感影響，進而影響學習態度、動機與成績。因此，本研究欲發展適用於國小高年級學生的數學情緒量表，並分析情緒表現，以及不同背景下數學情緒差異情形。本研究共 868 位國小高年級學生進行施測，本研究設計之數學情緒量表，共分為快樂、得意、焦慮、憤怒、無聊五個向度，使用 Likert 五點量表進行測量。根據結果顯示：(一)量表信度值為.767，具良好信度；(二)因素分析共萃取出五個因素，符合量表設計的五個向度，可解釋總變異量達73.168%，具良好效度；(三)不同性別之國小高年級學生在數學情緒，快樂、焦慮、憤怒、無聊具有顯著差異，且在負面情緒焦慮、憤怒、無聊中，國小高年級女生的平均數皆高於男生，而在正向情緒快樂中，國小高年級女生的平均數則是低於男生；不同年級之國小高年級學生在數學情緒中，則是均未達顯著差異。本研究結果可為國小數學教學提供參考，幫助教師設計更有效的教學策略，減少學生的負面情緒並提升學習動機。

關鍵字：數學情意、數學情緒量表

壹、緒論

一、研究動機與背景

「核心素養」是指一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度(教育部，2014)。核心素養強調學生除了需具備知識和技能，還需要發展全人教育，包括情感、態度、價值觀等。而情緒(emotion)在學生的學習過程中扮演著重要角色，正向的學習情緒可促進積極的學習態度，負面情緒則會減弱學習態度。Pekrun(2006)的控制-價值理論(Control-Value Theory, CVT)指出，學生的情緒會受到他們對任務的控制感(即自我效能感)和價值感(即學習內容的意義或重要性)的影響，而情緒也會進而影響到學習態度、動機和學業表現，由此可知，情緒和學習態度密不可分。然而，近年學習情緒相關的文獻甚多，但多半以國中生、高中生和大學生為對象，國內以國小為對象並且針對數學領域的相關研究相對比較少，因此，研究者希望能夠分析國小高年級學生對於數學的情緒為何，此為研究動機之一。

臺灣的教育制度中，高度重視升學考試，而數學成績也常常被視為關鍵的學科之一，在學業壓力的環境下，學生因此會對數學感受到壓力。在PISA 2022

的結果中發現，臺灣學生的數學測驗結果高居第3名，但學生的數學焦慮卻超越OECD所有國家的平均值，除此之外，在TIMSS 2023的結果顯示，雖然臺灣學生數學成績表現名列全球前三，但是在四年級和八年級的受試者當中，不喜歡、沒自信學數學的比例卻明顯高於國際平均，甚至臺灣學生不喜歡數學的比例，從四年級的46%，提高到八年級的61%。由此推測，年級越高，對於數學的喜歡程度可能越低。除此之外，許多文獻發現，女生在數學學習中，會表現出較高的數學焦慮，女生在數學焦慮和情緒表現上通常比男生更明顯，這也影響了她們的學習表現(Pekrun,2006)。國外研究顯示，女生因認為自己在數學上的能力較差，對於數學的自我效能感(self-efficacy)偏低，造成長期對於數學焦慮的感受度較男生高(Goetz et al.,2013)。因此，本研究欲分析，在不同背景變項下，國小學童的數學情緒差異情形為何，此為動機之二。

二、研究目的

根據研究動機所述，本研究將針對國民小學高年級學生，具體之研究目的詳述如下：

1. 發展國小高年級學生數學情緒量表並驗證工具品質。
2. 進行國小高年級學生數學情緒表現的描述性分析。
3. 分析國小高年級學生在不同背景變項下的數學情緒差異情形。

貳、文獻探討

一、情緒的意涵與相關研究

情緒是人類對特定事件、環境或內心狀態的反應，通常伴隨著生理變化、心理狀態和行為表現。張春興(2006)認為情緒是由某種刺激(外在刺激或是內在身體狀況)所引起的個體自覺心理失衡狀態。失衡的心理狀態包含極為複雜的情感性反應(喜、怒、哀、樂、愛、惡、欲)，代表著情緒具有複雜性。此外，情緒具有適應功能，心理失衡狀態的出現，往往是為了提醒個體對環境或身體狀況做出適當的應對，例如：恐懼促使人避開危險、憤怒激發個體保護自己或爭取權益。因此，情緒不僅是心理的體驗，還伴隨著生理的變化(如：心跳加速、流汗等)，並可能影響個體的行為表現與決策。

Pekrun 等人(2002)在學業情緒研究指出，情緒為學生在學習和考試過程中所產生的情緒反應，這些情緒對學生的學習動機、參與度以及學業表現具有重要影響。研究顯示，那些學業表現不佳的學生可能會採取有害的情緒模式，進而影響他們的學業成就(Lichtenfeld et al.,2012)。因此，在小學階段調查學生的情緒狀態，並實施有助於改善情緒的干預措施，具有極為重要的意義。

二、數學情緒的意涵與相關研究

根據 Pekrun(2006)提出的「控制—價值理論」(Control-Value Theory，簡稱CVT)，數學情緒(mathematics emotions)主要指學生在數學學習、解題及評量過程中所體驗到的多樣情緒，如焦慮、成就感、興趣和挫折等，這些情緒會深刻影響學生的學習動機、行為和學業表現。

數學情緒係指學生在面對數學相關活動時，根據自我效能感與個人價值感

所產生的情緒反應(Pekrun et al.,2002)。其中，自我效能感會影響情緒體驗。例如，當學生感到有能力理解數學概念並解決數學問題時，較容易產生興奮或滿足等積極的情緒；相反地，當感到困難或無法掌控時，可能會出現焦慮或挫折等負面情緒。而個人價值感代表著當學生覺得數學學習或成就對他們來說很重要時，會投入更多情感，情緒強度也相應增加。例如，如果學生認為數學成績對未來生涯有幫助，就可能產生較高的學習動機與情感反應。因此，了解學生的數學自我效能感與多樣性情緒具有其重要性，這不僅有助於教師掌握學生在學習過程中的心理狀態與情感反應，還能幫助教師針對性地設計教學策略，提升學生的學習動機。

Pekrun 等人(2002)將情緒區分成兩種，一為積極情緒，如興趣、愉悅，另一為消極情緒，如焦慮、沮喪，他認為這兩種情緒對學生的學習和表現都會產生重要的影響。且積極的情緒，如享受、希望和自豪感，能促進內在與外在的動機，鼓勵學生採用靈活的學習策略並進行自我調節，因而在大多數情況下對學習成績產生正面影響。相反地，消極的情緒，如絕望和無聊，則會減少學習動機，並抑制對任務的深入處理，進而對表現產生負面影響(Pekrun et al.,2002)。 由上述可知，數學情緒在學生的學習過程中扮演著極其重要的角色，對學習動機和學業成效產生深遠影響。積極的數學情緒能夠激發學生的學習熱情和內在動機，而負面的情緒則可能成為學習上的障礙，降低學生的學習意願和學業表現。

因此，本研究將針對國小高年級學生的數學情緒進行初步探討，分析可能影響學生數學情緒的因素，並進一步了解國小高年級學生之數學情緒表現，為教學者提供策略，幫助他們更有效地調整教學方法，以促進學生的數學學習成效。教學者亦可透過了解學生的情緒狀況，在教學中設計提升積極情緒的活動或課程，減少學生在數學學習中的焦慮與困難，提升學習動機與學習效果。

參、研究架構與設計

一、研究架構

本研究根據文獻分析，發展國小高年級學生數學情緒量表，將量表分為背景變項、數學情緒兩部分。其中背景變項包含了「性別」和「年級」；數學情緒量表將數學情緒分為「快樂」、「得意」、「焦慮」、「憤怒」、「無聊」五個向度設計題目。

本研究以國民小學高年級學生為對象，而試題編製採用 Likert 五點量表的形式計分，藉由量表蒐集與統計分析，探討國小高年級學生數學情緒的現況，以及了解國小高年級學生在不同背景變項下的數學情緒差異情形。

二、研究對象

根據本研究量表發展之目的，並提升樣本蒐集的效率，本研究採用量表調查法，以便利取樣(convenient sampling)方式進行資料蒐集。本研究施測時間為

113 年 6 月，並於該月底完成施測，樣本取自北、中、南 5 個縣市 12 所國民小學，39 個班級，研究對象為國小五、六年級的學生，共 868 位國小高年級學生進行施測，其中有 32 份問卷有問卷試題未填答或全部勾選同一選項，視為無效樣本，其餘 836 份問卷為有效樣本，問卷回收率 96%。

三、研究流程

在本研究確定主題後，開始蒐集國內外和數學情緒相關之文獻進行探討其內涵，最後根據綜合 Pekrun 等人所發展的成就情緒問卷(AEQ-M)和成就情緒問卷-小學版(AEQ-ES)，研擬出針對本次研究目的之國小高年級數學情緒量表。於預試分析後，修訂為正式量表。經由正式量表回收之樣本資料進行統計分析，建立信度與效度。最後，將分析結果進行撰寫，討論及檢討。

四、研究工具

(一)量表題目建構

本研究為了解國民小學高年級學生數學情緒之相關情形，使用量表來當作主要研究工具，基於研究倫理考量，在本研究中，國小高年級學生填答問卷採匿名的方式進行。所使用的研究工具為研究者蒐集和彙整相關的文獻資料後，自行編製符合國小高年級學生的數學情緒量表試題，本研究測驗工具分為背景變項、數學情緒兩大部分。

1.背景變項：性別、年級。

2.數學情緒量表向度：快樂、得意、焦慮、憤怒、無聊。

(二)量表計分方式

本量表為符合受試者的閱讀理解能力，編製試題主要以肯定敘述語句。而受試學生可依據量表試題內容勾選其最符合自身情緒感受的選項。本研究採取 Likert 五點量表的形式來計分，1 分代表「非常不同意」、2 分代表「不太同意」、3 分代表「有點同意」、4 分代表「很同意」、5 分代表「非常同意」。

五、結果分析

本研究主要目的為能發展一份具有良好信度與效度的量表，因此研究者將蒐集之資料進行各項結構的分析。以自編國小高年級數學情緒量表作為蒐集資料工具，將施測得到之樣本資料透過 SPSS 統計軟體進行統計分析，了解量表工具的信度和效度，建構出一份具有良好結構之量表。

肆、研究結果與討論

一、數學情緒量表信度分析

本研究以 Cronbach's α 信度分析，針對國小高年級數學情緒量表探討量表檢視題目間的內部一致性，整份量表分析結果信度值為.767，表此本研究所發展數學情緒量表之信度可以接受，各分量表的信度值如下表 1 所示。

表 1 各分量表信度分析表

各向度名稱	題數	分量表 Cronbach's α 值
快樂 (enjoyment)	7	.921
得意 (pride)	5	.887
焦慮 (anxiety)	5	.863

憤怒 (anger)	6	.946
無聊 (boredom)	4	.918

二、數學情緒量表因素分析

本研究以探索性因素分析來瞭解整份量表之建構效度，透過KMO的整體取樣適切性量數為.940，Bartlett 的球形檢定值達顯著水準($p<.001$)，表示此資料矩陣具有足夠的相關強度進行探索性因素分析。

經預試題目修改，並實施正式問卷調查後，根據探索性因素分析結果顯示，共萃取出五個因素，符合研究者量表設計的五個向度，可解釋的總變異量達到73.168%。根據表2可以瞭解到各向度內的成分，第一向度「快樂」被分類在因素二，第二向度「得意」被分類在因素三，第三向度「焦慮」被分類在因素四，第四向度「憤怒」被分類在因素一，第五向度「無聊」被分類在因素五，各向度題目分別屬於不同因素。

表 2 國小高年級學生數學情緒量表因素分析摘要表

向度	題號	因素負荷量				
		因素一	因素二	因素三	因素四	因素五
快樂	1		.802			
	2		.780			
	3		.756			
	4		.793			
	5		.811			
	6		.577			
	7		.678			
得意	1			.813		
	2			.829		
	3			.837		
	4			.786		
	5			.700		
焦慮	1				.758	
	2				.823	
	3				.813	
	4				.794	
	5				.765	
憤怒	1	.795				
	2	.833				
	3	.868				

	4	.824		
	5	.857		
	6	.830		
無聊	1			.782
	2			.794
	3			.680
	4			.792

三、數學情緒量表描述性分析

(一)不同性別的國小高年級學生在數學情緒的差異比較

根據描述性分析，說明國小高年級學生在不同性別之下，數學情緒的差異情形，下表 3 為獨立性 t 檢定的分析結果，從表中得知，將性別分為男、女兩組進行差異比較，男生樣本數為 390 人，女生樣本數為 446 人，不同性別的國小高年級學生在數學情緒「得意」向度中，顯示無顯著差異，其餘「快樂」、「焦慮」、「憤怒」、「無聊」四向度，均達到顯著差異，且在負面情緒「焦慮」、「憤怒」、「無聊」三向度中，國小高年級女生的平均數皆高於男生，而在正向情緒「快樂」向度中，國小高年級女生的平均數則是低於男生。

表 3 不同性別的國小高年級學生在數學情緒的差異比較摘要表

向度名稱	性別	人數	平均數	標準差	t 值
快樂	男	390	3.10	1.04	4.432*
	女	446	2.79	0.96	
得意	男	390	3.29	1.14	-0.433
	女	446	3.32	1.02	
焦慮	男	390	2.74	1.17	-3.199*
	女	446	2.98	1.05	
憤怒	男	390	1.80	1.03	-2.382*
	女	446	1.97	1.02	
無聊	男	390	2.26	1.24	-3.180*
	女	446	2.53	1.24	

*p<.05

(二)不同年級的國小高年級學生在數學情緒的差異比較

根據描述性分析，說明國小高年級學生分別在五年級和六年級之下，數學情緒的差異情形，下表 4 為獨立性 t 檢定的分析結果，從表中得知，五年級樣本數為 306 人，六年級樣本數為 529 人，將年級分為五年級和六年級兩組進行差異比較，不同年級的國小高年級學生在數學情緒「快樂」、「得意」、「焦慮」、「憤怒」、「無聊」五向度中，均未達到顯著差異。

表 4 不同年級的國小高年級學生在數學情緒的差異比較摘要表

向度名稱	年級	人數	平均數	標準差	t 值
快樂	五年級	306	3.02	0.99	1.884

	六年級	529	2.88	1.01	
得意	五年級	306	3.32	1.11	0.245
	六年級	529	3.30	1.06	
焦慮	五年級	306	2.80	1.11	-1.289
	六年級	529	2.91	1.11	
憤怒	五年級	306	1.92	1.07	0.670
	六年級	529	1.87	1.00	
無聊	五年級	306	2.45	1.32	0.768
	六年級	529	2.38	1.20	

*p<.05

伍、結論與建議

本研究探討國小高年級學生的數學情緒現況以及在不同背景變項之下之差異情形，根據量表工具進行信度和效度分析，確保工具品質，再進行資料分析，本研究之結論與建議如下：

一、結論

本研究根據過去學者所研究之數學情緒面向，發展適合國小高年級學生的數學情緒量表，從信度分析結果來看，數學情緒量表的各向度均達到一定的內部一致性，顯示出本量表在評估數學情緒方面的穩定性與可靠性，該量表也具備良好的效度，能夠有效衡量學生在數學學習過程中所經歷的情緒反應。

研究發現，不同性別之國小高年級學生在數學情緒，「快樂」、「焦慮」、「憤怒」、「無聊」具有顯著差異，且在負面情緒「焦慮」、「憤怒」、「無聊」中，國小高年級女生的平均數皆高於男生，而在正向情緒「快樂」中，國小高年級女生的平均數則是低於男生，代表女生在數學領域學習時，相較於男生比較容易產生負面情緒；不同年級之國小高年級學生在數學情緒中，則是均未達顯著差異，推論其原因，可能為五年級和六年級年紀相近。

二、建議

影響數學情緒的因素有很多，研究者建議，背景變項除了性別和年級，還可以考慮其他因素對數學情緒的影響，例如家庭背景、學習動機、教師教學方式等。這些因素可能會對學生的數學情緒產生不同的影響，未來的研究可以嘗試引入這些因素，進一步檢視其交互作用。此外，也可以透過擴大年級範圍，增加樣本差異性，進一步瞭解低、中、高年級學生的數學情緒變化，這樣不僅能提高研究結果的普遍性，也能揭示更多可能影響學生數學情緒的因素。未來進一步的研究可以從多元角度綜合考慮各種影響原因，並探索如何透過改變教學策略、促進積極的學習動機等方式，有效地幫助學生提升數學學習的情緒，從而改善其學習成效和學習態度。

陸、參考文獻

張春興(2006)。**現代心理學**。臺北：東華。

教育部(2014)：**十二年國民基本教育課程綱要(總綱)**。臺北市：教育部。

趙宥寧(2024 年 12 月 05 日)。**2023 TIMSS 調查出爐：台灣學生科學、數學成績全球前三，學習興趣、自信卻持續低落**。翻轉教育。https://flipedu.parenting.com.tw/article/009725

陳盈螢(2023 年 12 月 11 日)。**台灣學生數學能力全球第 3，但學習落差「全球第一」！**商周。https://www.businessweekly.com.tw/careers/blog/3014125

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The Exercise of Control.* W. H. Freeman.

Goetz, T., Bieg, M., Lüdtke, O., Pekrun, R., & Hall, N. C. (2013). Do girls really experience more anxiety in mathematics? *Psychological Science, 24*, 2079–2087.

Lichtenfeld, S., Pekrun, R., Stupnisky, R. H., Reiss, K., & Murayama, K. (2012). Measuring students' emotions in the early years: The Achievement Emotions Questionnaire-Elementary School (AEQ-ES). *Learning and Individual Differences, 22*, 190–201.

Pajares, F., & Graham, L. (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. *Contemporary Educational Psychology, 24*, 124–139.

Pekrun, R., Goetz, T., Titz, W., & Perry, R. P. (2002). Academic emotions in students' self-regulated learning and achievement: A program of qualitative and quantitative research. *Educational Psychologist, 37*, 91–105.

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review, 18*, 315–341.

Pekrun, R., Frenzel, A. C., Goetz, T., & Perry, R. P. (2007). The control-value theory of achievement emotions: An integrative approach to emotions in education. In P. A. Schutz & R. Pekrun (Eds.), *Emotion in education* (pp. 13–36). Academic Press.

A Preliminary Study on Mathematics Emotions in Upper Elementary School Students

Yu-Ping Zhang [1] Yuan-Horng Lin[2]
[1] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education
[2] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

Abstract

This study aims to develop and validate the Mathematics Emotions Scale for upper elementary school students and to explore differences in their mathematical emotions across various demographic variables. Mathematics-related emotions refer to the emotions students experience during learning, problem-solving, and assessments, which influence their motivation and academic performance. According to Pekrun's (2006) Control-Value Theory (CVT), emotions are shaped by students' perceived control over tasks and the value they assign to them, which in turn affect their learning attitudes, motivation, and achievement, highlighting the inseparable link between emotions and learning attitudes.Therefore, this study seeks to develop a Mathematics-Related Emotions Scale suitable for upper elementary school students, analyze their emotional responses, and examine differences in emotions across different backgrounds. A total of 868 upper elementary school students participated in the study. The scale developed in this study categorizes mathematical emotions into five dimensions: enjoyment, pride, anxiety, anger, and boredom, measured using a five-point Likert scale.The results indicate that:(1) The reliability coefficient of the scale is .767, demonstrating good reliability;(2) factor analysis extracted five factors that align with the five designed dimensions of the scale, explaining 73.168% of the total variance, indicating good validity;(3) significant gender differences were observed in mathematical emotions, specifically in enjoyment, anxiety, anger, and boredom. Female students reported higher mean scores in negative emotions (anxiety, anger, boredom) than male students, while male students had higher mean scores in positive emotions (enjoyment). No significant differences were found across different grade levels.The findings of this study provide valuable insights for elementary mathematics education, helping teachers design more effective instructional strategies to reduce students' negative emotions and enhance their learning motivation.

Key words: mathematics affect, mathematics emotions scale

數學史融入國小教學–九章算術圓田

曾子軒[1] 劉柏宏[2] 蘇柏鑫[3]

[1]國立臺中教育大學數學教育系 a0929851727@gmail.com

[2]國立勤益科技大學基礎通識教育中心 liuph@ncut.edu.tw

[3]國立臺中教育大學數學教育系 cliffgby@mail.ntcu.edu.tw

摘要

本研究為前導研究，旨在藉由擷取數學史相關書籍中之適當數學史素材進行教案設計，並進行實際教學以觀察學生思考行為和分析數學史教案對於發展學生數學問題解決的思維有何效益，以做為未來正式研究之參考。本研究之數學史相關素材多擷取自《幾何原本》、《九章算術》二書。本研究所設計之教案採實務取向，並參考密西根大學教學研究中心(Center for Research on Teaching and Learning)所揭示的教案設計準則進行設計。於教案設計後採用本研究所發展之教案進行實際教學測試，結果顯示學生於課堂中展現高度的專注，並且也透過古人的解題方法與現代解題方法的比對後更了解課堂中所教授的主題內容。

關鍵字：數學史融入教學、數學史、數學文化、數學思維

壹、 緒論

「追本溯源」作為中華民族的重要傳統精神，強調對事物本質的探索與追尋，這一理念在數學學習中亦極具價值。當代學生普遍對數學的本質與實際應用缺乏理解，導致學習動機低落，學習過程流於機械操作，難以體會其內在意義與價值。而追本溯源便是為了學生能與數學建立更緊密的連結，使學習不再只是公式的操練，而是充滿探索精神與知識意義的旅程，從而提升學習興趣與自主學習的動力。

一、研究動機

數學乃科學之母，其邏輯脈絡尤為重要。數學乃組成文化的其中一個元素，唯有認識到數學的文化基礎方能更加地去理解數學本質(Wilder, 1950)，但目前教學現場多採用直接宣告的方式，而此教學方法使學生無從了解數學之始末，更無法理解為何需要學習這些知識。根據「經濟合作暨發展組織」（Organisation for Economic Co-operation and Development,OECD）所做的國際學生評量計劃（Programme for International Student Assessment,PISA）調查顯示，台灣學生雖然數學成績不落人後，但對於數學的認同與愛好卻低於其餘國家。本研究為前導研究，旨在將數學史和數學文化融入教學，讓學生更深入理解數學概念萌芽和發展的過程以及數學家數學思考的特色，使學生更加了解數學概念是如何誕生(how)？數學究竟為何物(what)？是因何而存在(why)？。研究者希望藉由此前導研究更進一步理解數學史和文化的融入，對改善學生數學解題與思考與深化數學學習成效有哪些助益。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究之研究目的有：

（一）如何擷取適當數學史素材以設計適合國小學生的數學史教案？

（二）觀察學生參與數學史解題活動時表現出哪些解題思考與行為？

貳、文獻探討

一、數學文化

數學乃組成文化的其中一個元素(Wilder,1950)，在人類文明的演進中數學的影子無處不在。數學不僅僅是由一系列抽象公式和定理所構成的學科，它扎根於文化的土壤中，並在各種文化的發展中起到了關鍵作用。在西方文明中數學更是推動文化的無形力量(Kline,1954)，從古代的天文學到現代的科技創新，數學的應用遍及各個領域，無論是自然科學、社會科學，還是藝術、音樂等不同的領域中，都可以發現到數學的存在與影響力。在資訊不流通的年代數學便已在各文明之中悄然發展。許多數學問題的誕生都是由解決現實問題出發，諸如天文、貿易、建築或農業，而數學的解決方案則進一步促進了人類對這些領域的深入理解，同時這些數學知識又進一步影響其他領域(劉柏宏, 2021)，數學文化不應被簡單地區分為「數學」與「文化」兩個部分，而應該被看作是一個緊密交織、互相影響的整體。數學因文明的需求而產生，又推動著文明的演進，因此數學和文化之間的關係是密不可分的，數學的發展和人類文明的演變始終相互依存。

二、數學文化融入教學

承上所述，數學與文化之間的關係是密不可分的，而在數學的學習過程中，脈絡和邏輯是極為重要的元素，因此在進行數學學習時，理解數學的源頭和發展脈絡顯得尤為關鍵。Nasir、Hand 與 Taylor（2008）強調在進行數學知識學習時，融入其文化脈絡能幫助學生更好的理解與吸收這些知識，這不僅能提升學生的學習興趣，還能顯著提高學習成效。文化脈絡能讓數學知識不再是單純的抽象符號，而是與學生的日常生活和社會背景緊密相連，使學習變得更加生動且具有實際意義。劉柏宏(2016)進一步強調有數學素養的人除了需要掌握基本的數學技巧外，必應具備一定程度的數學文化內涵。然而我國傳統教學中多採用宣告的方式進行教學，且教科書的編排也多忽略了文化脈絡的部分，導致學生學習時經常是由抽象數學概念出發，缺少直觀的感受，而數學文化重視數學知識的人文、社會與歷史脈絡，因此將數學文化融入教學中恰可以補足此一缺陷(劉柏宏, 2021)。目前《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》中也已特別強調「數學是一種人文素養」，但在將數學文化融入數學教學時，教師仍須謹慎處理，避免為了融入數學文化而盲目地進行教學設計。

三、數學思維

數學思維乃是一個過程，其中包含了嘗試、尋找關係、預測結果及證明結果等等(Stacey,2006)。這一過程並非每個人都相同，因為每個人都是獨立的個體，在面對數學問題時所採用的策略、方法乃至思維的方式都會有所不同。而數學思維便是一套由學生數學先備知識和解決數學問題的渴望所簡化的心靈運作過程（Sitorus,2016）。這種思維過程不僅展示了學生在解決問題時的多樣性和創造性，也反映了他們如何運用自身所具備的數學知識來應對新挑戰。Zeynivandnezhad、Ismail 與 Yosuf(2013）指出通過邏輯性和結構化的數學思考，學生可以拓寬他們的思維方式，增加思考的多樣性與複雜性。事實上，數學思維的發展不僅是數學能力的體現，它更與整體思維能力的提高息息相關。在《十二年國民基本教育課程綱要》中，素養導向教學備一再強調，而數學思考便是數學素養中的一個核心概念，素養導向的教學理念強調學生不僅要學會數學知識本身，更要學會如何運用數學的方式來思考和解決問題。數學思維也並非單純的使用公式進行解題，當學生解決問題時，數學思考可以定義為直接或間接使用數學方法或概念探索問題的過程（Uyangör, 2019）。這樣的思維能夠幫助學生在進行解題或是面對生活中的問題時，能夠更有效地進行分析、推理

和創新。

參、研究方法與設計

一、研究架構

本研究參考《九章算術》、《幾何原本》、《孫子算經》及其他與數學史相關的書籍，透過文獻探討的方式，分析這些經典數學著作中的數學概念、解題方法及其背後的歷史脈絡，從中篩選出適合國小高年級學童理解的內容與問題。特別關注其中涉及幾何概念的章節，例如《九章算術》中的方田章、《幾何原本》中的第三卷、第四卷以及第十二卷。在篩選適合的數學內容後，本研究進一步對照分析《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》中「空間與形狀」的學習表現要求，特別聚焦於圓面積與圓周率的學習重點，探討現行教材與古典數學理論在觀念建構上的異同。透過比較分析，研究者嘗試找出古典數學知識能夠補充或強化現行課程的部分，並思考如何有效融入國小數學課堂，使學生能夠從歷史視角理解數學概念，以提升其數學情意與數學思考能力。

為達此目標，研究者設計了一份適用於國小高年級學生的數學教案以做為前導研究之用。此教案結合數學史的相關內容，以期提升學生對數學概念的理解與興趣。在教案設計過程中，研究者與專業領域的教授及具有實務經驗的國小教師進行多次討論與修正，確保教案內容符合國小高年級學生的認知能力與學習需求，並符合教學現場的可行性與實用性。

在完成教案設計後，研究者將實際運用該教案進行數學教學，以驗證其可行性與有效性。在教學實施過程中，為了確保研究資料的完整性，採取多元資料蒐集方式，包括錄音與錄影記錄，以忠實保留教學現場的互動情形。此外，研究者亦設計了學習單作為輔助工具，以蒐集學生的學習歷程、思維模式及解題策略，並觀察教案在學生學習表現上的影響。

在教學實踐結束後，研究者將透過影片回顧課程與學生、家長的回饋進行詳細分析，探討學生的學習歷程、教師的教學策略以及課堂互動的有效性。分析結果將用以檢視教案的優缺點，並根據研究發現提出具體的改進建議，以作為未來相關教學設計與研究的參考依據。上述研究架構可歸納如圖 1。

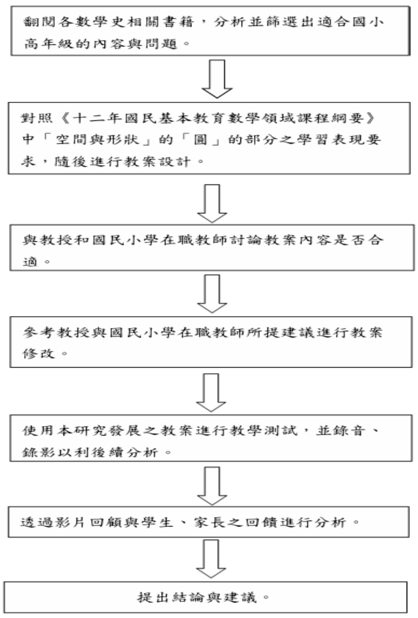


圖 1：研究架構圖

二、研究對象

本研究之教案設計針對國小高年級學童，本次研究所選對象為台中市市中心某國小之一名六年級學童做為前導研究的對象，該學童在校成績屬中上，平時在數學科考試之表現平平，經了解後得知其數學理解能力佳但於作答時經常因粗心大意而無法在考試中獲取好的成績。

三、教學者

本研究的教學活動由研究者本人負責，研究者目前為在學中師資培育生，正在修習國民小學教育學程，且曾擔任過國小高年級之代理教師，因此對現今學生之課堂情形頗為了解，且研究者本身熟悉「幾何原本」、「九章算術」等等數學史書籍。在課堂中研究者的主要工作包括組織學生討論、監控學生學習進度以及觀察學生反應，確保學生投入於課堂活動中。在教學過程中，研究者透過適時的學習支持與指導，促進學生對數學概念及數學文化的深層理解與建構。

四、研究工具

(一)教學教案設計

本研究所設計之教案採實務取向，經查找多項資料後決定參考密西根大學教學研究中心(Center for Research on Teaching and Learning)所揭示的教案設計準則。教案將遵照以下六步驟進行設計。

1. 列出學習目標(Outline learning objectives)：在翻閱數學史書籍找尋相關題目時，便事先思考幾個問題：研究者希望學生學習到甚麼？學生能在課程中獲得甚麼？重要的點有哪些？哪些是時間不足時可省略的。
2. 準備開場白(Develop the introduction)：針對本次教學主題構思一個有創意的開場白，即所謂的引起動機，透過此開場白讓學生能夠了解並進入本堂課的問題情境。在此一步驟須先了解學生應具備之先備知識，以及設想學生可能具備的相關生活經驗。
3. 規劃學習活動(Plan the specific learning activities)：在進行學習活動的規劃時，需要去思考怎樣的活動能夠吸引學生目光？並且在每一步都需考量如何解釋課堂主題，又有哪些不一樣的方式可以幫助學生了解主題？又或者有沒有生活中的實務經驗讓學生能夠更直觀的了解主題概念？
4. 測試學生的理解程度(Plan to check for understanding)：研究者需時時注意學生是否有投入在課堂中，並準備適當的問題以便於教學中檢測學生的理解程度。在設計問題時，也必須去設想學生的可能回答，並思考使用口頭評量或是紙本回答較為合適。
5. 準備結語與預告(Develop a conclusion and a preview)：簡明扼要的回顧本堂課的教學重點。可由教師起頭後邀請學生進行分享。並可以預告下一次的課堂主題或將來的學習內容與本次活動的關係，以幫助學生進行不同主題間的串聯。
6. 設定進程時間表(Create a realistic timeline)：估算每個活動流程所需的時間，並預留時間回答學生問題。事先準備延伸問題或討論議題，若活動進行比規劃中來的順利則可加入到活動中。整個活動預留彈性空間，不必處處拘泥於既定的規劃。

研究者翻閱多本數學史相關書籍後，決定採用《九章算術》第一卷方田卷中的問題(三一)及問題(三二)來結合現代圓面積之計算，研究者選用問題(三一)中提到之圓田術法來進行教學，並搭配劉徽在此問題所做之注釋進行講解。在教案之最後請學生使用古代與現代的算法進行比較，了解其中差異。再請學生思

考是否能夠結合古今作法，又是否結合的話會產生問題？之所以選用圓的部分來做為此次研究主題，一方面是因為研究者本身對於古代圓面積作法情有獨鍾，另一方面則是在現今課室中，圓面積與圓周率等等圓的相關概念多是直接採用宣告的方式教型教學，因此學生在此一單元經常是知其然而不知其所以然。在翻閱《幾何原本》與《九章算術》中分別對於圓的紀錄後，研究者認為《九章算術》中對於圓面積的描述是較好理解的，因此最終決定選用《九章算術》來做為撰寫教案的主要參考資料。

(二)課程學習單

課程學習單乃研究者依據課堂主題進行設計，其內容選取自《九章算術》第一卷方田卷中的圓田相關問題，問題(三一)與問題(三二)，之所以採用書中既有題目而未選擇重新出題，一是為確保材料的學術嚴謹性與歷史脈絡，二則是為了讓學生能更了解在當時的時空背景中人們究竟用數學來解決甚麼樣的問題。研究者於課堂教學過程中適時運用此學習單來符合教學，並作為學生學習歷程之記錄工具。其設計不僅提供學生即時書寫與反思的機會，亦內含一系列引導性問題，旨在促進學生對數學概念與數學思維的深入理解。研究者亦可透過學生於學習單上的作答情形，分析其學習表現、概念建構過程及解題策略，進一步評估教學成效與學生的數學素養發展。

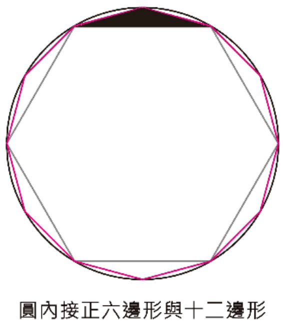
肆、教學研究過程與結果

一、「九章算術圓田」教案實施分析

《九章算術》中的題目皆源自於當時候的需求，田地面積、賦稅、資源分配等等……而本研究所擷取之「圓田問題」便是當時候為了計算圓型田地面積而發展出來的計算方法，然而現今課室中多採用直接宣告的方式來進行圓面積與圓周率的教學，使得多數學生直接背誦公式來解題。「九章算術圓田」教案的設計理念便是希望學生能夠回歸到圓面積計算的開端，認識其邏輯脈絡並了解圓周率究竟從何而來，又為何古代對於圓面積的計算與現代有所差異。

研究者蒐集相關的數學史資料，並希望透過數學史內容的輔助來使學生更為了解本單元。本「九章算術圓田」教案主要藉由古人計算圓形田地面積的做法來使學生更加了解圓直徑、圓半徑、圓周長與圓面積之間的關係。研究者首先詢問學生是否記得圓周長與圓面積為何？又是否記得兩者分別怎麼計算？學生於此處稍微有點小混亂，一開始回答:「圓周長就是圓的邊有多長。」，但不記得如何計算，隨後在回答完圓面積為何與其計算方法後，自行又回答了圓周長的計算方式。由此可知，學生對於圓周長與圓面積是有一定的熟悉度的，而藉由這幾個問答，幫助學生回溯圓形相關的概念知識。隨後研究者再次進行提問，請學生試想如果自己身處古代，在不知道這些公式的前提，原有哪些部份是較為容易被測量出來的？學生思考片刻後回答:「圓周長和圓直徑。」，藉此回答，將學生帶入到古代的情境之中，古人便是測量了圓直徑與圓周長後，發現其具有一定比例，而此比例則被稱為圓周率，到此，引出了圓周率的概念，也使學生更清楚圓周率為何。接著便進入九章算術的問題(三一)，並向學生介紹九章算術上所記載的圓面積計算方法，並請學生使用九章算術中的方法計算看看。在計算中，學生之計算脈絡與邏輯皆無問題，然而計算上卻是出現很多錯誤，經過重複檢查後學生自行發現了其計算錯誤之處。使用九章算術中所記載的方法計算完後，研究者請學生再使用現代課本中所給的公式(學生於一開始自行回答的公式)計算一次，並看看其答案是否會有不同？如果有不同，觀察看看古今方法的計算式，是否能找到導致計算結果不一樣的原因？學生再計算並

觀察過後回答：「圓周率不一樣。一個乘以 3.14，另一個沒有。」，此時研究者順勢推進，請學生再觀察看看，那古代的算法有圓周率嗎？有的話是多少？學生觀察後回答：「3。」。接著研究者向學生介紹了劉徽與她的圓面積計算方法，還有劉徽所計算出來的圓周率。在介紹割圓術時，研究者使用自行創作的正多邊形與圓的圖片進行解釋闡述(如圖 2 及圖 3 所示)，在此過程中，學生保持著高度的專注並極有興趣的聆聽。在課堂的末尾，研究者為檢測學生是否有了解本堂課之內容，使用了九章算術中的問題(三二)進行測驗，一樣請學生使用古法與現代方法分別進行計算，此次計算相較於問題(三一)，學生明顯更為熟稔。計算完之後，研究者提問：「那古今方法有沒有辦法結合呢？」，學生當即進行嘗試，但計算結果卻是與現代不同。不過換一種古法結合後卻又與現代相同？在此學生表現出疑惑不解問到：「為什麼有的方法可以結合有的不行？」，研究者請學生觀察，他使用的結合方式，是更動或是替換了甚麼？學生回答：「他對古法中的圓周率進行替換，把 3 都更換為 3.14。」，但想不明白為何這樣會不對，於是研究者便使用另一種古法進行圓周率的更換後計算給學生看，這時答案對了，學生表現得非常驚訝，隨後研究者便對此一現象進行解釋，學生也表示理解了。



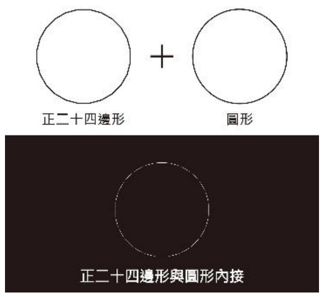


圖 2：圓內接正六邊形與正十二邊形　　圖 3：圓與圓內接正二十四邊形

回顧整個課程的進行，由於所選取問題不難，且中間穿插一些故事來闡述其歷史脈絡，學生表現得頗為專注且充滿興趣，並在研究者逕行提問時皆願意去思考並解釋自己的想法與為什麼自己要這樣做，研究者認為此一特性正是很多現場傳統教學課堂中無法去做到的。而配合學習單的使用也讓學生能夠更好的去檢視與比對自己的每次計算有何不同，或是回過頭去尋找是哪個環節出現問題導致最後答案的錯誤。此份教案使用故事穿插問題之中，並闡述了當時候的時空背景，再配合題目的計算來讓學生進行比對與思考，對於這樣的安排，學生表示可以接受，且透過影片回顧，也發現到雖然本次課堂是於晚上進行，而白天學生已上了一整天課甚至課後還參加球隊的訓練，但在本次課程中學生卻並未表現出疲憊或是感覺無趣的樣子。在課程結束後研究者也訪問了一下學生對於本次課程的想法，學生表示：「我覺得很有趣，因為以前沒有聽過這樣的東西，學校上課很無聊，老師就一直講。今天這個課很好玩，也比較了解圓的東西，下次如果有類似課程還想參加。」，透過學生回饋可以了解到，傳統式教學在圓這個單元對學生來講是非常無趣的，單純的記下公是然後進行機械式的練習增加自己的計算熟悉度，因此學生很容易失去學習興趣，認為反正為了考試就把公式背起來就好。而此份教案的設計，與以往傳統講述式教學不同，教師透過許多提問來引導學生進行思考，因為跟以往學習經驗不同，學生感到新鮮，也因為研究者經常進行提問，使學生比較有參與感，不會覺得就是單純的在聽課，而是一起融入到課程中。事後根據學生家長轉述，學生回家後不停跟

他們分享今天的課程，也表示如果下次還有此類課程他還想參與。家長指出，以往這位學生雖然不至於不上課但也從未表現出喜歡上課的樣子。透過影片回顧與多方回饋，可以發現到此份教案對於學生來說，確實是能夠引起他們的學習興趣與啟發他們的思考的。

伍、研究結論

一、如何擷取適當數學史素材以設計適合國小學生的數學史教案？

本研究由研究者翻閱各數學史相關書籍後擷取適當內容並與教授和國民小學在職教師教行討論確認內容合適後，由研究者進行教案設計並實施實際教學活動以測試此份教案可行性與學生接受度，並觀察學生反應與解題思路。從本研究中，研究者發現可以依照三大原則：數學概念是如何誕生(how)？數學究竟為何物(what)？是因何而存在(why)？並參考密西根大學教學研究中心(Center for Research on Teaching and Learning)所揭示的教案設計準則進行教案設計。至於如何設計出一份合適的數學史教案，研究者發現，首先可以從數學科普書及入手，例如由洪萬生教授主編的「數之軌跡」套書，由於「幾何原本」與「九章算術」二書在問題的解釋上較為學術，並不是那麼好理解，因此從數學科普書籍出發，了解自身所需主題的歷史脈絡後再翻閱「幾何原本」與「九章算術」來尋找合適的內容與問題會顯得較為簡單。並且數學史科普書籍中多含有各類故事甚至是奇聞軼事，亦可用於教案之中以增加教案的豐富度，同時也能使課程更加的有趣。至於數學史相關的資訊，除了可以翻閱書籍之外，我國的《HPM 通訊》（http://math.ntnu.edu.tw/~horng）也能提供許多相關資料。

二、觀察學生參與數學史解題活動時表現出哪些解題思考與行為？

本研究所進行的教案教學實作，除教師於課堂中隨時進行觀察外，也於課程中進行錄音、錄影以利後續分析，更於課後對學生進行簡單的訪談，並詢問家長學生後續反應，以此來作為分析的根本依據。根據學生與家長的回饋，此份教案確實能夠引起學生的學習興趣，並且也能夠讓學生對於圓半徑、圓直徑、圓周長及圓面積有更深入的了解。且根據事後影片回顧，學生於課堂中無表現出不耐、無趣、不專注等等負面情緒，整堂課的時間學生皆是全神貫注，熱衷於課堂活動中的。而回顧學生回答問題與解題的思路則可以發現學生在這堂課中確實有展現出較高的學習意願，並且在解題方面相較於起初的公式帶入，後面學生更願意嘗試多去思考後使用不一樣的方法，且能發現自身所使用方法的問題，由此可知，此份教案對於促進學生思考以避免機械化練習與背誦式學習是有幫助的。

陸、反思與建議

根據本研究的發現，研究者深刻反思到，在課程學習單的設計上應該更加靈活且多樣化。且雖然教案設計上已經考慮到學生的需求，但由於時間限制，實際上沒能讓學生進行太多的實作活動。許多活動最終只能以想像和描述的方式來進行，這樣雖然有助於引發學生的思考，但卻未能真正讓學生親自操作與體驗其中的過程，從而限制了他們的學習深度。因此，未來的課程設計中，需要考慮如何提供更多的實踐機會，讓學生能夠在實際操作中學到更多知識，進一步鞏固他們的學習成果。

由於國小學童在書寫和計算方面仍需要花費較多的時間，因此在教案的時間安排上，應該預留更多的時間來讓學生進行書寫和整理。這不僅能夠讓學生有更多的時間完成練習，還能幫助他們更好地理解學習內容，進一步提升他們的學習效益。教案設計應該考慮到學生的實際情況，尤其是在進行需要書寫和

計算的數學活動，這樣能夠減少學生因為時間不足而感到匆忙或焦慮的情況，從而有助於他們更好地掌握知識。

本前導研究主要針對數學史內容對學生的影響進行了分析與討論，並未真正將這些數學史知識融入到實際的課堂教學中。希望在未來正式研究能夠將數學史內容更緊密地與課本進行結合。這樣不僅能夠讓學生了解數學概念的發展與其脈絡，還能激發他們對數學的學習興趣與好奇心。因此，未來的課程設計中，可以嘗試將數學史與數學教材進行結合，將這些具有歷史意義的數學問題帶入日常授課中，從而讓學生不僅學會解題方法，還能夠理解這些方法的歷史背景和發展脈絡。這樣不僅能夠提升學生的數學學習熱情，還能讓他們對數學的學習產生更深的興趣和動力，並且才能真正地做到普及化。

由於本研究僅進行了一堂課的實施，並且沒有實施前後測，因此無法確定若課程延長，學生是否會因為新鮮感的消退而對課程產生排斥，也無法確定該教案是否能夠長期有效地提升學生的數學學科能力。儘管這一堂課讓學生對數學產生了一定的興趣，但是否能持續激發他們對數學的學習熱情，還需要更多的時間來觀察。因此，未來設計更長期的課程，並進行前、中、後的測驗，來檢測學生對課程內容的持久反應以及學業成績的變化。

基於這些反思和觀察，研究者計劃於下一學年度進行一個更大範圍且為期一學期的實驗活動。這次實驗將涵蓋更多的學生群體，並進行更全面的分析，藉此探討數學史融入教學對學生學習效果的影響。研究者希望通過這樣的實驗，能夠獲得更為具體和有力的數據支持，從而進一步證明數學史在課堂教學中的重要性。此外，研究者期望能夠通過這些實驗，改變學生對數學的排斥心理，並且增強他們的數學思維能力。

參考文獻

壹、 中文部分

李繼閔(2023)。**九章算術(附海島算經)**。中華書局。

洪萬生(主編)(2024)。**數之軌跡**。三民書局。

教育部（2018）。十二年國民基本教育數學領域課程綱要。臺北：作者。檢自 https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52

劉柏宏（2016）。 從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵─理論與案例分析。 **臺灣數學教育期刊，3**（1），55-83。
doi: 10.6278/tjme.20160413.001

劉柏宏（2021）。 中小學數學史教案開發與實作研究。 **臺灣數學教育期刊，8**（1），1-25。 doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).001

劉柏宏（2021）。 論數學文化與數學教育的關係。 **臺灣數學教育期刊，8**（1），79-88。 doi: 10.6278/tjme.202104_8(1).004

Euclid(2022)。**几何原本**(張卜天)。商務印書館。
(原著出於約 300 BC)

Lucas N.H. Bunt & Phillip S.Jones & Jack D. Bedient(2019)。**數學起源－進入古代數學家的另類思考**(黃美倫、林美杏、邱珮瑜、王瑜君、黃俊瑋、劉雅茵譯)。五南出版。
(原著出版於 1988)

貳、 英文部分

Kline, M. (1954). *Mathematics in western culture*. London, UK: George

Allen & Unwin.
Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking, 39-48.*
Nasir, N. S., Hand, V., & Taylor, E. V. (2008). Culture and mathematics in school: Boundaries between "cultural" and "domain" knowledge in the mathematics classroom and beyond. *Review of Research in Education*, 32(1), 187-240. doi: 10.3102/0091732X07308962
Sitorus, J. (2016). Students' creative thinking process stages: Implementation of realistic mathematics education. *Thinking Skills and Creativity*, *22*, 111-120.
Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical Society
Zeynivandnezhad, F., Ismail, Z., & Yosuf, Y. M. (2013). Mathematical thinking in differential equations among pre-service teachers. *Sains Humanika*, *63*(2).
Uyangör, S. M. (2019). Investigation of the Mathematical Thinking Processes of Students in Mathematics Education Supported with Graph Theory. *Universal Journal of Educational Research*, *7*(1), 1-9.

Integrating the History of Mathematics into Elementary School Teaching: The Circle Field Problem in The Nine Chapters on the Mathematical Art

Tzu-Hsuan Tseng [1] Po-Hung Liu [2] Po-Hsin Su[3]

[1] Department of Mathematics Education, National Taichung University

[2] Fundamental General Education Center, National chin-yi University of Technology

[3] Department of Mathematics Education, National Taichung University

Abstract

This study is a pilot study aims to design lesson plans by extracting appropriate historical mathematical materials from relevant mathematical history books and to conduct actual teaching in order to observe students' thinking behaviors and analyze the benefits of integrating mathematical history lesson plans on the development of students' problem-solving thinking. The mathematical history materials used in this study were primarily drawn from *Euclid's Elements* and *The Nine Chapters on the Mathematical Ar*. The lesson plan designed in this study is practice-oriented and follows the guidelines for lesson plan design provided by the Center for Research on Teaching and Learning at the University of Michigan. After designing the lesson plan, it was implemented and evaluated through actual teaching. The results show that students exhibited high levels of focus during the class and gained a deeper understanding of the topics taught through the comparison of ancient and modern problem-solving methods.

Key words: Integrating the history of mathematics into teaching, History of Mathematics, Mathematical Culture, Mathematical Thinking

國小五年級視知覺及操弄之個案研究

吳岱穎[1]　許慧玉[2]
[1] 國立清華大學數理教育研究所 s6727rosy@gmail.com
[2] 國立清華大學數理教育研究所 huiyuhsu@mx.nthu.edu.tw

摘要

本研究旨在探討國小五年級學童在非正式的數學學習環境中，對於幾何圖形的視知覺情形為何，並探討學生會有哪些思考的過程。研究者參照 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)中的研究方式，並稍作修改，只取簡圖部分訪談學生。本研究採用質性研究法中之個案研究法，主要採用半結構式訪談方式，對學生進行一對一訪談，研究者不會事先進行教學，施測時，受訪學生不受任何限制，只需依照訪談大綱自由的回答，研究者會依照學生回答的情形，適時追問或是給予指示，以深入探討學生在非正式的數學學習環境中，能引學生的視覺空間思維過程。研究結果發現在非正式的數學學習環境中，使學生能夠展現更多的視知覺過程。

關鍵字：幾何圖形、視覺空間思維、非正式數學學習環境

壹、緒論

一、研究背景與動機

幾何圖形對國小學生的空間認知有著重要的影響，幾何學作為數學的一個分支，能夠促進學生的視覺化能力、直覺、批判性思維、問題解決能力以及邏輯推理和證明的能力，這些都是發展空間感知的基礎。

在我國國小階段的課程中，各年級的課程都包含了幾何圖形的學習內容，顯現了幾何學習的重要性，但在傳統的數學教學中，學生往往面臨學習困難。

學生在解決涉及三維幾何形狀的二維表示問題時，空間推理技能的運用至關重要。這些技能不僅包括空間視覺化，還需要基於形狀特性的空間分析推理，尤其是在需要多步推理的問題中，這兩種技能的協調運用顯得尤為重要。因此，提供更多的機會讓學生練習和鞏固他們的空間推理技能，對於幫助他們在幾何學習中取得進展是必要的。

因此，本研究主要參考 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)的研究，該研究者設計了一個藝術工作室環境，讓學生透過藝術作品的觀察與創作來探討視覺空間思維(visuospatial thinking)的發展，研究結果發現，藝術工作室環境促進了學生辨識幾何形狀、拆解與組合形狀、空間圖案化及變換幾何形狀的能力，結果也發現三點，其一是藝術工作室能夠促進學生的視覺空間思維發展。其二是觀察、創作、與批評環節各有不同的學習價值。個別觀察有助於發掘學生的初始認知，同儕討論促進形狀辨識與幾何概念應用，而創作與批評則能深化數學與藝術的結合。最後是非正式學習環境有助於數學與視覺藝術的跨領域學習，並提供更具感官與身體參與性的數學體驗。

對於 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)的研究結果，研究者不禁回想在教學現場，學生學習幾何時的思考方式，學生在學習幾何時，看似都將概念完整學習，在教師提問形體的性質時，也都能完整回答，但在遇到經過旋

轉、重疊或需切割的圖形時，就會產生迷思。舉例來說，請學生辨認鈍角三角形時，遇到邊不夠明顯，或是鈍角三角形上的銳角太過尖細的非典型心像鈍角三角形(圖 1)時，就會讓學生無法正確辨認。因此，研究者想了解我國的學童，在非正式的數學學習環境中的視覺空間思維的表現為何？能夠從各式簡圖中看到什麼幾何形狀？會運用什麼方式進行思考與發現？以上問題都將在本研究進行討論。

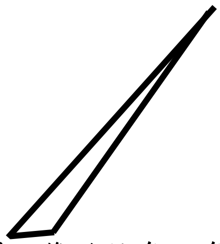


圖 1 非典型心像的鈍角三角形

二、研究目的與待答問題

本研究的研究目的是想了解國小五年級學童在非正式的數學學習環境中，對於幾何圖形的視知覺情形為何，並探討學生會有哪些思考的過程。

基於上述研究目的，本研究根據此目的列出下列待答問題：

(一) 國小五年級學童在非正式的數學學習環境中，有什麼數學體驗？

(二) 國小五年級學生在分析看到什麼形體的過程中，有哪些思考過程？

三、名詞釋義

(一) 幾何圖形

幾何圖形是指由點、線、面或體等基本幾何元素所組成的形狀和結構，可為單一形體或是複合形體。本研究對幾何圖形的定義分為兩個類別，其一為在二維中的幾何圖形，又稱為平面圖形，例如：正方形、三角形、梯形等，另一類別為在三維中的幾何圖形，又稱立體圖形，例如：正方體、三角錐、圓柱等。

(二) 空間認知

認知(cognition)在維基百科中的解釋是指「透過思想、經驗和感官獲得知識和理解的心理行為或過程」。它包括智力功能和過程的許多方面，例如：知覺、注意力、知識的形成、記憶和工作記憶、判斷和評價、推理和「計算」、解決問題和決策、理解和語言的產生。認知過程使用現有知識並發現新知識。在幾何學中，空間認知(Spatial Cognition)的定義涉及對空間及其元素的理解、處理和推理能力。這是一種綜合性的心智過程，與我們如何感知、記憶、操作和推斷空間結構及其關係密切相關，空間認知可以概括成感知空間、空間推理、空間記憶、空間表徵、數學與空間推論的結合等。本研究將空間認知定義指個體如何通過視覺感官感知物體的位置、大小、形狀等，並透過空間變換，如平移、旋轉、縮放、切割與重組等，推導出所看到的平面或立體圖形。

四、研究範圍與限制

(一) 研究範圍

本研究的研究對象為五年級學童，採立意取樣，從研究者所任教班級依據期中考數學表現挑選 2 名中間程度的學生參與研究。研究內容為參照 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)研究中的各式藝術作品的簡圖，並由研究者稍加修改其中的實施方式與內容。

（二） 研究限制

本研究因時間、經費、人力與學生課後繁忙等的限制，無法實際以藝術工作室形式進行研究，也因時間的限制，只能根據 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)中的三個工作室的簡圖對學生進行訪談，研究者參照了部分的研究方式，並稍作修改與分類，進而進行研究，且研究者只以任教的五年級學生為研究對象，故研究結果僅供後續研究參考，不宜過度推論。

貳、文獻探討

一、Duval 的幾何學習認知理解模式與過程

Duval(1995)認為，學生在學習幾何概念時，應從對幾何圖形的認知著手，經由操控或轉變圖形的維度，可以幫助學生解決複雜的幾何問題。因此，Duval 提出四種幾何圖形的理解模式，以幫助學生解決複雜的幾何問題，分別為知覺性理解(Perceptual apprehension)、構圖性理解(Sequential apprehension)、論述性理解(Discursive apprehension)、操作性理解(Operative apprehension)。

Duval(1998)進一步將學生學習幾何時的認知過程分成三種，分別是視覺化過程(Visualization)、作圖(Construction)和推理(Reasoning)，此三種認知過程應是獨立發展與進行，但通常是由兩個或全部過程結合在一起的複雜認知歷程，要由三種認知過程整合起來，只有在各種不同的過程發展成熟後，才會發生。

二、視覺化(Visualization)

在學習上，我們所接受的學習資訊大多來自於視覺，可以是文字、符號、圖表、影像等。接受者透過視覺接收到訊息後，會在他們的心中與其基模(schema)進行整合，對這些圖像訊息進行解讀、分析，以找到一個合理的解答。換句話說，「視覺化」不單是指眼睛所看到的事物，而是將視覺所看到的物件配合心智中的認知過程所產生的結果(de Guzmán,2002)。

視覺化在數學學習中具有重要的意義。它不同於日常生活中的視覺(Visio)，並不僅僅是對物理對象的直觀感知，而是基於符號表徵(semiotic representation)的一種認知活動，視覺化(Visualization)透過二維結構來組織和展示不同符號單元之間的關係，例如：幾何圖形、平面座標圖等，它能夠以視覺的形式呈現數學對象的整體結構，這種活動能夠將數學對象的結構與關係以視覺化的形式呈現，使學習者能夠直觀的理解抽象數學概念，使學習者讓學習者能夠「看見」視覺中無法提供的抽象訊息。

Duval(1999)將任何學科都必須發展的三項複雜認知架構，認定為數學中的表示和視覺化基礎，其一為數學知識的悖論性(The paradoxical character of mathematical knowledge)，其中提到使用符號表示系統進行數學思維是至關重要的，且強調教學者或學習者對數學的理解不要將數學物件與所使用的表徵混淆。其二為「表徵」一詞的模糊意義(Ambiguous meaning of the term “representation”) ，其中提到「表徵」一詞通常用來指心理實體，如圖像，接著是被喚起的某些東西消失或遺失，最後是受試者所理解的內容。最後為數學思維所需的各種符號系統(The need of various semiotic systems for mathematical thinking) ，其中提到從以前來看，數學的進步與從原始的認知模式到不同感覺系統上的發展有關，對於圖像，從使用工具建構平面圖形，到透視圖，再到用圖表表示，以將曲線轉換為方程

式等，每一種新的符號系統都在數學思維上提供了特定的表示和處理手段，我們稱之為「表徵登記」(Duval，1995b）。

綜合上述，視覺化(Visualization)是符號表徵系統的核心功能，它依靠符號來呈現數學對象的關係，例如，幾何圖形展示了二維形狀的結構，平面座標圖顯示了點與數據之間的關聯，這些都需要學習者具備辨別符號系統中關鍵視覺特徵的能力，並能理解其數學語境中的意義，才能使學習者更深入的了解數學的本質。

三、視覺空間思維(Visual-spatial thinking)

視覺空間思維是一種重要的認知能力，指個體運用腦中對空間、物體的形狀、方位、比例等概念進行操作與推理的能力，涉及個體如何理解和處理空間相關訊息。視覺空間推理能力的內涵包括幾何直觀、空間觀念和推理意識等方面。

Newcombe& Shipley(2015)將空間訊息可以分成內在訊息與外在訊息，內在訊息為物體本身的特徵與性質，外在訊息則為描述物體之間的關係。其中還將空間技能分成靜態技能和動態技能，靜態技能是有關進行固定形狀或物體結構的理解，動態技能則是進行物體的旋轉、移動或縮放等心理模擬或物理轉換。

視覺感知也為本研究的基礎，視覺感知始於對物體顯著排列的編碼(M. Kus & E. Cakiroglu,2022)。感知本質上是積極的，當觀察者仔細觀察一個圖形或是物體時，他們更能夠看到其細節，進而探索其空間特徵和關係。Noble et al.(2004)對於視覺作為一個積極的過程進行了討論，尤其是在對展示出的圖形或形體不熟悉時，他們描述了視覺的三個方面，其一是看作(seeing-as)，「看作」的核心特徵在於以多種方式看待一個物體，這些方式源自於個人的經驗以及對「以不同方式看待事物」這項技術的熟練程度。例如：從不同的角度識別圖形為兔子或鴨子。第二為未見整體(not-seeing a whole)，未見整體與「看作」的經驗正好相反，一個人可能可以看見圖像的部分，但無法看見和解釋整體。最後為認知內隱(recognizing-in)，認知內隱介於「看作」和「未見整體」之間。

參、研究方法

一、研究法與研究方式

本研究參照 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)中的研究方式，並稍作修改，只取簡圖部分訪談學生，旨在探討臺灣學生對於幾何圖形的辨認與認知，並進一步探討學生在幾何圖形中展現的視覺空間思維歷程。

本研究採用質性研究法中之個案研究法，採用多面向的方式，深入了解被研究者的經驗世界(潘淑滿，2003)，研究方法主要採用半結構式訪談方式，對學生進行一對一訪談，研究者不會事先進行教學，施測時，受訪學生不受任何限制，只需依照訪談大綱(表 3-3-1)自由的回答，研究者會依照學生回答的情形，適時追問或是給予指示，以深入探討學生在非正式的數學學習環境中，有什麼數學體驗與思考過程。

二、研究對象

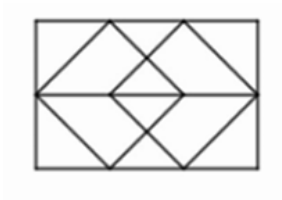
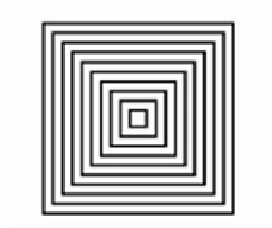
本研究對象為 2 名研究者所任教的五年級學生，程度依期中考數學表

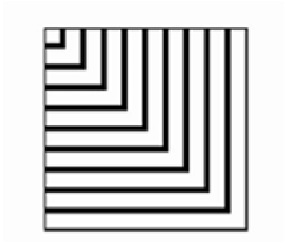
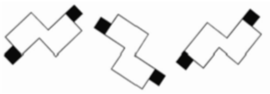
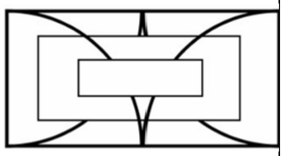
現挑選 2 名中間程度的學生進行施測，施測方式採半結構式訪談。

三、研究工具

本研究的研究工具有二，包含 M. Kus&E. Cakiroglu(2022)中的各種藝術家的藝術創作作品的複合圖形簡圖和研究者依照預試結果所寫出的半結構式訪談大綱，如下表 1。

表 1 訪談學生的題目與問題

問題分類	藝術創作作品的複合圖形簡圖	藝術創作作品的簡圖說明	訪談大綱（會依研究對象的回答進行提問調整）
辨別 2D 或 3D	Q1 	左圖展示了 2D 和 3D 的圖像。立方體嵌入在一個六邊形中。它可以被視為 2D（六邊形）和 3D（立方體或三角柱）。其他 2D 形狀如三角形、正方形和平行四邊形也出現在圖中。	1.你看到什麼? 2.是立體還是平面? 3.有沒有可能是立體的? 4.是立體的什麼形狀? 5.怎麼看?
	Q2 	左圖展示了 2D 和 3D 的圖像。可視為 2D（例如一個長方形中嵌入兩個正方形，兩個正方形重疊部分為一個小正方形）或 3D（嵌入長方形中的兩個三角錐）。三角錐可以在將圖翻轉後，從頂部看到。左圖顯示了可逆視角的例子（深度反轉）。左圖顯示了三角錐的 2D 表示及可逆視角。在此圖中，可以從不同視角觀察三角錐（從左到右或從右到左）。圖像還可以被解釋為重疊的梯形、正方形平行四邊形和三角形。	1.你看到什麼? 2.是立體還是平面? 3.有沒有可能是立體的? 4.怎麼看? 5.(幫學生轉方向後再問)立體了嗎?
	Q3 	左圖展示了一個使用擴大或縮小的同心正方形來創造深度錯覺的例子。從 3D 視角來看，從底部或頂部看到的金字塔，而 2D 視角可能顯示嵌套的正方形。	1.你看到什麼? 2.是立體還是平面? 3.有沒有可能是立體的? 4.為什麼這個圖是金字塔?

	Q4 	左圖為嵌套的正方形，其大小隨著比例改變，也可以被視為一個從側面看來的金字塔(金字塔的兩個側面)。	1.你看到什麼? 2.是立體還是平面? 3.有沒有可能是立體的?怎麼看?
圖的異同	Q5 	左圖展示了由四個不同幾何形狀組成的圖形。每個形狀都結合了正五邊形、三角形和正方形，沒有空隙。	1.你看到什麼? 2.四張圖相同嗎?
	Q6 	左圖展示了旋轉這些形狀系列的一個示例，最後一個與其他不同。	1.你看到什麼? 2.三張圖的異同?
圖形中的重疊與隱藏	Q7 	左圖由嵌入、重疊和隱藏的幾何形狀組成，該圖展示了重疊的矩形和扇形。	1.你看到什麼? 2.各形狀之間有關係嗎?

資料來源：M. Kus&E. Cakiroglu(2022)與研究者自行修改

四、資料收集與分析

(一)訪談實錄與學生文檔

研究者在每次與學童進行一對一訪談過程中，全程皆會以手機錄影、錄音，以記錄學童實際解題過程。由於學童在解題時的手部動作，可以視為其在心智中思考(thinking)的體現(虞富崴, 2023)，因此在錄製畫面時，會調整畫面在圖紙與手部周圍，以確保資料的完整性。研究者在訪談過程中，會詢問學童在各圖形觀察到什麼，問題例如：「你是從哪裡開始觀察的？」、「你看到了什麼？」、「為什麼會這樣說？」、「你的想法是什麼？」。學生文檔包含學生在受訪時對各簡圖(表 1)進行的畫記、草稿、文字等。

(二)資料分析與編碼

本研究的資料分析主要集中在學童的幾何圖形視覺空間認知思維上，研究者將個案在施測時的影像進行分析，並由研究者進行逐字稿謄打。研究者將訪談影像與逐字稿反覆查看，根據 M. Kus & E. Cakiroglu(2022)中的視覺空間指標(表 2)進行分析。

表 2 視覺空間思維的指標

編碼	描述
識別幾何形狀	確認並命名藝術作品中的 2D 和 3D 幾何形狀
將形狀識別為現實物體	基於視覺相似性，將幾何形狀與現實物體聯繫起來（例如，將幾何形狀比作道路或鞋子）
命名形狀及其屬性	根據其幾何屬性識別並命名幾何形狀（例如，

	命名一個幾何形狀，並解釋其長度和角度關係、面、頂點和邊的數量）
從不同視角識別形狀	從特定視角識別和想像形狀（例如，想像藝術作品中表示的 3D 形狀的視角，當視角改變時的視圖）
分解形狀	將整個形狀分割為較小的單位（例如，將形狀切割成相同大小的單位，將不規則形狀分解為規則多邊形）
轉換幾何形狀	識別和想像剛性或非剛性地保持形狀屬性的形狀變換
縮放	確認形狀大小的變換，並在心中通過保持形狀內部或形狀之間的關係來改變大小（例如，將藝術作品按特定比例進 行縮放）

資料來源：參照 M. Kus&E. Cakiroglu(2022)中的視覺空間思維指標並修改

肆、研究結果與討論

一、 視角轉換

在表 1 中，二位學生針對 Q1 和 Q2 進行辨認時，當研究者提問：「你看到了什麼？」二位學生皆能辨別出幾何形狀，在 Q1 看出圖形是由三角形和正方形所組成(圖 2)，在 Q2 中看出圖形有長方形，重疊的正方形，重疊部分為兩個三角形，研究者繼續提問：「還有看到什麼？」二位學生皆回答沒有了，當研究者告訴二位學生圖形是立體的時候，小萱能直接指認出正方體，小安則是直到研究者提示圖形為三角柱，在旋轉紙張後才能辨認三角柱(圖 3)，這似乎意味著小萱和小安都需要在有條件的提示下，才可以將視角轉換，從平面圖形中辨認出立體圖形。接著，研究者詢問小安：「為什麼之前看不出來？」小安回答：「方向不一樣。」我們可以發現，圖形在紙上的呈現方式，也會影響學生的圖形辨別。

二位學生進行 Q2 辨認時，二位學生都能直接看出正方體，接著也能辨認出平面的長方形、正方形和三角形，但識別的順序和 Q1 相反，兩位學生皆因為前一題為立體圖形，在接下來的題目也以立體的方式看圖形。

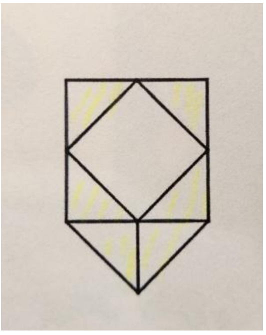


圖 2 小安辨認出平面圖形

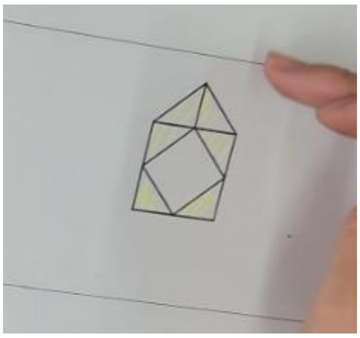


圖 3 小安將紙張翻轉後辨認出三角柱

二位學生在辨認 Q1 和 Q2 為立體圖形時，經提示後能辨認出在課堂中學習過的立體圖形，到了 Q3 和 Q4 時，二位學生不約而同的看出 Q3 圖形有種從外到內越來越遠的感覺，像一個金字塔，Q4 也被認為是金字塔，二

位學生甚至能說出Q3和Q4之間的關聯，以下是和小萱的問答節錄：

研究者:第三個為什麼是立體圖形?

小萱:就越來越大，就是看得越來越大，然後下面越來越深就是這裡是旁邊，有點像金字塔，上面就是一個一個小的，下面有比較寬、比較粗的底座這樣子支撐住。

研究者:所以你覺得它是一個金字塔。那它(Q4)呢?

小萱:它就是這裡(Q3)的一塊。(圖 4)

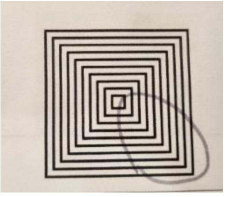


圖 4 劃記Q4就是Q3中圈起來的地方

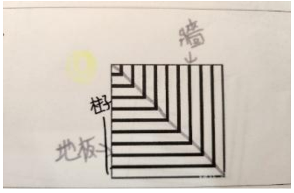


圖 5 陽光照射柱子產生的陰影

更有趣的是，小萱把Q4想像成了陽光照射柱子產生的陰影(圖 5)，這樣的生活常見現象幫助了小萱能夠將形體辨認成凹進去的立體圖形。

二、　識別幾何圖形是否相同

二位學生在分析Q5時，能根據圖形的特徵去切割成不同的形狀，例如看到橘色圖形明顯的五邊形的其中四條邊，畫一條線分成五邊形，接下來看到正方形的三條邊，畫一條線分成正方形，最後就剩三角形。學生在被問到四個圖形有沒有相同時，會依照切分出來的圖形一一比對，一開始小安依照他的切分方式，只發現橘色和藍色的圖形相同(圖 6)，在經過研究者提醒檢查切分方式是否有誤後，小安發現紅色圖形上的線切分出來的不是三角形，修正後發現紅色和棕色的圖形相同(圖 7)。

在Q5辨別異同時，小安除了拿兩張題目紙進行重疊比對、轉換紙張方向去辨別，還將圖形剪下，直接進行了比對，這些動作能讓小安在識別異同上，又更直接的感受。

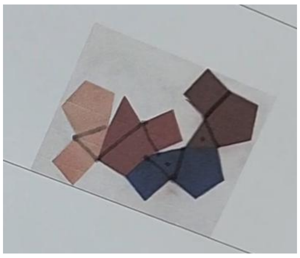


圖 6 未經提醒的劃分

圖 7 經提醒後的劃分

伍、結論與建議

本研究旨在了解國小五年級學生在非正式的數學學習環境中，有什麼是學體驗和思考過程，以下就待答問題歸納出以下結論：

在非正式的數學學習環境中，使學生能夠展現更多的視知覺過程。透過觀察不同的簡圖(例如，同時具有2D和3D的幾何圖形、具有隱藏形狀的簡圖、圖形相同與否等）引發了學生的多種思考過程。例如：兩位學生都能辨別Q4是Q3的其中一部份，也能辨認出圖形像金字塔，小萱甚至還將圖形識別成生活中所看到的物體經陽光照射所產生的陰影，這些都是在正式數學課堂中無法發現的。

本研究還為讓學生在分析幾何圖形時，擁有更多的思考過程，在被問

到圖形是否為 3D 立體圖形時，讓學生經過旋轉紙張、用色筆去描繪等視角轉換動作，讓學生的視知覺能從平面轉換到立體；在被問到 Q6 的三個圖形是否相同時，學生能進行旋轉紙張、剪裁、測量等方式去辨別，這也是在繁忙的數學課堂中，無法讓學生慢慢嘗試的。

在課堂上，學生通常沒有機會體驗這些感覺，這種體驗可以激發學生的數學探究。因此，非正式的數學學習環境能夠提供學生更多對幾何的思考與參與機會。

參考文獻

一、 中文部分

虞富崴(2023)。**探究學生在幾何任務中展現之數學創造力與視覺推理歷程及其間之關聯**。[碩士論文，國立臺灣師範大學]。臺灣碩博士論文知識加值系統。

潘淑滿(2003)。**《質性研究：理論與應用》**。心理。

二、 英文部分

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist & A. P. Schultz (Eds.), *Learning and teaching geometry*, K-12(1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval(1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings.

Duval(1998). Representation Registers in the Solution of Calculus Problems.

Kus,M., & Cakiroglu,E.(2022).Mathematics in the informal setting of an art studio:students' visuospatial thinking processes in a studio thinking-based environment. *Educational Studies in Mathematics* ,2022(110),545–571. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10142-8

Newcombe, N. S., & Shipley, T. F. (2015). Thinking about spatial thinking: New typology, new assessments. In J. S. Gero (Ed.), *Studying visual and spatial reasoning for design creativity* (pp. 182–195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9297-4

Noble, T., Nemirovsky, R., Dimattia, C., & Wright, T. (2004). Learning to see: Making sense of the mathematicsof change in middle school. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9(2), 109–167. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000040891.50250.7e

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Academic Press.

Case Study on Visuo-Spatial Thinking of Geometric Shapes in Fifth-Grader Elementary School Students

Tai-Ying Wu [1] Hui-Yu Hsu [2]
[1] Graduate Instiute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
[2] Graduate Instiute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

Abstract

This study aims to investigate the visual perception of geometric shapes among fifth-grade elementary school students in informal mathematical learning environments, as well as to explore the thinking processes involved. The researcher referred to the methodology used by M. Kus & E. Cakiroglu (2022) with slight modifications, focusing only on simplified diagrams to interview students. This study adopts a qualitative research approach, specifically case study methodology, and primarily utilizes semi-structured interviews for one-on-one sessions with students. No prior teaching is conducted by the researcher. During the data collection, the interviewed students are not subject to any restrictions and are asked to freely respond according to the interview outline. The researcher will follow up on the students’ responses as necessary and provide guidance to further explore the visual-spatial thinking processes that can be prompted in students within informal mathematical learning environments. The results indicate that informal mathematical learning environments enable students to exhibit more visual perceptual processes.

Keywords: Geometric shapes、 Visual-spatial thinking,、Informal mathematical learning environments

國小六年級擬題的數學創造力表現之研究

范喻婷[1]　許慧玉[2]

[1] 國立清華大學數理教育研究所 debby199511@gmail.com

[2] 國立清華大學數理教育研究所 huiyuhsu@mx.nthu.edu.tw

摘要

本研究旨在探討台灣國小六年級學生在數學擬題任務中的數學創造力表現，根據 Leikin 的創造力評估模型，採用流暢性、靈活性、獨創性三項指標來評估學生的數學創造力(Leikin et al., 2009)。本研究對象為桃園地區國小六年級學生，共十位同學參與施測。施測工具為多元擬題任務，分為三大主題，包含零錢問題、分數問題與成分問題，主要評估學生在日常生活情境中運用數學知識進行擬題的表現。本研究以統計分析為主，輔以訪談，比較學生在不同題目情境下的表現差異。

研究結果顯示，學生在這三項擬題任務中的流暢性表現大致相當，在短時間內產生多個數學問題的能力較為平均。然而，在靈活性與獨創性方面，學生的表現則會因題目條件的限制程度而有所不同。例如，在條件較為開放的情境下，學生能夠提出更多樣化的數學問題，展現出更高的創造力。而當題目條件較為明確且限制性高時，學生的靈活性與獨創性表現則相對受限。

透過學生擬定的題目，研究者能辨識其數學概念中不足，突顯擬題活動可幫助教師診斷學生的數學理解情況。本研究期許擬題活動能促進學生的深度思考與靈活運用，培養數學創造力與解決問題能力，同時為數學教育提供新的評量視角，強調概念建構與創意思維，最終提升學習品質與樂趣。

關鍵字：擬題、創造力、多元評量

壹、緒論

一、研究動機與背景

近年來，數學教學逐漸從以程序性問題為主的模式轉向更加開放和多元的方法。而這與十二年國民基本教育課程綱要中所提到的核心素養：自主行動、溝通互動與社會參與的概念不謀而合。關鍵在於了解學生的需求以及應學習的內容，並將學生從被動的學習者轉變為主動的探索者。這樣的轉變有助於提升學生自主學習的能力，同時培養其獨立思考與批判性判斷的能力。

而擬題教育的實踐體現了這一理念，教師的角色不再僅僅是知識的傳遞者，而是轉變為學習的引導者與陪伴者。透過這種方式，學生在學習過程中能掌握更多的主動權，從而更有效地發展其學習能力與創造力。因此，教師若能以更加開放的心態來引導課堂，鼓勵學生探索、改編或創造既有的數學程序與方法，甚至發現新的計算方式，將能激發學生更高的學習興趣與創造力，進一步培養其批判性思考與問題解決能力。

綜合上述，研究者認為，透過擬題活動，可以為數學教育帶來一絲新的可能性，如同投下一顆小石子，激起陣陣漣漪。在繁忙的解題過程中，學生能藉由擬題放慢腳步，深入思考題目的結構與形式，從而提升他們的數學理解與創造力。

二、研究目的與問題

隨著近年來數學教育越來越重視核心素養，例如創新與應變能力，十二年國民基本教育課程綱要多次強調培養創造力以及勇於創新的重要性。透過分析學生的擬題思維，以學生的數學創造力為評估的一種方式，了解學生在擬題的內容上是否有差異。

本研究旨在評估台灣六年級學生於擬題的表現，採用 Leikin 其創造力評估模型，也就是考慮學生在擬題表現上的流暢性、靈活性、獨創性來評估學生的數學創造力(Leikin et al., 2009)。此三項指標(流暢性、靈活性與獨創性)為Torrance提出的數學創造力項目的指標；許多研究者普遍將 Torrance 的此三項創造力指標應用於數學領域，並記錄了數學創造能力測量的建構效度，因此研究者認為在本研究中應用該框架是合理的。

基於上述目的，本研究將針對下列問題進行探討：

(一)台灣國小六年級學生在擬題任務中的數學創造力流暢性、靈活性及獨創性的表現為何？

(二)在不同擬題任務中，國小六年級學生擬題之樣態為何？

三、名詞解釋

(一)擬題

擬題是指學生在教師所給定的數學條件下，以先前的題目為架構，依自己的數學知識、想法、經驗組織成一個完整的數學題目。

(二)國小六年級學生

本研究所指的國小六年級學生，是指 113 學年度就讀國小六年級的學生，該群學生於 108 學年度入學後，即按十二年國民基本教育課程綱要之學習內容及學習表現所編撰的教科書來進行學習。

(三)數學創造力評估模型

本文所提及的數學創造力評估模型，是 Leikin 由 Torrance 所提出之創造力四個操作型定義的其中三項而來，是指擬題中所反映其數學思維的流暢性、靈活性和獨創性(Leikin et al., 2009; Torrance, 1974)。

1.流暢性：代表的是學生在提出數學問題時能產生出多少未重複的想法，且這些在數學情境中的想法還必須符合特定領域的規則和定義；意指學生生成正確問題的數量。

2.靈活性：反映學生生成問題的多樣性以及解決問題方法的多樣化程度。

3.獨創性：學生所提出問題的相對稀有性，側重於學生生成問題的創新性和與眾不同之處。

四、研究限制

本研究以桃園市某國民小學的六年級為研究對象，故要推論至其他地區、其他年級或其他學習內容，需進一步評估、研究確認。

貳、文獻探討

一、擬題的分類

在數學擬題的研究中，研究者對於擬題的類型進行了多方的探討，其根據切入的觀點不同，形成了多樣化的分類方式。有的以題目的結構進行劃分；有的以情境的結構進行分類；還有的從布題的方式來進行。這些分類方式的核心目的，都是在協助學生「擬題」。表 1 將根據 Reitman、Silver、Stoyanova 與 Ellerton、坪田耕三及梁淑坤等學者的研究，對擬題的分類方式進行整理與比較。

表 1 擬題類型比較表

	Reitman (1965)	Silver (1994)	Stovanova 和 Ellerton （1996）	坪田耕三 （1987）	梁淑坤 （1997）
結構題	已知條件、問題目標已定義清楚	1.從已知的數學問題中再產生出新的問題	1.結構化情境	1.模仿法或類題法	6.題目類
瑕結構題	已知條件已定義清楚；問題目標則否	2.從已知的經驗或情境中再創造出新類型的問題	2.半結構化情境	2.算式法 3.原理法 4.訂正法 5.實驗法 7.題材法	1.算式類 2.文字類 3.圖表類 4.解法類
	已知條件未定義清楚；問題目標則已定義清楚	—	—	—	5.答案類
	已知條件、問題目標均未定義清楚	—	3.自由情境	6.自由法	—

註：此表整理改編自(林群雄, 2004)

二、數學創造力

擬題與解題是數學學科和數學思維的核心元素(Silver, 1994)。數學家在從事學術活動時，往往展現出主動構思問題的能力(Polya, 1945)。雖然他們有時解決由他人提出或文獻中記載的重要問題，但更多時候，他們根據個人經驗和興趣提出自己的問題(Poincaré, 1948)。

正如這些觀察所表明的，創造力的關鍵不僅僅在於擬題，而是在於擬題與解題之間的交互作用。這種交互包括構思問題、嘗試解決問題、重新構思問題以及最終解決問題。在這一過程中，創造力得以展現。

創造的過程是發散性思維與聚斂性思維相互結合的結果(Cropley, 2006; Guilford, 1967)。Cropley 認為，創造力是透過發散性思維產生多樣且新穎的想法，而這些想法的新奇性需要通過聚斂性思維進行評估。Guilford 和 Torrance 指出，流暢性、靈活性、獨創性與精緻性是構成創造力的核心要素(Torrance, 1974)：

1.流暢性(Fluency)是指想法的連續性，盡可能生成多個問題(Mann, 2006)；

2.靈活性(Flexibility)是指運用不同解決方法及改變思維策略的能力；

3.獨創性(Originality)是指獨特且創新的思維方式；

4.精緻性(Elaboration)是指描述、闡明與概括想法的能力。

在這些要素中，流暢性、靈活性與獨創性是許多研究者在評估數學創造力時採用的核心框架。

三、擬題評量標準

為了避免在使用創造力量表測量數學創造力時可能引發的偏誤，數學教育學者逐漸轉向從解題或擬題的角度來探索數學創造力(Silver, 1997)。近年來，研究團隊以認知取向為基礎，提出了一套以解題觀點為核心的數學創造力評量架構。該架構將數學創造力評量分為流暢性、靈活性和獨創性三個維度(Leikin et al., 2009)，為創造力的評估提供了更具體且操作性的標準。

徐文鈺認為擬題能力可視為數學創造力的一項指標，並參考 Torrance、Greer、Getzels 和 Jackson 等學者的創造力測驗方法，從流暢性、靈活性、獨創性和精緻性四個向度進行評估(徐文鈺, 1996)。其中，流暢性指學生擬出正確題數的多寡；靈活性指題型種類的多樣化；獨創性指題目所具的特殊程度；精緻性則與解題過程中所需的步驟相關。梁淑坤進一步將學生擬題作品按流暢性、靈活性及複雜性分成五類(少了獨特性)，並以「A」至「E」作為代號編碼，再依分類方式深入分析作品內容，為評估學生的擬題能力提供了具體方法依據(梁淑坤, 1994, 1997)。分類方式整理為圖 1。

綜合以上所述，擬題的評量可以根據流暢性、靈活性、獨創性和精緻性四個向度，生成指標，進而評量學生的擬題創造力。

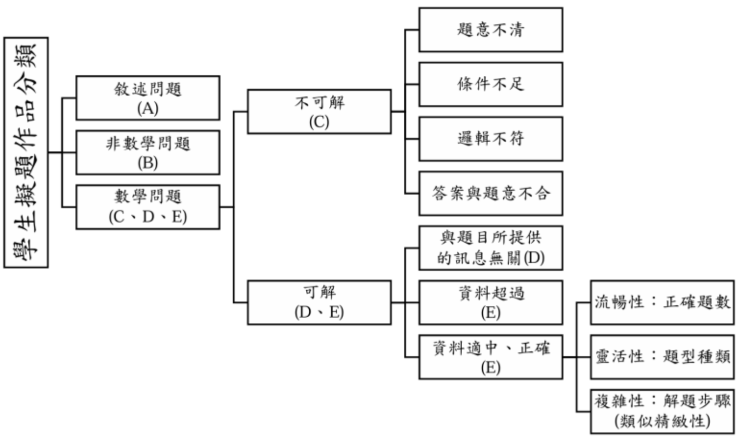


圖 1 學生擬題作品分類(梁淑坤, 1997)

參、研究方法

一、研究對象及方法

本研究旨在探討台灣六年級學童在數學擬題任務中的表現，聚焦於流暢性、靈活性及獨創性三個面向，以評估學生的數學擬題創造力並進一步分析其表現特徵。

研究對象為桃園地區某國小六年級學生，共計十名。鑑於學生的思維模式與解題歷程可能存在個別差異，除透過擬題學習單蒐集學生的書面表現外，本研究亦再學生完成學習單之後，輔以研究者的訪談與提問，以獲取更深入且完整的數據，以確保研究結果的全面性與精確性。

二、研究工具

(一)擬題學習單

本擬題學習單包含三個大題，描述相關情境與數學資訊，要求學生設計三到五個不同的問題並回答。施測題目參考國內外擬題文獻及 108 課綱教科書內容，根據研究目的編制為開放式問卷，期望學生能依自身理解自由作答並設計題目。

1. 零錢問題

此題改編自 Silber 和 Cai。學生會先知道文字描述的情境，了解找零的金額以及大美可以使用的硬幣種類(Silber & Cai, 2021)。此題為真實生活的情境，需考量多項數學資訊，例如：兩盤炒飯的價格、找零的金額和找零方式的限制。這個任務暗示了一個明確的目標：我們需要找錢給顧客。

第一大題：根據以下情境設計**至少3個**數學問題，越多不同想法越好，並寫下回答。

大美在一家餐廳工作，那裡一份炒飯的價格是129元。一位顧客進來，點了兩份炒飯，並給大美一張500元的鈔票。但此時收銀機裡只有50元硬幣、10元硬幣和1元硬幣。

圖 2 零錢問題的題幹

2. 分數問題

第二個問題跟分數有關。此題改編自 Tichá和 Hošpesová。學生須設計包含兩個分數的文字問題，且須在合理的情況下使用這兩個分數(Tichá & Hošpesová, 2013)。此題僅提供兩個分數，數學資訊較其他題目少。為引導學生設計情境，問卷強調需加入「文字」描述，使題目更完整，因此學生需補充背景資訊，以確保題目清楚且具體。

第二大題：使用 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{4}$ 這兩個分數，設計**至少3個**數學**情境**問題，越多不同想法越好，並寫下回答。

圖 3 分數問題的題幹

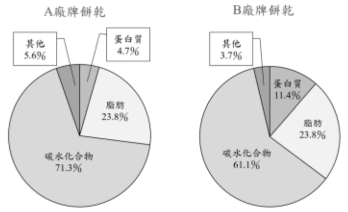
3.成分問題

第三個問題是關於食物成分的圓形圖，這一任務改編自 Silber 和 Cai，引自(Silber & Cai, 2021)。學生會看到兩張圓形圖，顯示兩種餅乾的成分比例，以及每包餅乾的公克數與每日糖攝取建議量，並據此設計不同的數學問題(Silber & Cai, 2017)。此題與零錢問題類似，屬於真實生活情境，包含多項數學資訊，但僅陳述數據，無建議結果。與分數問題不同，學生無需額外補充資訊即可完成擬題。

第三大題：根據以下條件設計**至少3個**數學題目，越多不同想法越好，並寫下回答。

下圖分別為兩家不同廠牌的餅乾營養成分圖。

A廠牌餅乾一包有25公克， B廠牌餅乾一包有15公克。



*參考世界衛生組織(WHO)建議，依每人每天熱量攝取2000大卡計算，精緻糖熱量不可超過每日總熱量攝取的10%為限(即200大卡)，換算糖量即不可超過50公克。

圖 4 成分圖問題的題幹

(二)創造力評估模型

採用 Leikin 的創造力評估模型來評估學生在擬題的數學創造力。Leikin 定義創造力(creativity)為擬題方法的靈活性與獨創性的乘積，以突顯最具有創意的擬題方法。此定義可以避免將原有擬題策略想法當成創造力的情況。多元擬題任務的數學創造力總分是每個擬題問題的創造力得分之和。詳細計算公式及指標請參考表 2。

表 2 創造力評估模式

創造力指標	每個擬題的分數	總分
流暢性(Flu)	1	$\mathrm{Flu} = n$
靈活性(Flx)	對於第一個擬題：$\mathrm{Flx}_1 = 10$ 不同性質的擬題：$\mathrm{Flx}_i = 10$ 相同性質但不同問法：$\mathrm{Flx}_i = 1$ 相同性質相同問法：$\mathrm{Flx}_i = 0.1$	$\mathrm{Flx} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Flx}_i$
獨創性(Or)	不到15%的參與者所產生的擬題策略：$\mathrm{Or}_i = 10$ 15%至 40%：$\mathrm{Or}_i = 1$ 40%以上：：$\mathrm{Or}_i = 0.1$	$\mathrm{Or} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Or}_i$
創造性(Cr)	$\mathrm{Cr}_i = \mathrm{Flx}_i \times \mathrm{Or}_i$	$\mathrm{Cr} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Flx}_i \times \mathrm{Or}_i$

肆、研究結果與討論

一、台灣國小六年級學生在擬題任務中的數學創造力流暢性、靈活性及獨創性的表現為何？

從表 3 可以觀察到每個問題各創造力組成成分的表現，以及創造力分數的表現，可以發現分數問題各項創造力成分平均分數都是最高的，可見學生在該題的創造力表現明顯比其他題較佳，這可能與題目的開放性有關，分數問題給的條件較少，在出題上較不受限制。反而取材比較生活的零錢問題和成分問題，在各項創造力成分平均數上表現不佳；零錢問題的平均數值表現有較多項目比成分問題高，此可說明學生在零錢問題的表現上較成分問題好。

以標準差的數值來說，在流暢性的表現上，三個問題的標準差都很小，表示學生在提出正確問題的題數上不會相差太多，但研究者認為，這可能也與問卷設計有關，因為最初版的問卷設計，在每大題的題幹上有特別標註需設計至少三題的問題，且基本上學生都有達到這項要求，可見學生在讀題以及是否達到題目的要求這個面向上，是比較有經驗的。

在創造力總分的表現上，零錢問題是差異比較小的，在不同擬題的類別上，總類也是比較受限、比較少的，與之相比，分數問題與成分問題，較有機會問出別人比較問不出的問題，所以這兩個題目學生的創造力得分差異很大。成分問題因牽涉到的概念是學生比較不會的，以至於不敢下筆，程度較弱的學生，即便研究者再如何旁敲側擊，依舊無法順利地提出問題，但程度較佳或是

有補習的學生仍能提出些還不錯的問題，程度中等的學生，亦可以想出至少三種不同類型的問題，所以在該題型的獨創性中，學生得分差異較大。

分數問題則因為條件簡單容易出題，且基本上可說是任意的題目都可以套用，學生想出來的題目類別亦最多，所以在獨創性上的表現差異較大。

表 3 多元擬題任務之創造力表現

平均數（標準差）				
問題	流暢性	靈活性	獨創性	靈活性×獨創性＝創造力
零錢問題	4.7(1.95)	28.19(14.16)	11.99(8.79)	90.07(100.00)
分數問題	4.8(2.20)	38.51(13.79)	26.36(18.40)	217.61(124.88)
成分問題	4(1.70)	29.72(15.95)	8.3(12.72)	79.66(127.23)

二、在不同擬題任務中，國小六年級學生擬題之樣態為何？

(一)零錢問題

由於題幹設計，學生出題多圍繞「找錢」問題，如「大美要找多少錢？」較少問「客人可拿回多少？」這可能因題目僅提及老闆名字。此外，少有人問「大美可收到多少錢？」但部分學生會問「兩份炒飯多少錢？」這可能語學生多以「客人」角色來思考有關，會更關注自身付款與找零，而非老闆的角度。

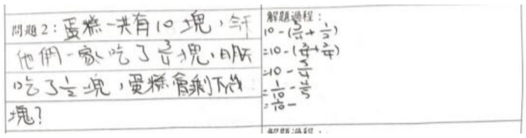
(二)分數問題

在解題時，學生看到題目敘述有「其中的幾分之幾」會使用乘號計算，但自己出題時卻難以想到問句，甚至無法使用「倍」這個字眼。此外，乘除混用的情況也常見，如圖 5 中 20 號同學的回答所示。在除法上，卻較易使用「分」這個字眼，如圖 5 中 18 號的回答所示。較少數的學生能在未受提醒下，寫出包含除的意義。

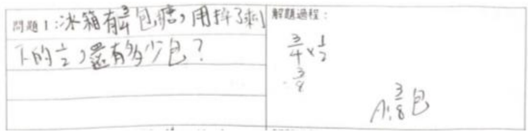
此外，吃了 1/2，到底是「乘以 1/2」還是「減掉 1/2」，取決於學生是否區分單位。同時，當學生要表達「到底是全部的 1/2，還是剩下的 1/2」時，便涉及「整體一」的概念，若未明確思考，列式結果往往與問題不符，如圖 5 中 28 號與 1 號同學的答案所示

20 號同學的回答

18 號同學的回答



28 號同學的回答



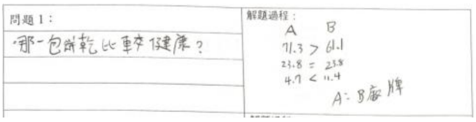
1 號同學的回答

註：藍筆部分為老師在完成問卷之後訪問學生，與學生的共識

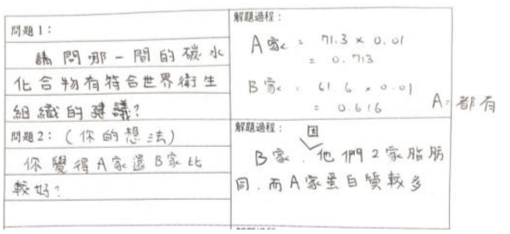
圖 5 分數問題施測者的回答

(三)成分問題

學生提問多集中在「某成分 A 廠牌與 B 廠牌的公克數或百分比相差或相加多少？」較少關注「哪種廠牌的餅乾含碳水超過每日建議攝取量？」此外，部分學生僅列式，未明確說明判斷標準，導致表達不完整，如圖 6 中 29 號同學的回答。回答中亦可見，學生能透過成分組成評估健康性，但常忽略公克數與百分比的差異，影響判斷準確性。例如圖 6 中 18 號同學的列式錯誤，顯示其對百分率概念存在迷思。



29 號同學的回答



18 號同學的回答

圖 6 成分問題施測者的回答

伍、結論與建議

研究結果顯示，學生在這三項擬題任務中的流暢性表現大致相當。此次研究有針對疑問做事後訪問，研究者對每個受測學生基本上都會再詢問還有沒有別的問題可以出，一般來說他們都會說我想不到，但透過口頭鼓勵跟些微引導，其實大部分都可以再問出一些問題，但這個追問問出來的問題，靈活性就不高，因為會跟之前自己提出的問題，有很多雷同的地方。所以在問卷的設計上，不應該給予「至少三題」的這個限制。

在靈活性與獨創性方面，若題目條件較為開放，學生會因為他們當時在學習什麼概念，而會擬出相關的題目，能夠提出更多樣化的數學問題，展現出更高的創造力。這是好現象，因為當學生會用的時候，其實就可以確定其是真的了解了；學生的回應其實也可以了解學生的解題喜好，如果他真的對某種出題方式很有心得，那他出的題目，就會想要讓其滿足自己想達到的效果，並一直出類似的題目，雖然這會導致靈活性就會稍稍降低。不過，這也可以發現學生學習的偏好，若能配合老師的詢問或引導，更能有依據的給予學生質性的評論。

透過學生擬出來的題目，研究者能夠進一步發現學生數學概念中的不足之處，顯示擬題活動有潛力作為形成性評量的工具，幫助教師檢視學生的數學知識理解情況。例如，當學生提出的問題中出現數學概念錯誤或不合邏輯的情況，教師能即時給予回饋與指導，幫助學生修正錯誤概念，促進數學學習成效的提升，本研究期待能為未來數學教育提供參考，進一步幫助學生在數學學習上取得更豐碩的成果。

參考文獻

徐文鈺. (1996). *不同擬題教學策略對兒童分數概念、解題能力與擬題能力之影響* 國立臺灣師範大學]. 臺灣博碩士論文知識加值系統. 台北市. https://hdl.handle.net/11296/6m6t3d

梁淑坤. (1994). 擬題的研究及其在課程的角色. *國民小學數學科新課程概說 (低年級)(152-167 頁). 台北: 台灣省國民學校教師研, 99.*

梁淑坤. (1997). 擬題能力之評量: 工具之製作. *行政院國家科學委員會專題研究成果報告 (編號: NSC84-2511-S-023-006).*

Cropley, A. (2006). Functional creativity: A socially-useful creativity concept. *Baltic Journal of Psychology*, *7*(1), 26-35.

Guilford, J. P. (1967). The nature of human intelligence.

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (2009). *Creativity in mathematics and the education of gifted students*. Brill.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*(2), 236-260.

Poincaré, H. (1948). *Science and Method*. Dover.

Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Doubleday.

Silber, S., & Cai, J. (2017). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 163-184.

Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(4), 877-889.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, *29*(3), 75-80.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational studies in Mathematics*, *83*, 133-143.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests of creative thinking. Directions manual and scoring guide, verbal test booklet B*. Scholastic Testing Service.

A Study on Mathematical Creativity in Problem-Posing Among Sixth-Grade Elementary School Students

Fan, Yu-Ting[1] Hsu, Hui-Yu[2]
[1]Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University
[2]Institute of Mathematics and Science Education, National Tsing Hua University

Abstract

This study aims to investigate the mathematical creativity of sixth-grade elementary school students in Taiwan through problem-posing tasks. Based on Leikin's creativity assessment model, three indicators—fluency, flexibility, and originality—are used to evaluate students' mathematical creativity (Leikin et al., 2009). The study participants include ten sixth-grade students from an elementary school in Taoyuan, Taiwan. The problem-posing tasks cover three main topics: coin problems, fraction problems, and component problems, which assess students' ability to apply mathematical knowledge in real-life contexts. This study primarily employs statistical analysis, supplemented by interviews, to compare students' performance across different problem-posing scenarios.

The results indicate that students demonstrate relatively similar levels of fluency across the three problem-posing tasks, exhibiting comparable abilities to generate multiple mathematical problems within a short period. However, their flexibility and originality vary depending on the degree of constraints imposed by the problem conditions. For instance, in open-ended scenarios, students tend to propose a wider variety of mathematical problems, demonstrating higher creativity. Conversely, when problem conditions are more restrictive, students' flexibility and originality are relatively constrained.

By analyzing students' posed problems, researchers can identify potential gaps in their mathematical understanding, highlighting the potential of problem-posing as a formative assessment tool. This approach enables teachers to diagnose students' mathematical comprehension and provide timely feedback and guidance. This study anticipates that problem-posing activities will encourage deeper mathematical thinking and flexible application, fostering students' mathematical creativity and problem-solving skills. Additionally, it aims to offer new perspectives on assessment in mathematics education, emphasizing conceptual construction and creative thinking to ultimately enhance learning quality and enjoyment.

Key words: Problem-posing, Creativity, Alternative Assessment

2025年
台灣數學教育學會年會暨
第十七屆
科技與數學教育學術研討會

(8) 海報發表

研討主題

「數學教育的創新和精緻教學」

辦理單位

國立臺中教育大學 數學教育學系

台灣數學教育學會

國立臺中教育大學師培處暨數學教學領域研究中心

國立臺北教育大學 數學暨資訊教育學系

從棋盤到決策：透過棋類遊戲培養學生的樹狀圖思維與決策能力之研究

陳宥睿[1]　陳正忠[2]

[1]國立清華大學數理教育研究所 研究生 2138627@gmail.com

[2]國立清華大學數理教育研究所 教授 jcchen2@mx.nthu.edu.tw

摘要

本研究目的旨在探討棋類遊戲如何作為教育工具，培養學生的樹狀圖思維與決策能力。透過文獻回顧與實證分析，研究者發現棋類遊戲能有效引導學生建立系統性的思考，幫助他們在面對問題時，運用層層推演的策略，進行周全的決策評估，而棋類遊戲的規則與機制，促使學生透過預測、分析與應變來做出最佳選擇，從而提升數學推理與問題解決的能力。另外，本研究建議，若能結合其他的互動工具，如數位軟體、程式設計、解謎等活動，將能進一步地擴展學生的學習情境，進行跟深入的研究，使得樹狀圖思維的應用變得更加靈活且多元。

根據研究結果顯示，本研究亦建議教師在課堂上適當的融入棋類遊戲，以啟發學生的決策思維，並結合多種教學工具，創造更具挑戰性與啟發性的學習環境。此外，課程設計應鼓勵學生透過遊戲中的實作與反思來提升決策品質，使其能夠在學科學習上以及日常生活中，靈活的應用樹狀圖思維，培養面對未來挑戰的能力。

關鍵字：棋類遊戲、樹狀圖、決策能力

壹、緒論

一、研究動機與背景

隨著 21 世紀科技與數學應用的蓬勃發展，社會各界對具備數學素養與決策能力的人才需求日益增加。數學教育不僅關乎理論知識的傳授，更應強調應用層面的培養，使學生具備分析問題、解決問題的能力，以應對未來社會的挑戰。根據《十二年國民基本教育數學課程綱要》(教育部，2018)的課程目標，數學教育應注重於培養學生的觀察、演算、推論、溝通和數學表述等各項能力(目標二)，並發展學生運用數學工具思考並解決問題的正確態度(目標三)，進而提升學生運用數學思考問題、分析問題、解決問題的能力(目標四)。本研究即基於此課綱目

標，探討如何透過棋類遊戲，培養學生決策能力與樹狀圖思維，以加強其數學素養與應用能力。

在數學學習中，決策與推理是重要的核心能力，這些能力不僅能增強學科表現，更能應用於日常生活中與未來職場。許多研究指出，將遊戲融入教學過程中，能有效提升學生的學習動機與學習成效(李心儀，2019)。又根據黃若綺(2015)的研究結果指出，桌遊對學習者有顯著的正面效果，不僅能作為教學工具，幫助學生發展數字運算與問題解決能力，還能提升學生的學習動機，激發他們產生多樣且富有創意的想法。

樹狀圖作為數學思維的重要工具之一，對於幫助學生理解複雜的選擇結構以及決策過程有顯著的教育價值。樹狀圖不僅有助於學生進行選擇分類，更能在多層次的情境中，協助學生掌握條件判斷與後續行動的推演(張千惠等，2023)。然而，儘管樹狀圖在數學教育中已有一定的應用，但如何具體且有效地引導學生掌握並應用樹狀圖的思維模式，仍是當前教育研究中的一大挑戰。

棋類遊戲，作為一種富有策略與決策元素的遊戲形式，已被廣泛應用於數學教育中，並顯示出其在訓練學生思維上有一定的潛力，特別是邏輯推理與問題解決方面。在棋局的進行過程中，學生可以學習如何分析不同選擇的可能性，思考並預測對手下一步的行動，這與樹狀圖的思維模式不謀而合。這樣的學習過程，進而幫助學生在實際情境中進行有效的決策，並強化其問題解決的能力。

二、研究目的與研究問題

本研究希望透過棋類遊戲的應用，培養學生樹狀圖思維與決策能力，使其能夠更靈活地應用數學思維於不同的情境，進而提升其數學素養與其他的綜合能力，也能為未來的數學教育提供新穎的教學模式與策略，以達成課綱所強調的核心目標。

故依前述的研究動機與背景，本研究提出的主要研究問題有三：

(一) 在棋類遊戲的學習過程中，學生是否發展出數學推理能力。

(二) 透過棋類遊戲，學生的決策過程是否展現出系統性的思考(如樹狀圖思維)。

(三) 棋類遊戲是否能提高學生的學習動機與自信心，使其更願意挑戰數學問題。

貳、文獻探討

一、棋類遊戲與數學教育的關聯

遊戲自古以來被認為是發展邏輯思維和策略規劃的工具，許多研究表明，遊戲能夠有效促進學生在數學領域的思維發展。Barab 等人(2005)指出，遊戲做為潛在的學習工具，可以將遊戲動機轉化為學習動機，促進學習成就，並促進對數學概念的理解。其中，在棋類遊戲上，Celone(2001)認為下棋對兒童心智發展而言，其能發展兒童一生皆受用的認知能力：專心、批判思考、抽象思考及問題解

決、認知模型、策略計劃、創造力、分析、綜合和評鑑的能力。而黃萬居等人(2007)的黑白棋研究發現，高分組學生在推理能力、創造思考及問題解決能力表現上，明顯優於低分組。

透過上述各學者的研究可發現，棋類遊戲能夠提升學生的學習動機與數學成就，並提供更生動的學習體驗，使得學生能夠過實踐進而深化對數學的理解。

二、棋類遊戲與決策能力的培養

決策能力是學生在現代社會中不可或缺的技能之一，施力瑋(2013)指出，遊戲式學習能夠培養學生在短時間內分析情境並做出最佳決策的能力，這對問題解決與邏輯思維的發展非常重要，而棋類遊戲這種策略型遊戲尤其能夠提升學生的邏輯推理能力，提供了一個的理想的訓練平台。黃萬居等人(2007)在黑白棋的研究中顯示，黑白棋遊戲與學生的創造力及問題解決能力呈現高度相關性。

故可發現，許多研究顯示了棋類遊戲能夠有效的訓練學生的決策能力，使學生在面對不確定性事件或不同情境下，快速做出最佳選擇，可提升其批判思維和策略規劃能力，並有助於發展學生的邏輯推理，強化解決問題的技巧。

三、樹狀圖思維與數學推理的發展

樹狀圖在數學教育中是一個關鍵的視覺化工具，其不僅能幫助學生理解數學概念，還能提升他們的推理能力。在 Aspinwall 和 Shaw(2000)的研究中，強調樹狀圖能夠有效的幫助學生發展數學直覺，在解決較複雜的數學問題時，透過樹狀圖的將其具象化，協助學生清晰的分析並理解步驟，提升他們在多步驟解題過程中的思考效率。而樹狀圖的分層特性使得學生能夠進行分階段的思考，透過這一過程，學生不僅能夠更自信地解決數學問題，還能在推理過程中加深對數學概念的理解。Giacomone 等人(2019)發現，在使用樹狀圖時，受試者能夠更有效地將思考與運算步驟視覺化，這有助於受試者在做數學推理時能夠更有系統性的思考。

這些研究表明，樹狀圖不僅能幫助學生在數學學習中進行有效的推理，藉由促進其推理思考能力，能直接或間接的提升學生問題解決的能力與表現(陳李綢，1992；張景媛、陳荻卿，2003)，尤其是當樹狀圖結合桌遊或其他互動性強的學習活動時，能夠更進一步激發學生的學習動機與數學思維能力，這也說明了樹狀圖在數學推理發展中的重要性，以及在數學教育中的應用潛力。

四、遊戲化學習可提升學生學習動機

遊戲化學習(Gamified Learning)做為一種將遊戲元素融入教育環境的教學策略，旨在提升學生的學習興趣與動機。邱于平與江育融(2022)在其研究中，以自我決定理論為基礎，探討遊戲化教學對學生內在學習動機的影響，而研究結果指出，合作、正面回饋和掌控感等遊戲化元素能滿足學生的歸屬、能力和自主需求，進而提升其內在學習動機。另外，謝佩勳(2017)研究了遊戲化即時回饋系統對國中生內外在學習動機、學習投入度、注意力與學習成效的影響，結果顯示，遊戲化即時回饋系統能有效提升學生的上述能力，從而提高學習成效。

綜合上述研究，遊戲化學習透過滿足學生的心理需求，如歸屬感、能力感和自主性，能有效提升其學習動機與興趣。當然，遊戲化元素的設計需謹慎，避免

過度依賴外在獎勵而削弱內在動機。

五、 系統性思考與數學教育的連結

系統性思考強調從整體和關聯的角度看待問題，而不僅僅聚焦於單一部分(Senge, 1990)。數學問題通常需要學生從多個維度做分析，並選擇最佳的策略來解決問題，因此這一思維方式在數學教育中的決策過程具有重要意義。Schoenfeld(1985)也指出，透過系統化思考，不僅能提高學生的數學解題效率，還能夠加強他們的決策能力，幫助他們在面對複雜情境時做出最佳選擇。

多項實證研究皆顯示，系統化思考不僅能幫助學生理解數學問題，促進他們在多步驟推理中邏輯清晰度，更能培養其在未來面對挑戰時做出更理性和有效的選擇。因此，未來應在數學教育中更加重視學生的系統化思考，助長學生數學思維和解題的能力。

參、研究方法

本次研究進行問卷調查法，針對三個研究問題，以李克特氏五點量表(Likert scale)分別設計出四個問題共計十二題作為本次研究調查。

一、實施對象與活動控制

本次實施對象共兩個班級，皆為假日數學營隊之兩不同梯次的參加學員，開放國小一至六年級學生自由報名參加，故學生來自於不同學校所組成的混齡班級。第一個班級為 38 人，第二個班級為 37 人，每個班級皆分為八大組，每大組人數皆為 4 至 6 人。分組方式採隨機分組，但會確保一個組別內，低年級學童或中年級學童或高年級學童的人數必定為兩人以上，以避免在後續的遊戲中，學生思維程度與能力上的落差所造成實驗的不準確性。

另外，每兩個大組皆會安排一位工作人員在旁協助，一方面確保學童在遊戲時對規則的誤解，另一方面可以遞補無法與他人形成對戰組合的單一學童。

二、使用遊戲「Hexapawn」

本研究所使用的主要棋類遊戲為「Hexapawn」，此為 Martin Gardner 所創造的雙人棋類遊戲，主要在3×3的棋盤上進行，但也可將其變形為遊玩在$n \times m$的棋盤中。每位玩家初始會擁有一排棋子，透過移動棋子到達對方的領地，或是移動後始得對方無法再移動(造成僵局或完全吃掉對方的棋子)來獲得勝利。

三、實施流程

(一)將每大組的學生分成一些小組，並講解規則確認學生了解後，先以2×3的棋盤大小做試玩，確認熟悉規則後，再以3×3的棋盤大小遊戲。

將每大組的學生以 2 至 3 人為一小組，分組方式老師指定，以確保在小組內的能力落差過大。接著詳述說明規則並做示範，確認學生都對規則有初步了解後，讓學生們彼此對戰。

(二)帶領學生了解「樹狀圖」，並引導學生嘗試製作2×3版本的樹狀圖，最後邀請學生分享自己的看法。

樹狀圖是一種分層結構，幫助學生把所有可能性具現出來，先利用簡單的問題讓學生們理解何謂樹狀圖。例如：早餐有稀飯與吐司兩種主餐可選擇(擇一)，並有煎蛋與玉米兩種配菜可選擇(擇一)，則共有幾種搭配方式？(如下圖 1)

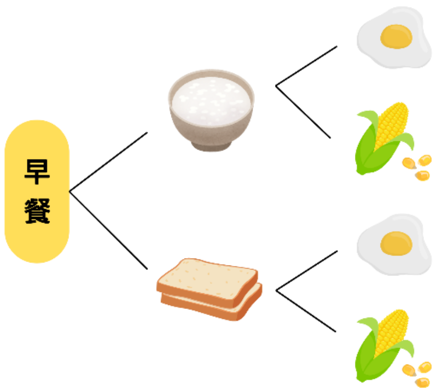


圖 1 早餐範例之樹狀圖

確認學生都了解樹狀圖後，引導學生製作2×3版本的樹狀圖，先詢問黑棋第一步的走法(左邊的棋子往前或右邊的棋子往前)，後續讓學生自行嘗試著繪製出完整的樹狀圖，完成後透過樹狀圖思考兩個問題：「是否有機會和局？」以及「若玩家的邏輯推理都很清晰並且無任何失誤，則先手或後手必勝？還是先後順序對勝負無影響？」。

確認大多數的學生都能順利製作出後，公布老師的解答(如下圖 2)，並邀請學生回答上述兩個問題，得到「不會和局」以及「後手必勝」的正確答案。

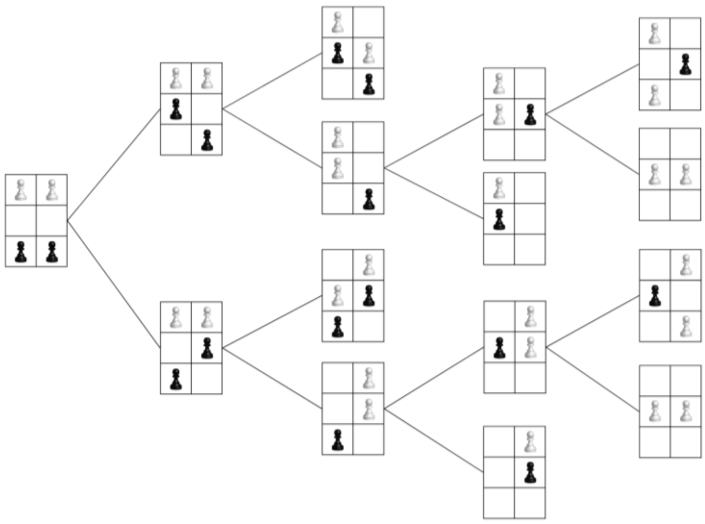


圖 2 Hexapawn 之2×3版本的樹狀圖

(三)再次讓學生進行3×3版本的遊戲，並鼓勵其嘗試製作3×3版本的樹狀圖對戰，促進其樹狀圖思維發展，確保自身的每一步棋都是最佳策略。

鼓勵學生站在雙方的立場做思考，並且以最大效益(最優解)作為移動，可部份捨去個人可以明顯觀察出來之必輸棋路，因此每位學生所化簡之樹狀圖皆不盡相同。繪製時同時思考步驟(二)之兩個問題，完成後利用遊戲驗證自己的猜想。

(四)完成學習單並填寫回饋調查表單，完成表單後繳回並領取小禮物(文具)。

肆、研究結果

經過兩個班級的實施後，共回收 75 份調查問卷，統計結果分別整理如下：

一、在棋類遊戲的學習過程中，是否對學生的數學推理能力有幫助？

大部分的學生在參與棋類遊戲學習後，確實發現在遊戲時，能更有條理的進行思考。其中，關於「棋類遊戲對我的數學推理有幫助。」之問題的平均分數最高(平均 4.23)，而在「我能有規劃的下每一步棋。」問題的平均分數僅次於第二(平均 4.19)，這也與 Sala & Gobet(2016)的研究結果「棋類遊戲促進了學生的問題解決策略和數學推理能力，並對學術成績有正面影響」相符。問卷統計結果如下表 1：

表 1 棋類遊戲關於數學推理能力之問卷試題

問題	非常不同意(1)	不同意(2)	普通(3)	同意(4)	非常同意(5)	平均分數(5 分制)
1. 在下棋的過程中，我會考慮多種可能的走法。	3	4	10	28	30	4.04
2. 我能夠推理並計算出其他可能性。	2	5	10	27	31	4.07
3. 我能有規劃的下每一步棋。	1	3	9	30	32	4.19
4. 棋類遊戲對我的數學推理有幫助。	1	3	6	32	32	4.23

二、透過棋類遊戲，學生的決策過程是否展現出系統性的思考(如樹狀圖思維)？

本大題的研究結果顯示，絕大多數的學生在經過此遊戲後，在決策過程中皆展現了較高的系統性思考(平均 4.26)，能夠預測和計算在某一行動後的未來結果，並且能夠透過棋類遊戲增加數學推理能力(平均 4.23)，而這也與 Giacomone 等人(2019)的研究相互呼應。問卷統計結果如下表 4：

表 4 樹狀圖思維的應用與系統性思考的發展之問卷試題

問題	非常不同意(1)	不同意(2)	普通(3)	同意(4)	非常同意(5)	平均分數(5 分制)
1. 我會利用樹狀圖來做決策。	1	2	7	32	33	4.26

2. 我能順利的推理出不同策略的結果。	1	3	7	31	33	4.23
3. 我能進行多步驟的邏輯推演。	2	5	10	27	31	4.07
4. 我會分析不同階段的棋局	1	5	10	29	30	4.09

三、棋類遊戲是否能提高學生的學習動機與自信心，使其更願意挑戰數學問題？

棋類遊戲通過提供一個富有挑戰性和趣味性的學習環境，成功的激發了學生對數學的學習興趣(平均 4.32)，他們不再視數學為枯燥的學科，反而將其視為充滿挑戰和樂趣的活動，並且透過遊戲，逐漸建立自身對於問題解決能力的成就感。正如同李岱倩(2017)的研究結果，學童在接受遊戲體驗活動後，對於整體的學習動機是有所提升的。問卷統計結果如下表 5：

表 5 棋類遊戲是否有助於提高學生的學習動機與自信心之問卷調查試題

問題	非常不同意(1)	不同意(2)	普通(3)	同意(4)	非常同意(5)	平均分數(5 分制)
1. 參加棋類遊戲後，我對數學更有信心了。	1	0	9	38	27	4.20
2. 棋類遊戲讓我覺得數學挑戰很有趣。	0	2	7	31	35	4.32
3. 因為棋類遊戲，我獲得了在課本上無法獲得的成就感。	2	3	8	29	33	4.18
4. 遊戲結束後，我願意挑戰更難的數學問題。	3	7	9	27	29	3.96

伍、結論與建議

一、結論

本研究深入探討了棋類遊戲「Hexapawn」如何幫助學生發展樹狀圖思維與提升決策能力。研究結果顯示，棋類遊戲能夠顯著促進學生的數學推理能力與邏輯思維，尤其在處理複雜問題時，學生能有效運用樹狀圖進行多層次的推演，從而

增強了他們的系統性決策力。過程中，學生不僅加深了對數學概念的理解，也提升了自信心和學習動機，對學習產生了更大的興趣。

二、建議

基於本研究的發現，對未來在這方面的研究，提出幾點建議如下：

(一)推廣遊戲式學習

遊戲式學習可更進一步的推廣或納入正式的數學課程中，這不僅能提升學生的數學思維，還能激發學生在學習過程中的主動性與創造力。其次，建議應該更進一步探索樹狀圖思維在不同年級以及更多數學領域中的應用，這不僅能讓學生在學習過程中逐步掌握更高層次的思維模式，也能加深他們對數學知識的理解。

(二)結合其他互動工具來進行數學教學

除了棋類遊戲，也建議可以結合其他互動工具，如情境式學習與角色扮演、數位模擬軟體等，如此能夠幫助學生在不同情境中做出更加合理的決策。而教師在這方面的專業發展也極為重要，應熟悉遊戲式學習的方法與策略，以更有效地引導學生進行學習，提升教學效果。

(三)進行更大範圍的實證研究

建議能夠對研究範圍再擴大，探索遊戲式學習在不同教育環境下的應用效果，並對其進行深入分析。這有助於理解這些方法在不同背景下的普遍性，也能提供更多的數據支持，從而使教育者能夠更好地運用這些工具來改善教學質量。

參考文獻

一、中文文獻

教育部(2018)。十二年國民基本教育數學課程綱要。臺北市：教育部。

李心儀(2019)。初探大學生在數學桌遊的數學創造力表現。**科學教育月刊**，422，26-39。

張千惠、林福來、謝佳叡、陳柏宇(2023)。遊戲式數學活動中盲生學習困難及教師教學策略之探究。**教育科學研究期刊**，68(2)，37-72。

黃若綺(2015)。圖形類桌上遊戲對提升國小資優生創造力及學習動機成效之 研究，中華大學科技管理學系碩士班碩士論文。中華大學，新竹市。

黃萬居、邱文鈞、江帷銓(2007)。國小四年級學生黑白棋力與推理能力、創造力與問題解決能力之相關研究。**科學教育研究與發展季刊，47，19-46**

施力瑋(2013)。遊戲式學習研究的現況、成果與課題，國立臺灣師範大學科技應用與人力資源發展學系碩士論文。國立臺灣師範大學，台北市。

陳李綢(1992)。國小男女生後設認知能力與數學作業表現的相關研究。**教育心理學報**，25，97-109。

張景媛、陳萩卿(2003)。促進推理思考的認知策略。**課程與教學季刊**，2(6)，107。

李岱倩(2017)。桌上遊戲對國小學童學習動機之影響—以新北市數林國小為例，南華大學公共政策研究碩士班碩士論文。南華大學，嘉義縣。

邱于平、江育融(2022)。以自我決定論探討遊戲化教學對於內在學習動機之影響。**中科大學報**，9(2)，19-41。

謝佩勳(2017)。遊戲化即時回饋系統對國中生內外在動機、學習投入度、注意力與學習成效的影響，國立交通大學教育研究所碩士論文。國立交通大學，新竹市。

二、英文文獻

Aspinwall, L., & Shaw, K. L. (2000). Enriching students' mathematical intuitions with probability games and tree diagrams. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(4), 214-220.

Barab, S. A., Thomas, M. K., Dodge, T., Carteaux, R., & Tuzun, H. (2005). Making learning fun: Quest Atlantis, a game without guns. *Educational Technology Research and Development*, 53(1), 86-107.

Celone, J.(2001). *The effects of a chess program on abstract reasoning and problem-solving in elementary school children.* (UIM No:1402976)

Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2019). Cognitive analysis on prospective mathematics teachers' reasoning using area and tree diagrams. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education,* 27(2), 18–32.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Senge, P. M. (1990). *The Fifth Discipline: The Art & Practice of the Learning Organization*. Doubleday.

Sala, G., & Gobet, F. (2017). "Do chess training and chess expertise promote cognitive and academic skills? A meta-analysis." *Educational Psychology Review, 29*(3), 443-448.

From Chessboard to Decision-Making: A Study on Cultivating Students' Tree Diagram Thinking and Decision-Making Skills through Board Games

Yu-Jui Chen[1], Jeng-Chung Chen[2]
[1]Graduate Student of Graduate Institute of Mathenmatics and Science Education National Tsing Hua University
[2]Professor of Graduate Institute of Mathenmatics and Science Education National Tsing Hua University

Abstract

The purpose of this study is to explore how board games can serve as educational tools to cultivate students' tree diagram thinking and decision-making abilities. Through literature review and empirical analysis, the researchers found that board games can effectively guide students to establish systematic thinking, helping them to employ layered reasoning strategies for comprehensive decision evaluation when facing problems. The rules and mechanisms of board games encourage students to make optimal choices through prediction, analysis, and adaptation, thereby enhancing their mathematical reasoning and problem-solving skills. Additionally, this study suggests that integrating other interactive tools, such as digital software, programming, and puzzle-solving activities, could further expand students' learning contexts and facilitate more in-depth research, making the application of tree diagram thinking more flexible and diverse.

According to the research findings, this study also recommends that teachers appropriately incorporate board games into the classroom to inspire students' decision-making thinking and combine various teaching tools to create a more challenging and stimulating learning environment. Furthermore, curriculum design should encourage students to enhance the quality of their decisions through practical engagement and reflection within the games, enabling them to flexibly apply tree diagram thinking in both academic learning and daily life, thus cultivating their ability to face future challenges.

Keywords: board games, tree diagram, decision-making ability

設計動態虛擬教具支援多重積分的學習

林姿均 林震燦 陳裕益 楊菁菁
逢甲大學應用數學系 lintc@fcu.edu.tw
逢甲大學應用數學系 linjt@fcu.edu.tw
逢甲大學應用數學系 yychen@fcu.edu.tw
逢甲大學應用數學系 yangcc@fcu.edu.tw

摘要

多重積分的學習重點在二重和三重積分，而要解決多重積分計算問題就必須要先能掌握積分區域描述的能力。本研究設計的動態虛擬教具暨使用平台(GGB)聚焦在 2-和 3-維區域的探討，旨在輔助多重積分的學習，適用於課堂上教學與課後自我練習之用。「動手寫」是學習數學的不二法門，GGB 營造一個讓學生必須動手演練的具備回饋機制的動態數位學習環境。本文將同時介紹應用於二重積分的 GGB 和應用於三重積分的 GGB。然而，由平面區域的描述跨越到立體區域描述難度是倍數成長，因此，本研究先針對二重積分的學習，透過紙本測驗方式分析 GGB 對學習成效的影響。分析結果顯示，在常態的積分教學導入 GGB 確實對學習有正面影響。

關鍵字：二重積分、多重積分、GeoGebra、迭代積分、動態虛擬教具

壹 緒論

本研究旨在創作多重積分的動態虛擬教具提供學生使用並探索使用成效。大學微積分的積分學習由單變量積分跨越到多變量積分對很多大一學生而言並不容易。單變數函數定積分的積分範圍是簡單的實數線段，而二重、三重積分的積分範圍則是 2-維平面區域與 3-維立體區域。因此，學生在學習多變量積分(多重積分(multiple integrals))計算時，首先必須要具備處理積分區域的能力：要能判斷積分區域的代數類型，能區分不同代數類型的差異性；繼而在 Fubini 定理條件下轉換為迭代積分型式，以及考慮積分順序轉換問題。然而，很多學生常無法完整描述積分區域的幾何圖形，而且學生的幾何認知與其代數式認知常處於失聯狀態。

另一方面，「動手寫」一直是學習數學的不二法門，要理解數學問題內含的邏輯需要大量的「練習」，透過動手練習來檢驗自已對問題理解的程度及培養自我修正的能力。 然而在教學現場，我們觀察到學生的學習態度與方式有著顯著的改變，手機與平板取代了筆與紙，常沉溺在繽紛的網路世界，黑板教學方式顯得枯燥單調無法吸引學生的注意力。傳統的教學方式已不能滿足授業者與學習者雙方的需求，如何妥善使用多媒體科技於專業學科的教學與學習上是現今必須考慮

與實現的當務之急。

動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software，簡稱 DGS）可以將幾何圖形與文字或抽象符號作更生動的展現，對學生探索數學結構、建立代數與幾何間的連結來說是相當有用的輔助利器。以 DGS 來輔助數學教學與學習已是現今與未來的趨勢。DGS 可以有多種不同方式融入教學，譬如，於教學過程中直接在 DGS 的指令列輸入方程式展示其幾何圖形或點選工具列繪製動態圖，或者指定作業由學生操作 DGS 嘗試找出解答，或者在 DGS 的基本功能支援下製作與每個教學單元內容相關的動態教具。 本系在多年前就已開始利用數學軟體 GeoGebra 依大學微積分教學單元設計研發相關之動態虛擬教具與平台(林震燦、陳裕益、楊菁菁 2018)提供教師教學與學生課後複習之用，多視窗功能的平台建置讓每位教師可依個人風格製作自己的動態教學講義。然而，此虛擬教具平台雖然提供可輕易操作及觀察的功能，但是缺乏實質演練的環境。對於學習態度比較懶散的學生，他可能會上平台操作並觀看了內容而自認為已經理解，但等到考試驗收成果時才發現與實質上的理解程度大相徑庭。有鑑於此，我們以一般區域的重積分為主題，設計具回饋功能的動態數位練習環境，誘導學生動手練習。

本文內容介紹如下: 章節貳介紹以 GGB 作為元件搭建多重積分學習鷹架；章節參以二重積分為主設定學習目標以及簡介紙本測驗內容設計方針;章節肆介紹應用於二重積分的 GGB；章節伍是二重積分學習成效分析；章節陸介紹應用於三重積分的 GGB；章節柒為結果與討論。

貳 理論架構

鷹架學習概念源自於發展心理學家 Vygotsky 提出的近側發展區間(zone of proximal development, 簡稱 ZPD)的認知發展理論(Vygotsky, 1978)。ZPD 指的是由學習者的實際發展層次到潛在發展層次之間的動態距離，也就是由學習者的基本能力層次到需要經由教師或同儕協助才能完成的層次的距離，而這兩種層次隨著學習歷程的行進而有所變動。ZPD 理論在意的是透過教學，協助學生超越目前的基本能力朝向更成熟層次發展。植基於此 ZPD 理論的鷹架(scaffolding)學習概念應運而生。鷹架學習理論最先由 Wood, Bruner & Ross (1976)提出，引起了很大的迴響。很多教育學家對鷹架理論提出不同的觀點、模式及不同教學情境下的鷹架教學設計(謝州恩, 2013)。簡言之，鷹架學習理論強調知識的獲得是由學習者自己建構的，而此建構過程乃是學習者經由與他人(教師或同儕)互動形成的。鷹架學習理論可以視為是教學策略，好的教學策略是要能製造學習者與他人的正面互動契機，進而激發出學習者的潛在能力。Belland (Belland, 2017; 林君憶，2019) 提出電腦化鷹架(computer-based scaffolding)，利用現代的多媒體工具來架設學習鷹架。電腦化鷹架的設計策略是很多樣性的，可以是崁入實體

學校的部分教學內容中，可以是網路開放課程平台例如均一和 Coursera 等。
以人為主的一對一學習鷹架可以機動性的增減或修改，電腦化鷹架的優點是可以不受時間與人數限制學生可以隨時與電腦互動，缺點是互動內容可能無法機動性更改，因此鷹架內容設計必須要有完整的知識架構，要有明確的學習及互動步驟。
參考 Mayer(2014)多媒體學習原則，線上動態虛擬練習教具平台(簡稱 GGB)作為多重積分學習鷹架的元件滿足以下特性:
一、精簡訊息量: 使用者介面避免過多的文字序述或符號，過多的內容可能造成學生的挫折感或不耐煩。
二、明確的單一主題: 只探究與幾何密切相關的基本概念。事實上，已經有許多研究指出運用動態數學軟體輔助微積分教學對學習其概念知識與整體分數皆有正面效益(Tall, 1992；余啟哲、吳思慧，2014; Nobre et al., 2016; Ocal, 2017)。然而，並非所有微積分主題都要以視覺化方式呈現，因為這樣做可能會對更高維度微積分的學習產生困擾(Tall, 1992)。
三、呈現的內容與方式應符合使用者的學習需求: 電腦化鷹架設計的困難點在於無法針對每一位使用者量身訂製鷹架內容，只能事先設想使用對象可能遭遇的學習困難點設置提示(回饋)的互動機制。並不是每一位使用者都需要在每一步驟的提示，他就可以跳過前面的部分觀察步驟直接作答，碰到困難也可以很容易地回到前面的觀察(提示)步驟。
四、只要能連上網路使用上沒有時間與地點的限制: 。
五、數據輸入應該簡單易操作。
六、視覺舒適感: 使用介面各分部比例與色彩配置的協調和諧，應該有助於學生使用意願。

參 研究方法

一、二重積分的學習目標
 前提是學生已認識 積分的基本概念與基本運算規則。
(一) 基本目標: 2-維度(積分)區域的描述，並且能區分兩種不同的代數式 Type I 和 Type II.
(二) 進階目標: 1.將重積分轉為適當的迭代積分型式；2.積分順序變換；3.知道何時做積分順序變換。
在常態的課堂教學導入自主練習教具 GGB。積分區域的理解需要良好的幾何想像，適合以動態數學軟體做為輔助學習的工具，另一方面，應該讓學生清楚知道學習二重積分的初始重點在哪裡，因此 GGB 的內容將只專注於積分區域的題材，而後借由傳統的紙筆測驗觀察學生在此動態教具的輔助下是否有能力建構完整的二重積分的知識。俗話說，重要的事要說三遍，二重積分的積分區域的探討與單變數積分計算平面區域面積的學習單元有關，我們的動態練習教具分兩個版本 GGB-1 和 GGB-2。GGB-1 用於計算平面區域面積的學習主題，這兩套教具功能頗類似，

GGB-1 只需能判斷區域的一個代數式即可，GGB-2 則嚴格要求確認幾何區域有幾種代數式。兩者都具備有即時回饋功能，GGB-2 的回饋時機將視學生在 GGB-1 的學習狀況做適當的增減。

二、研究工具

紙本測驗包含不同階段實施的前測、測驗 1 和測驗 2; 問卷是要了解學生對 GGB 的看法。 前測試題用於檢驗學生的基本先備知識以及對平面區域圖形的理解程度。測驗 1 在 GGB-1 使用後，試題設計在檢驗學生對平面區域代數式的掌握，主要以填充題方式進行，再進階加入要求自行判斷完整的表示式題目。測驗 2 在 GGB-2 使用後，試題設計分 3 類型: (一) 由積分區域的敘述描繪其幾何圖形並將重積分轉換成任一可能的迭代型式。 (二) 由迭代積分寫出積分區域的代數式並完成積分順序轉換。(三) 先能寫出積分區域代數式再決定重積分的迭代型式。

參與研究的班級有不同的任課老師，依常態的微積分課程進度進行教學，搭配教具 GGB 的各課程單元教學實施重點請閱表一。

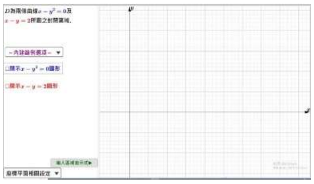
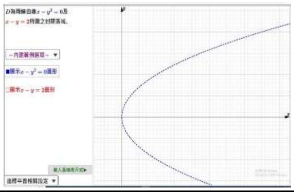
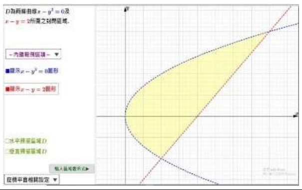
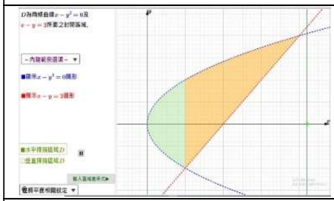
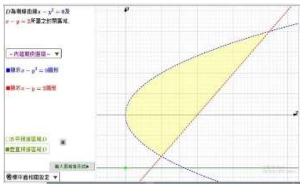
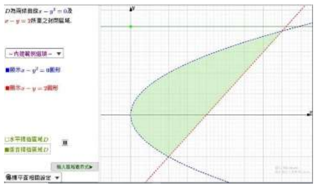
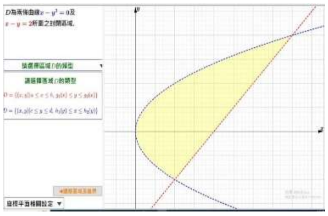
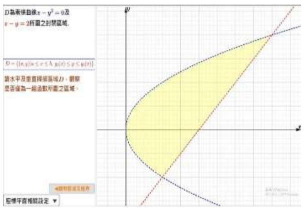
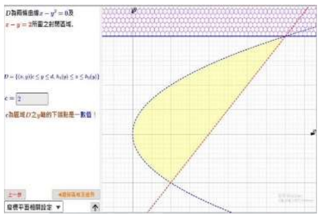
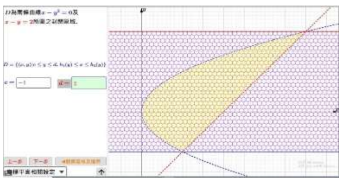
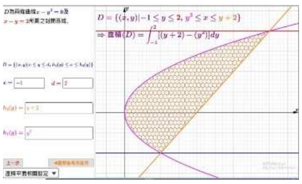
表一 搭配 GGB 的教學方案

課程單元	內容重點
前測施作	探討學生的相關先備知識
積分的應用: 單變數積分計算平面區域面積	1. 參考前測結果，複習基本概念 2. 開放讓學生自由使用 GGB-1 線上練習時段 3. 同時繼續本單元的議題介紹 4. 紙筆測驗 1
(矩形區域二重積分)	介紹重積分基本定義與迭代積分基本計算原則(非本研究重點)
一般區域的二重積分	1. 平面區域基本問題重點式複習 2. 開放讓學生自由使用 GGB-2 線上練習時段 3. 同時繼續本單元的議題介紹 4. 紙筆測驗 2

肆 動態教具設計

一、GGB 虛擬動態教具是在 GeoGebra 數學軟體的基本語法背景下自行設計開發。還需要建構題目表單載入的版面以及使用平台。學生可以由題目表單隨意選取練習題。

二、圖一解釋虛擬動態教具 GGB-1 的功能，水平與垂直掃描的動態功能(圖一第 4 至 6 步驟)主要在協助學生確認區域的代數型式。虛擬動態教具 GGB-2 的功能與 GGB-1 類似，更注重在代數型式 Type I 與 Type II 之間的轉換。

		
1. 從「內建範例選項」任選題目。在畫面左上角顯示題目內容。	2. 點選其中之一的函數(方程式)，則同步顯示此函數(方程式)曲線。	3. 顯示所描述之區域 D。
		
4. 繼續點選「水平掃描區域 D」，則出現一垂直線由左向右掃描，掃描過的 D 區域顏色產生變化。	5. 繼續點選「垂直掃描區域 D」，則區域 D 顏色恢復原先的黃色，然後出現一水平直線由下往上掃描。	6. 呈左圖，水平直線掃描過的 D 區域顏色產生變化。
		
7. 使用者在「請選擇區域 D 的類型」選項中點選其中之一選項。	8. 呈左，若選擇錯誤，則提示再回到觀看水平掃描及垂直掃描的步驟。直到選出對的型式。	9. 則依序填寫 y 與 x 的範圍。蜂巢式區域顯示給予的 y 的下界，與區域 D 無重合的範圍，表示答案錯誤。 建議回到上一步驟再次觀察
		
10. 圖形顯示答案正確，點選「下一步」繼續作答。	11. 答案完全正確時，幾何區會同步顯示區域的代數式與區域 D 的面積公式。	

圖一 GGB-1 範例練習連環示意圖表

伍 資料分析

研究對象是理工科 3 個班級的大一學生(排除沒有完成所有實體測試的學生)，用三次的紙筆測驗分析有上網做 GGB 演練與沒有做的學生之間的學習成果差異性。第一階段「前測→測驗 1」注重在幾何圖與代數式的基礎能力，測驗題型主要是填充題的格式，又分為有幾何圖形輔助與沒有兩類題型。第二階段「測驗 1→測驗 2」注重在積分區域的掌握與由重積分轉換至迭代積分的基礎能力以及重積分與迭代積分的轉換能力和積分順序轉換的進階能力。

一、第一階段的分析比較

有圖形輔助的題型，有做 GGB 練習的學生在檢驗先備知識的前測的平均表現比沒做的學生稍好一些，對於沒有圖形輔助的題型這兩類學生表現幾乎沒有差異。但是在測驗 1，有做 GGB 練習的學生的表現顯然優於沒做的學生。

二、第二階段的分析比較

(一) 搭配幾何圖形寫出 Type II 代數式，測驗 1 的題型是填充式，測驗 2 題型則要求寫出完整的代數型式(表二)。

表二

	測驗 1 與 2 均滿分	測驗 1 滿分，測驗 2 只得 0 分或部分分數，占各組的測驗 1 滿分人數的	測驗 1 只得部分分數而測驗 2 得滿分者，占各組的測驗 1 得部分分數人數的
有做 GGB	29.26%	28.57%	43.48%
沒做 GGB	9.83%	50%	15.79%

Type II 的表示法是學生較不熟悉的，表四顯示有做 GGB 練習的學生有顯著的進步。

(二) 在測驗 2，給予圖形與 Type I 由學生寫下 Type II，並判斷哪類型的積分區域的代數式適用於重積分的計算(表三)。

表三

	寫出 Type II 的人數中，是否有正確的解決重積分的策略與答案			Type II 得部分分數的人數中，是否有正確的解決重積分的策略與答案			Type II 得 0 分的人數中，是否有正確的解決重積分的策略與答案		
	正確答案	有，答案錯	沒有（0 分）	正確答案	有，答案錯	沒有（0 分）	正確答案	有，答案錯	沒有（0 分）
有做 GGB	18.18%	50%	31.82%	0%	33.33%	66.67%	0%	41.67%	58.33%
沒做 GGB	7.14%	50%	42.86%	0%	23.08%	76.92%	5.66%	5.66%	88.68%

表三的分析結果的「不完整」選項意指學生寫出正確的積分順序與上下界但沒有完整的計算過程。有做 GGB 練習的學生仍有接近 1/3 在已知積分區域的

Type I 與 Type II 情況下，無法給予有效的重積分解決策略，沒有做 GGB 練習的學生則有超過 1/3 有相同的問題。 也許還值得探究的是，有少數學生不知 Type II 卻能有正確的重積分計算過程。

(三) 測驗 2 題型之一: 給予 Type I 積分區域的迭代積分，畫出積分區域並寫出其 Type I 和 Type II 型式以及積分順序變換(表四、五)。

表四 畫出區域圖對照是否知道相對的代數式

	畫出完整區域圖		只畫出邊界線		沒有或錯誤圖形	
	Type I & II	Type I	Type I & II	Type I	Type I & II	Type I
有做 GGB	82.35%	5.88%	42.86%	14.29%	15.79%	36.84%
沒做 GGB	47.83%	8.7%	16.67%	16.67%	11.76%	15.69%

表五

	寫出完整 Type I 和 Type II	只寫出 Type I
有正確的積分順序變換	54.76%	31.25%

此題有高達 82.35% 有做 GGB 練習的學生能畫出正確圖形又能完整寫出兩類代數式。 在所有參與考試的學生中可以寫出完整 Type I 和 Type II 同時又可以有正確積分順序變換的占 54.76%. 神奇的是，有些學生不知(或寫不出) Type II 卻能做正確的積分順序變換。

(四)複合型: 需要切割處理的封閉區域 D(=$D_1 \cup D_2$)的代數描述(表六)。

測驗 2 的給分標準相對地比在測驗 1 嚴格，而且測驗 1 的題型是有給圖形，在測驗 2 則無。

表六 封閉區域$D_1 \cup D_2$的代數式題型

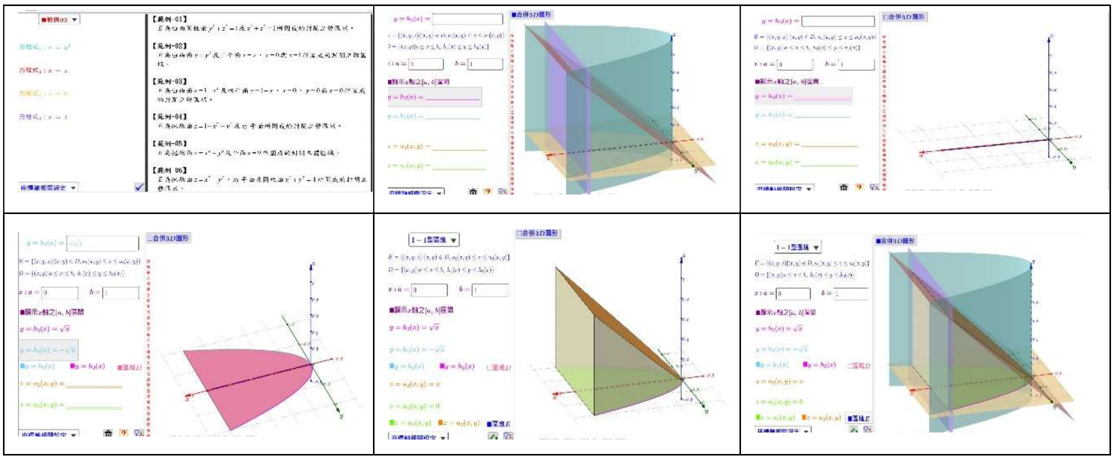
	在測驗 1 得分超過一半以上的人數占比	在測驗 2 得分超過一半以上的人數占比
有做 GGB	21.95%	7.32%
沒做 GGB	13.11%	3.28

表六顯示大部分學生對不能以單一 Type I 或 Type II 集合表示的平面區域的代數描述仍有很大的困難，特別是在沒有幾何圖形可供觀察時。在測驗 2 顯示有能力寫下積分區域代數式的學生同時具備有將重積分轉變為正確的迭代積分的能力；無法正確理解積分區域的同學則對後續的積分計算問題無法做出合理的回應。

陸 三重積分

三重積分要處理的是由多個方程式或雙變數函數曲面所圍之 3-維的積分區域，它有 6 種可能的代數描述式，也就是說，對 3-維封閉區域的理解必須要具備更高層次的幾何想像。這對 GGB 教具開發者和對學生來說，都是極大的挑戰。數學軟體 GeoGebra 3D 動態繪圖具備的轉動觀察型式並不適合觀察所有類型的立體

區域，可能造成圖形的難以辨識，而且在有限大小的版面中設計如何以簡潔方式呈現出所需表達文字內容及功能鍵，還要考慮動態圖的顯示速度，上述功能並非能直接利用 GeoGebra 基本元件及現成指令就能生成的。幸運地，GGB 教具主要開發者林震燦老師已想到解決方法並且完成三重積分的動態教具(GGB-3)設置(圖二)。 然則，由學生在二重積分的學習表現來看只用 GGB-3 做為單一的學習鷹架元件稍嫌薄弱，立體區域常用投影法來決定其代數表式式，由 3-維幾何區域投影到 2-維平面，對學生而言，判斷此投影平面的數學結構一點都不直觀，因此，為了達到有效學習的目的，由 GGB-2 到 GGB-3 這中間可能還需要設計一套電腦化的接軌鷹架，只是這接軌鷹架的內容還須謹慎思考。



圖二 3-維區域的教具 GGB-3

柒 結果與討論

本研究分析結果以及問卷結果顯示動態虛擬教具 GGB 是有效率的輔助學習工具，用過的學生認為自己操作 GGB 練習對學習很有幫助，也增加對自己解題能力的自信。 然而，一切的學習成效還是取決於學生自身的學習積極性。本研究一開始並沒有預計採用傳統的實驗組與對照組的研究方法，而是開放給所有學生使用 GGB 的權限。有自主上網在 GGB 平台練習的學生大約只占全體學生的 35~40%，比預期的少。另一方面，對很多學生而言，獨立解決二重積分問題還是有極大的難度。問題顯示 GGB 搭建的鷹架對學習確實是很有助益，但還不足以支撐重積分的完整學習，可以思考在不干擾基本概念學習下，在適當時機導入第二組數位鷹架。

誌謝

本研究部分成果承蒙國科會經費補助(NSTC1122410H035004)，特此致謝。

參考文獻

余啟哲、吳思慧（2014）。電腦輔助環境下大二數學系生重新建構多變數微分知識之個案研究，科學教育研究與發展季刊，68，49-76。
林君憶(2019)。導讀《STEM 教育裡的教學鷹架》。當代教育研究季刊，第二十
七卷第二期，111-120。
林震燦、陳裕益與楊菁菁（2018）。微積分中雙變數函數相關課題的三維教具開發之理念與成果。高等教育研究紀要，第八期，17-28。
謝州恩()。鷹架理論的發展、類型、模式與 對科學教學的啟示。科學教育月刊，第 364 期，2-16。
Alessio, F., Demeio, L. & Telloni, A. I. (2022). Promoting a meaningful learning of double integrals through routes of digital tasks. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 20(1), 107-134.
Alessio, F. & Telloni, A.I. (2024). Engineering students' use of scaffolding elements within digital tasks concerning planar integration domains. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 52, 370-387.
Belland, B. R. (2017). Instructional scaffolding in STEM education. Springer: Cham,
Switzerland.
Gemechu, E., Mogiso, A., Hussein, Y. & Adugna, G. (2021). Students' Conception on Multiple Integrals of a Function of Several Variables: A case of Adama Science and Technology University. *American Journal of Applied Mathematics*, 9(1), 10-15.
Mayer, R. E. (Ed.) (2014). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (*2nd ed.*). New York, NY: Cambridge University Press.
Nobre, C. N., Meireles, M. R. G., Vieira, N. J. R., Mônica, N. C., Lucivânia, E. R. & Rejane, C. (2016). The use of GeoGebra software as a calculus teaching and learning tool. *Informatics in Education,* 15(2), 253-267.
Ocal, M. F. (2017). The effect of GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge: the case of applications of derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78.
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological process*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Design dynamic virtual teaching aids to support the learning of multiple integrals

Abstract

The focus of learning multiple integrals is double integrals and triple integrals. To solve multiple integral problems, students must first be able to describe the region of integration. The dynamic virtual teaching aids and application platforms (GGB) designed in this study are mainly aimed at the discussion of two- and three-dimensional regions, aiming to assist the learning of multiple integrals and are suitable for classroom teaching and after-class self-practice. "Hands-on writing" plays an important role in learning mathematics. GGB creates a dynamic digital learning environment with a feedback mechanism that requires students to practice. This paper analyzes the impact of GGB on the effectiveness of double integral learning through paper-based tests. The analysis results show that introducing GGB into double integral teaching does have a positive impact on learning.

Keywords: double integrals, multiple integrals, GeoGebra, iterative integrals, dynamic virtual teaching aids

GeoGebra 融入三次函數對稱中心學習扶助研究

蔡明諺[1] 姚如芬[2]

[1]嘉義市東區國立嘉義高商 satsuki931000@gmail.com

[2]國立嘉義大學教育學系 rfyau@mail.ncyu.edu.tw

摘要

本研究主要探討高中一年級學生在「GeoGebra 融入三次函數的對稱中心」前後的學習表現差異。首先利用前測了解學生的錯誤類型，並在課堂活動過程中引入 GeoGebra，配合其動態特性與直觀的圖像表徵，讓學生實際操控變數使其了解對稱中心的意義與三次函數的關係。經由課室觀察與相關資料的蒐集，研究發現個案學生在學習扶助前常見的錯誤類包含：無法理解對稱中心的意義、無法從特定形式的三次函數如$y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$看出三次函數的對稱中心、也無法從三次函數的一般式$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$，轉化為$y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$ 看出對稱中心；在學習扶助活動進行中，學生訪談中表示，GGB 的動態性以及具體的圖像觀察三次函數圖形對稱中心有直觀的感受使其印象深刻；且經由 GeoGebra 融入學習扶助後，個案學生在後測檢驗後，對於對稱中心與三次函數的關聯有顯著的改善，

關鍵字: 三次函數，GeoGebra，學習扶助

壹、 緒論

一、研究背景與動機

三次函數單元是十二年國教課程與九年一貫課程的最大變動點之一，也是學測常見的大重點，如果在這時期不建立起良好的函數與圖形表徵的轉化連結，勢必會對未來函數概念有相當程度的影響，尤其高中二年級三年級後續的函數單元，如三角函數圖形，多項式函數引入微分後介紹的勘根定理，學習上會有一定的阻礙。反之若建立起來，對於學生函數與圖像表徵的連結將可以沿用到後面的函數概念單元，對於高中階段的函數能力奠定良好的基礎，因此選定本單元作為學習扶助的課程單元。

此外，搭配目前的科技，以及教育部推廣的「生生有平板」政策，本學習扶助配合動態幾何軟體 GeoGebra 來進行，本軟體具有介面直觀，操作容易上手的特性，並且 Geogebra 支援線上應用程式，可將 Geogebra 教學教材上傳至個人的頁面，學生可利用行動裝置(如:手機，平板)隨時打開教學教材進行操作，輔助學生能在學習三次函數單元的過程中有良好的成效。事實上，研究也有指出，在使用資訊科技教學媒體的情況下，其學習成效是高於一般學生的學習成效。 (張沼澤（2005）。我國資訊科技融入教學對學生學習成效影響之統合分析)

基於上述說明，本次研究中採用的資訊科技軟體為 Geogebra 動態數學幾何軟體，並且將其融入在學習扶助之課堂中，協助低成就表現的學生，釐清三次函數這個單元的一些迷思概念，強化其學習表現。

本研究欲利用動態數學幾何軟體 GeoGebra (以下簡稱 GGB) 針對三次函數當中的「三次函數的對稱中心」來進行學習扶助課程活動，並探討以下問題。

二、研究目的

(一)、探究個案學生在「GeoGebra 融入三次函數的對稱中心」學習扶助前，學生錯誤類型。

(二)、探究個案學生在「GeoGebra 融入三次函數的對稱中心」學習扶助中，學生在活動歷程中的數學學習表現。

(三)、探究個案學生在「GeoGebra 融入三次函數的對稱中心」學習扶助後，學生在活動後的數學學習成效。

貳、文獻探討

一、教材分析與學習三次函數對稱中心之困難點

本研究所選單元課程為三次函數單元中對稱中心概念，本節的學習目標如下

1.能搭配平移的概念解讀$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$ 是 $y = ax^3 + px$ 經過右平移 h 單位，向上平移 k 單位得來的圖形。

2.能利用配方法將任意三次函數$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$轉換成
$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$

實際在教學現場，研究者發現中學生學習函數的其中一個困難為「將函數方程式表徵轉化成圖形表徵」。這一點在 Dreyfus 和 Eisenberg 的研究中也有提

到，他們認為「中學生對於函數的代數式轉換至圖形表徵有相當程度的困難」。

而在顏啟麟、羅昭強(1993)的研究中指出：如果能在教學過程中，將代數符號與函數的圖形表徵，做緊密的連結，有助於學生對於函數概念有更深的理解。

張春興在「教育心理學」中提到:表徵是認知學派的重要概念。認知心理學認為將現實世界的事物以另一種較為抽象或符號化的形式的歷程，及為表徵。而在數學上常見的表徵莫過於函數圖形將函數一般式(代數表示法)圖像化成函數圖形(圖形表示)。

此外，學生學習三次函數的過程中出現的常見問題與迷思的相關研究較為稀少，因此研究者以自身教學經驗歸納出學生在學習本單元時常見的迷思。
1.無法理解$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$的對稱中心為$(h, k)$
2.對於任意三次函數無法轉換成$y = a(x - h)^3 + p(x - h) + k$的形式
為使學生了解圖形與目標的函數形式的關聯，以 GGB 作為本研究主要工具。

本研究做為探討使用 GGB 進行學習扶助對於學習三次函數的研究，由本節的文獻資料得知，學生在學習三次函數時必須注意的重點在於讓學生對於函數及其對應的圖形能產生正確的連結。學習三次函數的過程必須給予學生圖形上的輔助，並時刻讓學生對照函數圖形變化的過程，其函數式子本身是如何變化的，進而產生正向連結，使其轉化進基模內，順利學習其單元概念。因此本研究會針對以上重點進行課程編排設計出適合的教學活動。

二、GGB 融入教學的特性

1.提供解析幾何（Analytic Geometry）的坐標系統

在 GGB 的繪圖區中，使用者可以自訂是否顯示平面直角坐標軸系統，並在繪製出的函數圖形上，標記出欲關注的定點坐標。也可使用快捷功能版提供的基本功能，如:畫直線，畫圓，做對稱點，點交點…並在代數區顯示出相對應的方程式或函數，也可以自行在代數區輸入方程式或函數，讓 GGB 在繪圖區顯示輸入的函數或方程式的圖形。

2.圖形可直接拉動操作，或設定參數變化

若非在代數區輸入方程式或是函數而得到的圖形，可以在繪圖區利用滑鼠直接拖曳或是移動函數，依照自己的目標或需求調整出需要的位置，藉此觀察函數或是方程式的變化。亦可在功能表上設定「滑桿」，將欲改變的係數與滑桿

操控的變數搭配好，便可移動滑桿上的數字，讓函數中的特定係數跟著變動，同時繪圖區的圖形也會跟著做對應的變換。

3. 可提供動態連續變化性

GGB 繪圖區的圖形在拉動滑桿的過程是動態變化的，也就是說其改變過程是漸進及連續的，而非立刻從型態 A 轉變成型態 B，因此學習者看到的是一個連續的變動過程，使學生能觀察圖形的連續變換。

參、研究設計

一、 研究類型與研究參與者

本研究採取個案研究法，研究對象為研究者於嘉義市任職的高中職的一位學生；由於主要目的在探討個案學生在實施 GGB 資訊科技融入教學以前，「三次函數對稱中心」單元的迷思概念，與實施 GGB 教學後學習成效以及概念的差異，因此研究過程中會不斷與學生進行提問，確認學生的學習迷思狀態以及對於 GGB 輔助教學的接受程度。

有關研究對象篩選標準說明如下:

(1) 所有後百分之三十五的學生名單中，「三次函數對稱中心」基礎觀念錯誤題目高於 5 題以上者。

(2) 從中挑選 12 位學生，發放說明書與家長同意書，確認參與課程意願。

(3) 回收家長同意書，並徵得學生同意後，確認參加人數進行學習扶助。
本次共一位受試學生，且符合上述篩選條件，在三次函數的基礎觀念之先被知識部分屬於待加強的情況。但該生國中基礎運算能力屬中上。

二、Geogrbra 融入三次函數學習扶助介紹

(一)、設計理念

依照文獻分析以及研究者自身的觀察與經驗，學習成就低落的學生，大都具有「學習動機低落」的共通性，進而需要學習扶助的介入，然而，學習扶助若是同樣採取一般課堂的講述法，可能只會進一步造成學生對學科的厭惡。因此研究者嘗試使用不同的手法以及教學模式，包含不同的資訊科技概念、工具，希望能讓學生「學習動機低落」的程度降低。

(二)、活動內容

將本課程單元的教學目標，學習目標以及活動簡介配合 GGB 整理成表 1

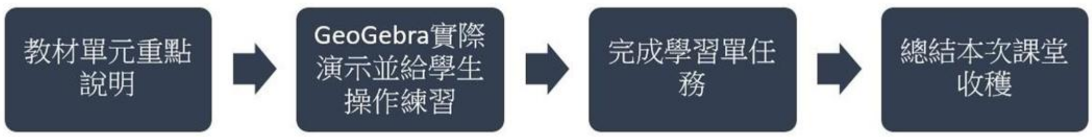
表 1 教學目標；學習目標與活動簡介對照表

教學目標	學習目標	活動簡介
了解三次函數對稱中心與函數的關係	1.能觀察並認知 $y=ax^3+px$ 的對稱中心坐標為$(0,0)$ 2.能利用國中學的平移概念了解$y=ax^3+px$ 平移後的函數方程式以及其圖形的變化 3.結合上述兩點，能了解 $y=ax^3+px$ 平移後的對稱中心坐標。	1.介紹對稱中心，說明其特性，強調 $y=ax^3+px$的對稱中心坐標為(0,0) 2、3.利用 GGB，將原函數圖形向左(右)移動h單位向下(上)移動k單位，其中讓學生自由操弄數值h,k，讓其觀察函數的變化進一步發現平移過後的函數 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 其對稱中心為(h,k)

(三)、教學活動的實施

此外本單元授課係為高中一年級上學期期末考之範圍，因此學習扶助授課時間為寒假的時間，預計每次活動為 60 分鐘，採一周兩次，進行兩周的方式進行課程活動。將本教學活動繪製成如下流程圖 1

圖 1 活動教學流程圖



三、資料的收集

(一)、三次函數單元的前、後測

本研究所設計之三次函數的前測，後測試卷，主要教學目標包含「了解三次函數對稱中心與函數的關係」

(二)、訪談

訪談過程分三部分，第一階段為進行學習扶助前的訪談，著重在學生一開始對於三次函數的觀念迷思；第二階段為學習扶助活動的訪談，著重在學生實際的感受以及上課的吸收程度；第三階段為學習扶助後的訪談，著重在先前對於三次函數迷思觀念的部分在經過學習扶助課程之後的差異。並了解 GeoGebra 融入課程對於學生實際上的感受

(三)、學習單

「GeoGebra 融入三次函數的對稱中心」有一份學習單，每一個活動搭配一個學習單，受試者可在課堂教學當中或者課堂結束之後進行填寫，用以紀錄受

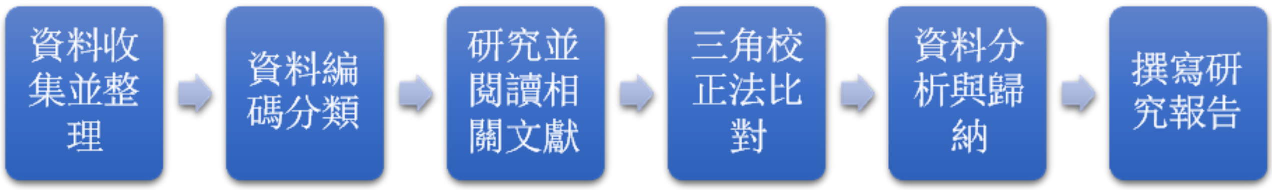
試者學習概念的變化。

四、資料的分析

本研究將收集到的資料，包含訪談、課室觀察、學習單、前後測試卷等享關書面資料做整理歸納，以便日後做相關的追蹤。本研究資料來自多位學生的前後測，課室觀察以及學習單回饋，屬於多個資料來源，因此本資料分析採用三角校正法，將研究者收集到的資料的信度效度提升，使資料更具說服力，以便後續撰寫研究成果。

將收集到的資料整理，並繪製成以下資料分析流程圖 2

圖 2 資料分析流程圖



肆、研究結果

一、個案學生在 GeoGebra 融入三次函數之學習扶助前的前測結果與錯誤類型

研究者依據十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學學習領域之學習內容與教學目標，自編前測試卷進行施測，主要的內容為 「三次函數的對稱中心」，根據兩位個案學生的前測試卷的施測結果，研究者將其整理成如表 2 所示，以了解在進行學習扶助前的答題表現。

表 2 個案學生在前測試卷的施測結果

三次函數的對稱中心前測答題狀況								
題號	選擇 3	選擇 4	非選 1	非選 2	非選 5	非選 7(1)	非選 7(2)	答對率
學生答題狀況	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	14.2%

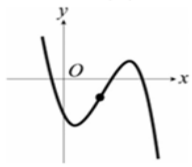
註: ╳表示答錯的題目，○表示答對的題目

由表 2 的結果顯示，從個案學生在高中三次函數單元前測試卷的作答情形

與結果中，發現學生在前測答題情況不佳，平均答對題數不到一題，甚至有個案是全部皆答錯的情形，表示對於三次函數單元理解不清，或觀念混淆。此單元的題目如下圖 3 所示

圖 3 前測試卷有關三次函數的對稱中心的題目

3. （　　）三次函數 $y=f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，如圖所示，試問下列選項哪些是正確的？。
(A)$a<0$　(B)$p>0$　(C)$h>0$　(D)$k<0$　(E)$-ah^3-ph+k<0$



4. （　　）已知三次函數 $f(x)=-2x^3-12x^2-17x+5$，將 $f(x)$ 表成 $-2(x-h)^3+p(x-h)+k$，則下列何者正確？　(A)$h=2$　(B)$k=-7$　(C)$p=7$　(D)對稱中心$(2,7)$　(E)對稱中心$(2,-7)$

2. 一個三次函數為$y=3(x-2)^3-2(x-2)+6$，並寫出其對稱中心

7. 設 $f(x)=2x^3+6x^2+3x+4=2(x-h)^3+p(x-h)+k$ 。
(1) 序組$(h,k,p)=$ ____________ 。
(2) 已知將 $f(x)$ 的圖形往右平移a單位，再向下平移b單位後的新圖形對稱於原點，則數對 $(a,b)=$ ____________ 。

研究者透過測試結果以及訪談內容，將受試學生在本單元的錯誤類型定義為「三次函數的對稱中心概念不清楚」，並透過訪談，進一步了解並細分以下錯誤類型。

1.三次函數$y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$的對稱中心(h,k)的概念不清楚

2.無法將任意三次函數寫成$y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，進而無法求出對稱中心

3.作答方式以直覺進行

二、學生在 GeoGebra 融入三次函數單元學習扶助中的學習表現

本活動中，研究者發現受試學生在教學活動中的表現如下:

(1) 學生能夠藉由 GeoGebra 軟體的操作去調整參數因而產生圖形的及時變化，並透過討論指引，找出參數調整過程中的共通性，首先強化函數平移的概念，並觀察出平移過後的函數形式以及其對稱中心的位置

(2) 學生能夠藉由 GeoGebra 軟體的操作去調整參數因而產生圖形的及時變化，並透過多次的實驗結果，找出其規則進行歸納，且能寫出一般化的結論

(3) 個案學生對於補救教學活動引入 GGB 輔助理解對稱中心的概念給予正向的回饋，對於學習意願有提升。

研究者: 你覺得 GGB 融入三次函數對稱中心的教學方法 OK 嗎?

學生: 我覺得挺好的，比起課本的圖片，這個夠直接，還能自己操控滑桿，觀察圖形的變化，而且坐標隨時顯示可以看。

研究者: 所以這樣的教學搭配 GGB 會讓你對數學產生興趣嗎?

學生: 興趣說不上，但至少比起以前，我比較會願意花點時間去學去理解。

研究者: 那本活動所要帶給你的對稱中心概念，你認為你學會了嗎?

學生: 學會了!!我覺得我比以前懂了不少。

三、學生在 GeoGebra 融入三次函數單元學習扶助後的學習成效

經過 GGB 融入學習扶助後實施後測，將前測錯誤題目互相對照製成表 3

表 3 個案學生在前後測試卷的施測結果對照

三次函數的對稱中心前後測答題狀況對照								
題號	選擇 3	選擇 4	非選 1	非選 2	非選 5	非選 7(1)	非選 7(2)	答對率
學生答題狀況(前測)	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	14.2%
學生答題狀況(後測)	○	╳	○	╳	○	○	○	71.4%

註: ╳表示答錯的題目，○表示答對的題目

由上表可以看出，實施 GGB 融入「三次函數對稱中心」學習扶助後，對於學生的學習成效有一定的幫助，學生的答對率均有明顯上升。

伍、結論

「GGB 融入三次函數對稱中心」學習扶助活動，對於提升學生在本單元的

大部分概念以及學習成效，有明顯的正向影響，這也呼應 Arcavi, A. (2003)的研究中類似的結論，Arcavi 在研究中表明:透過圖形化具體的表徵，對於學生而言，能更直觀的釐清數學的概念，視覺化的表徵對於學習數學概念而言是重要的。

且由本研究訪談中得知，GGB 融入補救教學不只對於學生有概念的理解的幫助，對於提升學生的學習意願也是有顯著的提高。

此外，對於一般形式的三次函數ax^3+bx^2+cx+d，將其轉化成$y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 這類型的問題。經過本次的活動過程後，後測的結果並無顯著的改正跡象，顯示本活動利用 GGB 輔助學生進行函數式轉換為特定的形式的情況沒有有效的幫助。後續或許可以考慮利用 GGB 或其他軟體延伸設計其他課程，輔助學生將一般式轉換成特定形式。

主要參考文獻

教育部(2018)。國民中小學暨普通型高級中等學校十二年國民基本教育課程綱要。台北市: 教育部。

楊晉民，魏士軒。(2021)。Geogebra 融入師資生普通數學學習探究。*臺灣數學教師*，*42*(2)，12- 30。

顏啟麟，羅昭強（1993）國中生函數概念認知發展及教學之研究。國科會專題研究計劃報告。

張春興(1994)。*教育心理學三化取向的理論與實踐*。*初版*。台北市：東華書局。

余民寧（2006）。影響學習成就因素的探討。*教育資料與研究雙月刊*，*73*，11-24。

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics, 6*(1), 2–10.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

A Study on Integrating GeoGebra into the Learning Support of Symmetry Centers in Cubic Functions

Ming-Yan Tsai[1] Ru-Fen Yao[2]
[1] National Chia-Yi Senior Commercial Vocational School
[2]Department of Education, National Chiayi University

Abstract

This study investigates the impact of integrating GeoGebra on the learning performance of first-year high school students regarding the symmetry center of cubic functions. A pre-test was conducted to identify students' common misconceptions. During the intervention, GeoGebra's dynamic and visual features were used to help students explore the relationship between the symmetry center and cubic functions by manipulating variables. Classroom observations and data collection revealed that students initially struggled to understand the concept of the symmetry center, identify it in forms such as $y = a(x-h)^3 + p(x-h) + k$, or convert from the general form $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ to identify the center. Interviews during the intervention indicated that GeoGebra's dynamic and visual representation significantly enhanced students' intuitive understanding. Post-test results showed marked improvement in students' ability to relate symmetry centers to cubic functions after the GeoGebra-based learning support.

Key words: cubic function, GeoGebra, remedial instruction